# بحوث العمليات

## نماذج وتطبيقات

## Operations Research: Models & Applications


الدكتور

حسن ياسين طعمة

أستاذ الإحصاء والطرق الكمية

جامعة فيلادلفيا/ أستاذ غير متفرغ

الدكتور

مروان محمد النسور

أستاذ إدارة الإنتاج المساعد

جامعة البلقاء التطبيقية

إيمان حسين حنوش

مُدرس الإحصاء والرياضيات



الطبعة الأولى

2009م – 1430هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (1037/ 4/ 2008)

658.403

طعمة، حسن ياسين

بحوث العمليات: نماذج وتطبيقات/ د. حسن ياسين طعمة، د. مروان محمد النسور،إيمان حسين حنوش.- عمان: دار صفاء، 2008.

( ) ص

ر.أ.: (1037/ 4/ 2008)

الواصفات: / بحوث العمليات// إدارة الأعمال/

* تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية



الطبعة الأولى
2009 م - 1430 هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - تلفاكس 4612190 6 962+
ص.ب 922762 عمان - 11192 الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190 P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail :safa@darsafa.net

ISBN 978-9957-24-367-8 ردمك

# تقويم الكتاب

لقد كان لي الشرف الكبير في مراجعة مسودة الكتاب الموسوم بـ (بحوث العمليات: نماذج وتطبيقات)، وبعد الإطلاع على مفردات الكتاب وجدتها رصينة من الناحيتين العلمية والعملية، ويُعد هذا الكتاب بحق مرجع علمي مهم لطلبة الدراسات الأولية والعليا (الماجستير والدكتوراه) لما يتضمنه من أسس نظرية وتطبيقات عملية تواجهها الكثير من التخصصات الإدارية والاقتصادية والمالية في مختلف ميادين العمل، فقد ركز وبأسلوب مبسط ومترابط على كيفية حل ومعالجة الكثير من هذه المشكلات في الحياة العملية. وهذا فعلاً ما تحتاج إليه المكتبة العربية ليكون عوناً لطلبتنا وكذلك ما تحتاجه المؤسسات الميدانية في حقل العمل.

فبارك الله بجهود المؤلفين وإبداعهم في بلورة موضوعات هذا الكتاب واختيارها بشكل علمي ومنطقي لينيروا الطريق للأجيال.

والله ولي التوفيق

الأستاذ الدكتور
ظافر حسين رشيد
عميد كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة بغداد

- [illegible] ومحمد . نوال .
- نظرية القرارات -





# المحتويات

مواضيع ناقصة

P.40-47

P.156-

P.158

PDF

بسم الله الرحمن الرحيم

# المقدمة

يهدف هذا الكتاب إلى تطوير القدرات الإدارية التي تُعد من أهم ثروات الأمم، إذ يجب العمل على تطويرها وتنميتها باستمرار للحفاظ على استمرارية المنظمة وديمومتها، خصوصاً في ظل الظروف المعقدة والمتسمة بالغموض والحدة التنافسية لمتخذي القرار في البيئة الإدارية كنتيجة لثورة الاتصالات والمعلومات (ICT) واتفاقيات التجارة الحرة وعولمة الأسواق، ويأتي هذا الكتاب كإستجابة لاحتياجات المكتبة الوطنية لطلبة العلوم الإدارية وغيرها من التخصصات ذات العلاقة في الجامعات الأردنية والعربية ولمتخذي القرار في الوظائف الإدارية بكافة مستوياتها، ولكافة الباحثين والمهتمين في هذه التخصصات، ولنشر الثقافة الإدارية لتهيئة الظروف لاتخاذ قرار إداري رشيد مبني على أسس علمية ومنطقية.

لقد أصبحت بحوث العمليات أكثر من أي وقت مضى الأداة الرئيسة التي بموجبها يتم وضع السبل الكفيلة باتخاذ قرارات إدارية رشيدة، وتمكنْ بحوث العمليات، الإدارة من وضع العديد من الطرق والأساليب الرياضية (الكمية) لحل الكثير من المشكلات الهامة للقيام بأعمالها بيسر وسهولة لاختيار الحل الأمثل لهذه المشكلات.

إن تعقد بيئة العمل وفرزها الكثير من التحديات التي تواجه المنظمة والدخول في الاقتصاد المعرفي الذي بات أيضاً بدوره يفرض مجموعة من التحديات على المستوى العربي والدولي أصبح هناك حاجة أكثر من أي وقت مضى لاختيار الحلول المثلى لاتخاذ قرارات عقلانية ورشيدة.

وإيماناً منا بأهمية هذا الموضوع وشعورنا بالمسؤولية تجاه هذا المحور الهام في الحياة العملية وللاسهام الجاد والصادق في رفد موجودات مكتبتنا العربية وإثرائها

في هذا المجال، نضع بين أيديكم هذا العمل بأسلوب منطقي، علمي، وأكاديمي شاملاً لأهم متطلبات هذا الكتاب حسب رؤيتنا سائلين المولى عز وجل أن يكون هذا العمل فيه المنفعة للجميع.

وقد جاءت المادة العلمية لكتابنا هذا في أحد عشر فصلاً هي كالاتي:

تناول الفصل الأول منه، مفهوم بحوث العمليات، والتطور التأريخي لبحوث العمليات، ومزايا تطبيق مفاهيم بحوث العمليات وعيوبه، ومجالات تطبيق بحوث العمليات وخطوات تطبيقه، وصياغة النموذج الرياضي.

أما الفصل الثاني فقد بحث في البرمجة الخطية وتناول على مقدمة، ونموذج البرمجة الخطية، وافتراضات البرمجة الخطية، وصياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية، والصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية، وطرق حل مشكلات ا لبرمجة الخطية.

وركز الفصل الثالث على البرمجة الخطية – الطريقة المبسطة وتضمن على مقدمة، وحل مشكلات البرمجة الخطية في حالة التعظيم، وحل مشكلات البرمجة الخطية في حالة التقليل باستخدام [طريقة (M) الكبيرة، وطريقة المرحلتين].

أما الفصل الرابع فقد تناول بشيء من التفصيل على النموذج المقابل (المشكلة الثنائية)، حيث تضمن على مقدمة، وخطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل.

وبحث الفصل الخامس في نموذج النقل، وتضمن على مقدمة، وصياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل، وأنواع مشاكل النقل، والطرق المستخدمة لحل مشاكل النقل.

وركز الفصل السادس على نماذج النقل متعددة المراحل وتناول على مقدمة، ونماذج النقل متعددة المراحل النظامية، ونماذج النقل متعددة المراحل غير النظامية (نماذج التدفق).

في حين بحث الفصل السابع في نموذج التخصيص وتناول على مقدمة، وصياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص، والطرق المستخدمة في حل نماذج التخصيص منها (طريقة العد الكامل، والطريقة الهنكارية).





أما الفصل الثامن فقد ركز على نظرية الاحتمال وتناول على مقدمة، والتعريف العام للاحتمال، والاحتمال الشرطي، والحوادث المستقلة، والاحتمال الكلي، ونظرية بييز.

وبحث الفصل التاسع في نظرية صفوف الانتظار وتناول على مقدمة، ووصف النموذج الرياضي لنظام صفوف الانتظار، ونموذج صف الانتظار بمركز خدمة واحد، ونموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة، والعلاقة بين صفوف الانتظار والتكاليف.

أما الفصل العاشر فقد ركز على تحليل ماركوف وتضمن على مقدمة، وإفتراضات تحليل ماركوف، وحساب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، والتنبؤ المستقبلي بالحصص السوقية، وتحديد شروط توازن السوق.

وأخيراً ركز الفصل الحادي عشر بشيء من التفصيل على موضوع المعولية حيث تضمن على مقدمة، ودالة المعولية، ودالة معدل الفشل، وتوزيعات الفشل المعلمية، وطريقة الإمكان الأعظم للتقدير، وأنظمة ربط الوحدات، والعلاقة بين متوسط الزمن بين الفشل ومتوسط زمن التصليح.

إن الكتاب الحالي من حيث محتواه ومضمونه فإنه يخاطب كل من لديه إهتمام بنماذج بحوث العمليات وتطبيقاتها في المؤسسات الإنتاجية والخدمية وغيرها من المؤسسات الأخرى ذات الطابع العملياتي.

ومن واجب العرفان يتقدم المؤلفون بتقديم عظيم الشكر والإمتنان للعاملين في دار جرير ونخص بالذكر الأخ هاني صبح وجميع الأخوات الفاضلات على الجهود التي بذلت في طبع وإخراج هذا الكتاب في صورته الحالية.

وأخيراً أختتم المؤلفون هذه المقدمة بالآية الكريمة ﴿عَلَّمَ الْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ﴾.

صدق الله العظيم.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

١

الفصل الأول

# مفهوم بحوث العمليات وتطوره

# Concept of Operations Research and It's Development

# الفصل الأول

## مفهوم بحوث العمليات وتطوره

## Concept of Operations Research and It's Development

### 1-1: مفهوم بحوث العمليات:

تُعد بحوث العمليات (Operations Research) واختصاراً (OR) من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في الواقع العملي في النصف الأول من هذا القرن، وعلى وجه التحديد في البلدان المتقدمة صناعياً، إذ أحرز تطبيقها نجاحاً واسعاً في المجالات المدنية والعسكرية على حد سواء.

إن كلمة "بحوث" تعني "القياس والتحليل والمقارنة والتنبؤ"، في حين يقصد بكلمة "العمليات" بأنها "الحوادث العسكرية التي تشمل على الفعاليات والإجراءات الاستراتيجية التي تحدث في ساحة المعركة".

وبناءاً على ما تقدم، يتضح بأن مصطلح "بحوث العمليات" منذ بداية نشوءه قد ارتبط بشكل وثيق بالمفاهيم العسكرية.

لقد وردت عدة تعريفات لهذا العلم كان من أبرزها التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية، إذ عرفته بأنه "استخدام الأساليب العلمية (الكمية والرياضية المتقدمة) لحل المشكلات المعقدة التي تواجهها مختلف الإدارات بالاعتماد على أساليب التحليل الكمي عند إدارة الأنظمة الكبيرة من القوى العاملة، المواد الأولية، المعدات، الأموال، والأمور الخدمية الأخرى في المصانع والمؤسسات الحكومية المدنية والعسكرية".

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية، فقد عرفت بحوث العمليات بأنه: "العلم الذي يهتم باتخاذ القرارات العلمية حول الكيفية التي يتم بموجبها تصميم وبناء أنظمة معدات العمل والقوى العاملة بشكل مثالي في ظل الموارد المحدودة".

وتأسيساً على ما تقدم، يمكن الخروج بتعريف أوضح وأشمل لبحوث العمليات بأنه عبارة عن "استخدام الأساليب العلمية لتنظيم تعاون الأنشطة والعمليات ضمن نظام معين، بهدف الوصول إلى الحل الأمثل أو الحلول المثلى لمشكلات هذا النظام، من بين عدد من الحلول الممكنة".

### 1-2: التطور التأريخي لبحوث العمليات:

من الصعب علينا تحديد البداية الفعلية لتطبيق مفاهيم بحوث العمليات، إلا أننا ومن خلال استعراض تطور مفهوم الإدارة بشكل عام، نجد بأن هناك فترات بدأت تتميز بها مفاهيم بحوث العمليات أكثر من غيرها كفترة الثورة الصناعية مثلاً، وفي بداية القرن العشرين كان هناك مجموعة من الأعمال يمكن اعتبارها بأنها كانت ثورة علمية في ذلك الوقت.

فالإدارة العلمية لفردريك تايلور (F. Taylor) كانت ما يسمى بالهندسة الصناعية، إضافة إلى أعمال أخرى اتخذت من الأساليب الرياضية أساساً لها، منها على سبيل المثال لا الحصر: أعمال المهندس الدنماركي ايرلنج (Erlang) حول نماذج صفوف الانتظار التي قام بها عام (1909) تتعلق بتخفيف الزخم الحاصل في حركة تلقي المكالمات الهاتفية لسكان مدنية (كوبنهاكن).

وفي عام (1914) قام العالم البريطاني لانكستر (Lanchester) بنشر بحث تناول فيه العلاقة بين تفوق كفاءة الإنسان وفعالية السلاح الذي يستخدمه، وقام العالم الأمريكي توماس اديسون (R.Edison) بإيجاد الطرق الأكثر فعالية لمناورات السفن خلال الحرب العالمية الأولى والتي من شأنها أن تجعل الخسائر أقل ما يمكن لدى مواجهة الغواصات المعادية معتمداً بذلك على نماذج نظرية المباريات، إضافة إلى





الأعمال التي قام بها هارس (Harris) تناول فيها نماذج المخزون لتحديد الحجم الاقتصادي الأمثل.

وفي أوائل عام (1941) اتسعت رقعة تطبيق مفاهيم بحوث العمليات لتشمل جميع قوات الحلفاء في المجالين الجوي والبحري على السواء، وذلك بسبب النجاح الكبير الذي أحرزه تطبيق مفاهيم العمليات في القوات البريطانية.

وفي الولايات المتحدة الأمريكية تم تطبيق مفاهيم بحوث العمليات في فترة متأخرة عنه في بريطانيا، إذ أستخدمت حينذاك أساليب كمية ورياضية متقدمة في معالجة المشكلات العسكرية، كتنقل المعدات والذخائر الحربية، ومعالجة مشكلات إيجاد أنماط جديدة للطيران الحربي، وتخطيط عمليات زرع الألغام، وغيرها من المشكلات العسكرية الأخرى.

وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية عاد معظم العلماء الاختصاصيين العاملين في لجنة بحوث العمليات إلى الحياة المدنية محاولين تطبيق مفاهيم بحوث العمليات لمعالجة مشكلات مدنية مشابهة.

وبذلك أنتشر تطبيق مفاهيم بحوث العمليات في المنشآت الصناعية والتجارية فأصبح يشمل كافة الأعمال المطلوب انجازها في المنشآت المذكورة بغية تحقيق أهدافها، إذ كان الهدف الرئيسي من استخدام مفاهيم بحوث في المجالات المدنية هو ترشيد استخدام الموارد المتاحة بما يضمن تحقيق أقصى فائدة ممكنة.

ولقد ساعد في انتشار تطبيق بحوث العمليات في المنشآت المدنية (صناعية كانت أم تجارية) عدة عوامل، نذكر منها:

أ – طبيعة الإنتاج الكبير للسلع كنتيجة لاتساع حجم السوق المحلية والإقليمية والدولية.

ب– شدة المنافسة بين المنشآت الصناعية والتجارية.

جـ– تعقد وتنوع المشكلات التي تواجه طبيعة العمل في المنشآت المذكورة.

د – ظهور الحاسبات الإلكترونية وتطورها لما له أثر واضح في حل النماذج الرياضية المعقدة واستخراج النتائج بسرعة فائقة ودقة عالية.

## 1-3: مزايا وعيوب تطبيق مفاهيم بحوث العمليات:

**أولاً- مزايا التطبيق:**

أ - يساهم تطبيق مفاهيم بحوث العمليات كمدخل كمي في تقريب المشكلة إلى الواقع بموجب نماذج رياضية وذلك وفقاً للتفكير العلمي المنظم والعقلاني.

ب- يساعد في عرض النتائج المستخلصة من حل النماذج والعلاقات الرياضية بما يؤمن عدد من البدائل والخيارات لأغراض عملية اتخاذ القرارات، وبما يساهم في تفسير كافة ملابسات المشكلة.

جـ- يساهم في إمكانية تعميم المعايير القياسية والمثالية لعملية اتخاذ القرارات.

**ثانياً- عيوب التطبيق:**

أ - تُعد أساليب بحوث العمليات، منهج عقيم كونها لا تترك فرصة للسلوك الإنساني في عملية حل المشكلة وتفسير نتائج الحل.

ب- صعوبة إخضاع بعض المشكلات للنماذج الرياضية أو التفسير الكمي والحسابات المجردة.

جـ- عدم توفر الكوادر الفنية المتخصصة في صياغة وبناء النماذج الرياضية في المواقع المختلفة التي تظهر فيها المشكلة.

د - التكاليف العالية المترتبة على تطبيق بحوث العمليات كمدخل كمي بسبب إرتباط هذا المدخل بإستخدام الحاسب الالكتروني، مما يستلزم تشكيل فرق بحثية من شانها أن تُحملْ ميزانية المنشأة مبالغ نقدية كبيرة.

## 1-4: مجالات تطبيق بحوث العمليات:

يمكن تلخيص بعض المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في المنشآت الصناعية والتجارية والزراعية والخدمية والعسكرية، سواء كانت هذه المنشآت ذات نشاط ربحي أو غير ربحي، وعلى النحو الآتي:





**أولاً- الصناعة والتجارة والزراعة:**

أ - تخطيط الإنتاج.

ب- توزيع الإنتاج.

جـ- الاستخدام الأمثل للموارد.

د - مراقبة المخزون.

**ثانياً - النقل والمواصلات:**

أ - تنظيم المواصلات البرية.

ب- تنظيم الرحلات الجوية.

جـ- تنظيم حركة المرور.

د- تنظيم استخدامات الهاتف.

**ثالثاً - التخطيط:**

أ- تنظيم استخدام القوى العاملة.

ب- تخطيط المشروعات.

جـ- التخطيط الاقتصادي.

د - جدولة الأعمال.

**رابعا - التسويق والمبيعات:**

أ - رسم السياسات التسعيرية.

ب- رسم السياسات التسويقية.

جـ- بحوث التسويق.

د - الدعاية والإعلان.

هـ- دراسة السوق.

و- تحديد سياسات التوزيع.

خامساً - المجال العسكري:

أ- رسم الاستراتيجيات العسكرية المثلى.

ب- إيجاد الخطط المثلى لزرع الألغام.

جـ- إيجاد الخطط المثلى لعمليات الهجوم والدفاع والانسحاب.

د - الاستخدام الأمثل للمعدات والذخائر العسكرية.

هـ- إيجاد الخطط المثلى لبرامج التسليح وتنظيم العمليات الحربية.

و - تنظيم التعاون بين الفروع المختلفة للقوات المسلحة.

**1-5: خطوات تطبيق بحوث العمليات:**

تؤدي المنشآت مهماتها الإنتاجية أو الخدمية من خلال عدد من الوظائف تتمثل (بالإنتاج، التخزين، التسويق والنقل، الأفراد والمالية)، ولكي يتم إيجاد حلول للمشكلات التي قد تظهر في أية وظيفة من الوظائف المذكورة، يمكن استخدام بحوث العمليات لهذا الغرض، ويمر هذا الاستخدام بعدة خطوات نذكرها، على النحو الآتي:

**أ - تحديد المشكلة وتعريفها:**

يقصد بتحديد المشكلة وتعريفها بأنه: "التشخيص الدقيق للمشكلة ومحاولة تصنيفها ضمن إحدى المشكلات المعروفة كأن تكون مشكلة إنتاج، أو مشكلة تسويق أو مشكلة تخزين، ... الخ".

بمعنى آخر يقصد بتحديد المشكلة بأنه "شعور الإدارة بوجود المشكلة، ووجود الرغبة في معالجتها بغية تحقيق الهدف المطلوب، ووجود عدة بدائل يمكن أن توصلنا لحلها، وكان هناك شك في معرفة أي البدائل أكثر تفضيلاً".





**ب- صياغة (بناء) النموذج:**

يُقصد بصياغة النموذج بأنه: "تمثيل لمكونات المشكلة المدروسة، وتحديد العوامل المؤثرة فيها والظروف المحيطة بها وأسلوب الربط بينها"، ويعرف النموذج، بأنه "عرض مبسط للمشكلة قيد الدرس بالشكل الذي يساعدنا من التوصل إلى قرار سليم"، وسيتم دراسة هذا الموضوع بشيء من التفصيل في الفقرة اللاحقة من هذا الفصل.

وهناك أنواع عدة من النماذج، يمكن إجمالها على النحو الآتي:

**1- النماذج الرياضية المحددة:**

هي النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات معروفة لدى متخذ القرار، أي أنها بمنأى عن المؤثرات الاحتمالية (داخلية كانت أم خارجية)، منها على سبيل المثال (نماذج البرمجة الخطية، النموذج المقابل، ونماذج النقل والتخصيص).

**2- النماذج الرياضية الاحتمالية:**

هي النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات احتمالية غير واضحة لدى متخذ القرار، ويكون هذا النوع من النماذج عرضة للمؤثرات الداخلية والخارجية، منها على سبيل المثال (نماذج السيطرة على المخزون، نموذج صفوف الانتظار، ونموذج المعولية).

**3- النماذج الرياضية الاستراتيجية:**

هي النماذج التي يتم صياغتها من قبل متخذ القرار بناءاً على موقف معين، مُتخذ من قبل متخذ قرار آخر يعمل في نفس البيئة، ويطلق على الموقف المذكور (بالاستراتيجية).

ويتسم هذا النوع من النماذج بالبساطة كون المنافسة بموجبه تتم بين اثنين فقط من متخذي القرار، منها على سبيل المثال (نموذج نظرية المباريات).

4- النماذج الرياضية الإحصائية والمحاسبية:

إن لهذا النوع من النماذج الرياضية استخدامات ثابتة ومعروفة، وتتسم بالبساطة والصفة الخطية، منها على سبيل المثال (مؤشر الوسط الحسابي، الانحراف المعياري، الارتباط والانحدار) في حالة النماذج الإحصائية، وكذلك (مؤشر الفائدة البسيطة والمركبة، أقساط الاندثار، حساب الخسائر والمتاجرة) في حالة النماذج المحاسبية والمالية.

جـ- حل النموذج:

يُقصد بحل النموذج بأنه: "إيجاد مجموعة قيم متغيرات القرار التي من خلالها يتم التوصل إلى الحل الممكن للمشكلة المدروسة، ومن ثم إيجاد الحل الأمثل من بينها".

د - اختبار صلاحية النموذج:

يُقصد باختبار صلاحية النموذج بأنه: "إظهار قدرة النموذج في تمثيل مكونات المشكلة المدروسة"، ويتم اختبار صلاحية النموذج من النواحي الآتية:

1- التأكد من قدرة النموذج على التنبؤ، إذ كلما كانت قدرة النموذج عالية على التنبؤ، كلما دل ذلك على كفاءة النموذج وصلاحيته.

2- المقارنة بين النتائج المستحصل عليها من خلال تطبيق النموذج، والنتائج التي يمكن الحصول عليها من دون تطبيقه.

3- إجراء تحليل الحساسية على النموذج، بهدف معرفة تأثير التغيرات التي نجريها في متغيرات القرار على الحل الأمثل، وكذلك معرفة أي من متغيرات القرار تعد أقل أو أكثر حساسية من غيرها.

هـ- تجربة حل النموذج:

إن الهدف من تجربة حل النموذج، هو التحقق من دقة النتائج المستحصل عليها من تطبيق النموذج وثبوت صلاحيته، إذ يتم ذلك من خلال استمرار قيم المتغيرات غير المسيطر عليها، على الثبات والاستقرار وعدم التغير.





و- تنفيذ حل النموذج:

يُقصد بتنفيذ حل النموذج، بأنه: "وضع الحل المقترح للنموذج موضع التطبيق ومتابعة تطبيقه، للتأكد من صلاحية النموذج أو عدم صلاحيته"، وهذا يعني تحويل النموذج المفاهيمي إلى النموذج العملياتي في العالم الحقيقي والواقعي.

وهنا لابد من الإشارة إلى بعض المعوقات التي تواجه عملية تنفيذ حل النموذج، نذكر منها:

1- عدم قدرة النموذج على تمثيل مكونات المشكلة الحقيقية بسبب اقتصاره على عدد محدود من المتغيرات الأساسية التي يمكن السيطرة عليها.

2- عدم اهتمام القائمين بصياغة النماذج على إطلاع ومشاركة متخذي القرار ومنفذي النموذج، على المعلومات الضرورية التي تمكنهم من فهم النموذج وآلية تنفيذه.

ز- تحسين النموذج:

يُقصد بتحسين النموذج، بأنه: "إدخال التعديلات الضرورية في حالة ثبوت حاجة النموذج في مرحلة التنفيذ لذلك، بهدف تحقيق النتائج المطلوبة من تطبيقه بما ينسجم وحالة الواقع".

1-6: صياغة النموذج الرياضي:

لصياغة النموذج الرياضي بشكل عام، ينبغي اعتماد الخطوات الآتية:

أ - تهيئة البيانات الضرورية للنموذج.

ب- تحديد الهدف المطلوب تحقيقه.

جـ- تحديد المتغيرات القرارية.

د - تحديد القيود وعلاماتها الرياضية.

ولكي تكتمل الصورة، نعطي توضيحاً وافياً لكل خطوة من الخطوات أعلاه، على النحو الآتي:

أ - تهيئة البيانات الضرورية للنموذج:

تُعد هذه الخطوة محورية وأساسية على مستوى بناء النموذج الرياضي، ويقصد بعملية تهيئة البيانات اللازمة للنموذج، هو إجراء عملية تلخيص البيانات وعرضها بما ينسجم مع طبيعة المشكلة المدروسة، ويتم ذلك من خلال تصميم الجداول والأشكال البيانية.

ب- تحديد الهدف المطلوب تحقيقه:

ينطوي الهدف المطلوب تحقيقه من قبل متخذ القرار في منظمات الأعمال، على ما يأتي:

1- تحقيق أكبر قدر ممكن من الأرباح أو العوائد الكلية.

2- أو تحقيق أقل قدر ممكن من الخسائر أو التكاليف الكلية.

جـ- تحديد المتغيرات القرارية:

يستند النموذج الرياضي على تحديد المتغيرات وتعريفها، كأن تكون متغيرات أساسية (Basic Variables)، أو متغيرات غير أساسية (Non- Basic Variables)، والتي تسمى أحياناً بالمتغيرات القرارية، وتكون هذه المتغيرات على ثلاثة أنواع، هي:

1- متغيرات قرارية ذات رمز واحد ($X_j$).

2- متغيرات قرارية ذات رمزين ($X_{ij}$).

3- متغيرات قرارية ذات ثلاث رموز ($X_{ijk}$).

د- تحديد القيود وعلاماتها الرياضية:

بعد الانتهاء من تحديد المتغيرات القرارية الداخلة في النموذج الرياضي، يتم تحديد القيود المؤثرة في النموذج، لعل من أهمها وأكثرها استخداماً في الواقع العملي، ما يأتي:





1- قيود الموارد المادية:

يعبر هذا النوع من القيود عن المحددات أو الشروط المتعلقة باستخدام المواد الأولية اللازمة للإنتاج.

2- القيود الزمنية:

تتمثل هذه القيود بالمحددات أو الشروط المتعلقة باستغلال الوقت المتاح للإنجاز، وتنقسم القيود الزمنية إلى نوعين، هما:

2-1: القيود الزمنية المتعلقة باستخدام المكائن والآلات.

2-2: القيود الزمنية المتعلقة باستخدام الموارد البشرية.

3- القيود المالية:

تعبر القيود المالية عن المحددات أو الشروط المتعلقة باستخدام الموارد المالية.

4- قيود الكميات المطلوبة:

تتمثل هذه القيود بالمحددات أو الشروط المتعلقة بتعاقدات منظمات الأعمال والتزاماتها.

5- قيود منطقية:

يعبر هذا النوع من القيود عن المحددات أو الشروط المتعلقة بطبيعة المتغيرات القرارية، التي ينبغي أن تكون بمواصفات معينة، وتكون القيود المنطقية على نوعين، هما:

5-1: قيود عدم السلبية:

تكون جميع قيم المتغيرات القرارية ($X_j$) موجبة، بموجب هذا النوع من القيود، أي إن ($X_j \geq 0$)، وإن ($j = 1,2,\dots, n$)، مثال ذلك (كميات الإنتاج).

5-2: قيود الأعداد الصحيحة:

تكون جميع قيم المتغيرات القرارية ($X_j$) ذات أعداد صحيحة ولا تأخذ الأعداد الكسرية، مثال ذلك (عدد الجامعات، عدد الطائرات).

وفي ضوء ما تقدم، ينبغي أن يكون هـذه القيـود (علامـات رياضيـة) واضحـة ترتبط بنوع المشكلة المدروسة، وتكون هذه العلامات على أشكال عدة، هي:

**أ- علامة أقل أو يساوي ( ≤ ):**

تستخدم هذه العلامة عندما تكون القيود متعلقة باستخدام [ الموارد الماديـة، أو الموارد الزمنية، أو الموارد المالية]، ينبغي على متخذ القرار في هذه الحالة استخدام (أقل ما يمكن) من هذه الموارد.

**ب- علامة أكبر أو يساوي (≥):**

تستخدم هذه العلامة عندما تكون القيود متعلقة [ بإغراق السوق بالمنتجات، أو الإيفاء بمتطلبات السوق التنافسية]، ينبغي على متخذ القرار في هذه الحالة الاستحواذ على (أكبر حصة سوقية ممكنة).

**جـ- علامة المساواة (=):**

تستخدم علامة المساواة عندما تكون القيود في هيئة [ عقـود، أو التزامـات مـع جهات خارجية]، ينبغي على منظمات الأعمال طرح كميات محددة مـن الإنتاج دون (زيادة أو نقصان) للإيفاء بالتزاماتها.





# أسئلة حول الفصل الأول

س1: وضح مفهوم بحوث العمليات من وجهة نظر:

1- جمعية بحوث العمليات البريطانية.

2- جمعية بحوث العمليات الأمريكية.

س2: ارتبط مصطلح بحوث العمليات منذ بداية نشوءه بشكل وثيق بالمفاهيم العسكرية. ناقش ذلك بالتفصيل.

س3: وضح بالتفصيل، التطور التأريخي لعلم بحوث العمليات.

س4: إشرح باختصار أهم العوامل التي ساهمت في انتشار تطبيق بحوث العمليات في المنشآت المدنية.

س5: عدد مزايا وعيوب تطبيق مفاهيم بحوث العمليات، شارحاً إياها باختصار.

س6: تطرق بالتفصيل إلى أهم مجالات تطبيق بحوث العمليات.

س7: عدد خطوات تطبيق بحوث العمليات، موضحاً إياها باختصار.

س8: ما المقصود بالنموذج، معززاً إجابتك بأنواع النماذج؟

س9: وضح بالتفصيل تنفيذ حل النموذج، ذاكراً أهم المعوقات التي تواجه عملية تنفيذ الحل.

س10: ما المقصود بصياغة النموذج الرياضي، شارحاً بالتفصيل أهم الخطوات المعتمدة في صياغة النموذج الرياضي؟

# ٢

## الفصل الثاني

# البرمجة الخطية

# Linear Programming

# الفصل الثاني

# البرمجة الخطية

# Linear Programming

## 2-1: مقدمة:

تعود بدايات تطبيق البرمجة الخطية (Linear Programming) إلى ما قدمه الاقتصادي المعروف البروفيسور ويسلي ليونيتف (W. Leyontife) أثناء الركود الاقتصادي في الثلاثينات من هذا القرن، من خلال تحليل العلاقة بين المدخلات والمخرجات باستخدام نماذج المدخلات والمخرجات (Input - Output Models)، وإلى ما قدمه العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (J.B. Fourier) عام (1923)، في حين اهتم العالم الرياضي الروسي كاتوروفش (L.V. Katorovich) في استخدام علم الرياضيات لحل مشاكل التخطيط عام (1939)، وقام الاقتصادي المعروف جورج ستجلر (G. Stigler) في بداية الأربعينات بمحاولة تطبيق البرمجة الخطية والذي لم يتوصل إلى وسيلة حل معروفة في حينها، كان هدفه تحديد مكونات الغذاء (Diet) اليومي، وهي مشكلة تتعلق بإيجاد مزيج غذائي أمثل يتضمن كميات من الحديد والفيتامينات والمواد الأخرى، بأقل كلفة ممكنة.

لقد ظهرت بوادر تطبيق البرمجة الخطية لأول مرة عام (1951) في أعمال العالمين الرياضيين ونتزك وكوبمانس (G.B. Dantzig and T.C. Coopmans)، وسمي هذا الأسلوب بالبرمجة (Programming) لأنه يهتم في البحث عن البرنامج (Program) الذي يحقق الهدف المطلوب من بين عدد كبير من البرامج المتاحة، أما صفة الخطية (Linearity) فإنها تعني إن جميع العلاقات التي تربط بين مختلف عناصر النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة هي علاقات خطية.

إن أسلوب البرمجة الخطية يبحث في توزيع الموارد المحدودة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والشروط المفروضة، وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمات الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم (Maximize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تعظيم العوائد النقدية المتوقعة من خطة الإنتاج المقترحة، وقد يتعلق الأمر بتقليل (Minimize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تقليل التكاليف المترتبة عن تنفيذ العمليات الإنتاجية.

## 2-2: نموذج البرمجة الخطية:

يُعد أسلوب البرمجة الخطية أحد فروع البرمجة الرياضية المهمة، ويحتل هذا الموضوع في الوقت الحاضر مركزاً متميزاً في مجال بحوث العمليات، ويُعد من المواضيع الأكثر شيوعاً واستخداماً للوصول إلى تحقيق الأمثلية (Optimaization).

وتكمن أهمية نموذج البرمجة الخطية في كونه أحد الوسائل المستخدمة في دراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، وكذلك كونه من أبسط أنواع النماذج الرياضية وأسهلها، والتي تستخدم في معالجة كثير من مشكلات البرمجة الصناعية والحكومية المعقدة.

وتُعرف البرمجة الخطية، بأنها: "أسلوب رياضي يمكن توظيفه لتوزيع الموارد والإمكانات المحدودة ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة وصولاً إلى تحقيق أمثلة التوزيع".

كما وتُعرف البرمجة الخطية، بأنها: إسلوب رياضي يستهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية، والذي يتم بموجبه تخصيص الموارد المحدودة من أجل تحقيق الهدف المحدد.

لقد شاع إستخدام نموذج البرمجة الخطية من قبل مدراء المشاريع والمنشآت الإنتاجية بهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية، من خلال تحقيق الآتي:

1- تعظيم (Maximize) مستوى الأرباح أو العوائد.

2- تقليل (Minimize) مستوى الخسائر أو التكاليف.





ويُستخدم نموذج البرمجة الخطية بشكل واسع لحل المشكلات التي تواجه منظمات الأعمال في مجالات كثيرة، منها على سبيل المثال لا الحصر: مجالات الإنتاج والتوزيع وإدارة الموارد البشرية والنقل وغيرها من الأنشطة الأخرى ، وفيما يلي بعضٍ من هذه المجالات:

1- تخطيط الاستثمارات.

2- تخطيط الإنتاج ورقابته.

3- الوصول إلى أفضل طريقة لاستغلال طاقة المكائن والآلات.

4- حل مشكلات النقل والتخصيص.

5- تنظيم العمليات الإنتاجية للحصول على أكبر ناتج ممكن.

6- حل نظرية المباريات.

7- تقليل نسب التلف في العمليات الإنتاجية إلى أقل حد ممكن.

8- تحديد المزيج الإنتاجي.

9- تحليل العمليات والأساليب بهدف تحسين مستوى الأرباح.

10- المفاضلة بين طرق الإنتاج المتاحة.

وبالرغم من كل المزايا التي يتصف بها أسلوب البرمجة الخطية، إلا إن هناك بعض الانتقادات التي توجه إلى هذا الأسلوب من الناحية التحليلية، نذكر منها ما يأتي:

1- لا يأخذ أسلوب البرمجة الخطية بنظر الاعتبار حالات عدم التأكد في الحياة الصناعية والتجارية، كونه يفترض إن جميع العلاقات بين المتغيرات معروفة ومؤكدة الحدوث.

2- يتطلب اسلوب البرمجة الخطية في التحليل كمية من المعلومات التي قد يصعب الحصول عليها في المنشآت الصغيرة والمتوسطة الحجم في الظروف الاعتيادية.

3- إن أغلب العلاقات بين المتغيرات في الحياة العملية هي علاقات ذات طبيعة غير خطية، مما يتعذر تطبيق اسلوب البرمجة الخطية كونه يتميز بصفة الخطية (Linearity).

4- عدم اهتمام هذا الاسلوب بالمتغيرات الوصفية (المتغيرات التي لا يمكن قياسها كمياً)، والتي قد يكون لها تأثير كبير في صنع القرارات.

5- يتعذر تطبيق هذا الاسلوب في حل المشكلات المعقدة والتي تحتوي على كم كبير من المتغيرات حلاً يدوياً، مما يتطلب استخدام برمجيات الحاسوب لحلها.

## 2-3: إفتراضات البرمجة الخطية:

لكي تكون نتائج تطبيق نموذج البرمجة الخطية صادقة وموثوق بها من الناحيتين العلمية والعملية، ينبغي توفر بعض الشروط الأساسية في صياغة (بناء) النموذج، ويطلق على هذا الشروط بافتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، ومن هذه الافتراضات ما يأتي:

### 1- الخطية Linearity:

يُقصد بهذا الافتراض أن تكون العلاقة بين متغيرات دالة الهدف وقيود النموذج ذات طبيعة خطية، أي إن حدوث أي تغيرات في قيمة أحد المتغيرات تؤدي إلى تغيرات ثابتة ومتناسية في قيمة المتغيرات الأخرى الداخلة في النموذج.

### 2- التأكد Certainty :

تفترض البرمجة الخطية بأن تكون معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف وقيود النموذج معروفة وثابتة أثناء فترة معالجة المشكلة المدروسة.

### 3- التناسبية Proportionality:

يقصد بهذا الافتراض بأن تكون مساهمة العوامل في دالة الهدف والكميات المستخدمة من الموارد في القيود متناسبة مع قيمة كل متغير من المتغيرات القرارية.

### 4- الإضافية Additivity:

يعني هذا الافتراض إن كل نشاط يتم إضافته يتحد مع مجموعة قيود النموذج، وهذا يعني عدم وجود تداخل بين الأنشطة المختلفة.





### 5- قابلية القسمة Divisibility:

يشير هذا الافتراض إلى إمكانية أن تأخذ بعض المتغيرات القرارية قيماً كسرية، وليس بالضرورة أن يتم التعبير عن جميع المتغيرات بإعداد صحيحة.

### 6- عدم السلبية Non- Negativity:

يقصد بهذا الافتراض بأن تكون قيم المتغيرات القرارية موجبة ($X_j \geq 0$). وهذا يعني إنه ليس من المعقول أن يتم إنتاج عدد سالب من الباصات أو الطائرات.

## 2-4: صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

إن من الاستخدامات الشائعة للبرمجة الخطية هو تحديد المزيج الإنتاجي والمزيج الغذائي، ولتحقيق هذا الغرض ينبغي توفر ثلاث عناصر أساسية لبناء نموذج البرمجة الخطية، هي:

1- تحديد هدف واضح للمشكلة المدروسة، والذي يعبر عنه بدالة الهدف (Object Function)، وهي عبارة عن دالة خطية بدلالة متغيرات القرار، وعادة يتم تعظيمها (Maximum) أو تدنيتها (Minimum).

2- تحديد قيود المشكلة، والتي هي عبارة عن متباينات (Inqualities) أو معادلات (Equations) خطية تمثل العوامل أو الظروف المحيطة بالمشكلة.

3- تحديد شرط عدم السلبية، ويعني هذا الشرط بأن تكون جميع متغيرات القرار الداخلة في النموذج موجبة (Positive).

وتأسيساً على ما تقدم، يمكن التعبير عن الخطوات أعلاه بصيغ رياضية، على النحو الآتي:

1) Max. or Min. $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Subject to:

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \,(\leq,=,\geq) b_i \quad , \; (i=1,2,\ldots,m)$

3) $X_j \geq 0 \quad ,(j=1,2,...,n)$

حيث إن:

$Z$ : تمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها أو تدنيتها.

$C_j$ : معامل متغير القرار ($X_j$) وتمثل الربح أو الكلفة.

$X_j$ : متغير القرار رقم (j) ويمثل نشاط معين.

$a_{ij}$ : كمية الموارد المحدودة من النوع (i) المخصصة لكل وحدة واحدة من النشاط رقم (j).

$b_i$: تمثل الموارد المحدودة من النوع (i).

وفيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية لتوضيح آلية صياغة نموذج البرمجة الخطية لنوعين من المشكلات هما (مشكلة المزيج الإنتاجي، ومشكلة المزيج الغذائي):

مثال (1):

تروم إحدى منظمات الأعمال المتخصصة بإنتاج الأجهزة الكهربائية باقتراح خطة لإنتاج نوعين من المنتجات (B , A)، وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاثة أنواع من المكائن هي [ الماكنة (1)، الماكنة (2)، الماكنة (3)].

يحتاج المنتج (A)، ستة (6) ساعات على الماكنة (1)، وثلاثة (3) ساعات على الماكنة (2)، وساعتان (2) على الماكنة (3)، في حين يحتاج المنتج (B)، أربعة (4) ساعات على الماكنة (1)، وخمسة (5) ساعات على الماكنة (2)، وثلاثة (3) ساعات على الماكنة (3)، علماً بأن عدد ساعات التشغيل المتاحة اسبوعياً كانت (60) ساعة للماكنة (1)، و (50) ساعة للماكنة (2)، و (70) ساعة للماكنة (3). وأن الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج (A) بلغ (80) دينار، والربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج (B) بلغ (95) دينار.





المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج عدد الوحدات من كلا المنتجين، بما يحقق للمنظمة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

قبل البدء بصياغة النموذج الرياضي للمشكلة، نقوم بتلخيص البيانات في الجدول الآتي:

| المكائن | المنتجات | | عدد ساعات التشغيل المتاحة إسبوعياً |
|---|---|---|---|
| | المنتج (A) | المنتج (B) | |
| الماكنة (1) | 6 | 4 | 60 |
| الماكنة (2) | 3 | 5 | 50 |
| الماكنة (3) | 2 | 3 | 70 |
| الربح المتوقع | 80 | 95 | |

يتضح من بيانات مشكلة المزيج الإنتاجي الواردة في الجدول السابق بوجود متغيرين قراريين يمثلان عدد الوحدات المنتجة من كلا المنتجين عليه نفرض أن:

$X_1$ : تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج (A).

$X_2$: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج (B).

$Z$: تمثل الأرباح الكلية المتوقعة.

ولصياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة، ينبغي تحديد الآتي:

**1– دالة الهدف (Objective Function):**

$$\text{Max. } Z = 80X_1 + 95X_2$$

حيث أن:

- $80\ X_1$ : الربح من المنتج (A).
- $95\ X_2$ : الربح من المنتج (B) .

2- قيود المشكلة (The Constraints):

أ - إن قيد الماكنة (1)، يكتب كالآتي:

$$6X_1 + 4X_2 \le 60$$

ب- إن قيد الماكنة (2)، يكتب كالآتي:

$$3X_1 + 5X_2 \le 50$$

جـ- إن قيد الماكنة (3)، يكتب كالآتي:

$$2X_1 + 3X_2 \le 70$$

3- شرط عدم السلبية (Non - Negative Condition):

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$$

عليه يكون نموذج البرمجة الخطية بصيغته النهائية، على النحو الآتي:

$$\text{Max.} \quad Z = 80\ X_1 + 95\ X_2$$

Subject to:

$$6X_1 + 4X_2 \le 60$$
$$3X_1 + 5X_2 \le 50$$
$$2X_1 + 3X_2 \le 70$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

**مثال (2):**

ترغب الشركة العامة لإنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاثة أنواع من العلائق الغذائية [العليقة (1)، العليقة (2)، العليقة (3)] وإن كل عليقة تتضمن على مزيج من مركبات [ البروتين، والألياف ].





تحتاج العليقة (1)، عشرون (20) كغم بروتين، وخمسون (50) كغم ألياف، وتحتاج العليقة (2)، خمسة وعشرون (25) كغم بروتين، وأربعون (40) كغم ألياف، في حين تحتاج العليقة (3)، ثلاثون (30) كغم بروتين، وستون (60) كغم ألياف. علماً بأن الاحتياجات الدنيا من المركبين كانت (180) كغم من البروتين، و (650) كغم من الألياف.

وإن تكاليف شراء المركبات الداخلة في كل عليقة كانت (100) دينار العليقة (1)، و (150) دينار للعليقة (2)، و (120) دينار للعليقة (3).

**المطلوب:**

صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج العلائق الغذائية الثلاثة، بما يجعل تكاليف إنتاج العلائق أقل ما يمكن.

**الحل:**

نقوم بتلخيص بيانات المشكلة في الجدول الآتي:

| المركبات | العلائق الغذائية | | | الاحتياجات الدنيا (كغم) |
|---|---|---|---|---|
| | العليقة (1) | العليقة (2) | العليقة (3) | |
| البروتين | 20 | 25 | 30 | 180 |
| الألياف | 50 | 40 | 60 | 650 |
| تكاليف الشراء | 100 | 150 | 120 | |

تشير بيانات مشكلة المزيج الغذائي الواردة في الجدول السابق عن وجود ثلاثة متغيرات قرارية تمثل الكميات المنتجة من العلائق الغذائية الثلاث، عليه نفرض إن:

$X_1$ : الكميات المنتجة من العليقة (1).

$X_2$ : الكميات المنتجة من العليقة (2).

$X_3$ : الكميات المنتجة من العليقة (3).

$Z$ : تمثل التكاليف الكلية المتوقعة.

ولصياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة، ينبغي تحديد الآتي:

1- دالة الهدف (Objective Function):

$$\text{Min. } Z = 100\,X_1 + 150\,X_2 + 120\,X_3$$

حيث أن:

$100\,X_1$ : تكاليف العليقة (1).

$150\,X_2$ : تكاليف العليقة (2).

$120\,X_3$ : تكاليف العليقة (3).

2- قيود المشكلة (The Constraints):

أ - إن قيد مركب البروتين، يكتب كالآتي:

$$20\,X_1 + 25\,X_2 + 30\,X_3 \ge 180$$

ب- إن قيد مركب الألياف، يكتب كالآتي:

$$50\,X_1 + 40\,X_2 + 60\,X_3 \ge 650$$

3- شرط عدم السلبية (Non - Negative Condition):

$$X_1 \ge 0 \;,\; X_2 \ge 0 \;,\; X_3 \ge 0$$

عليه تكون الصيغة النهائية لنموذج البرمجة الخطية، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 100\,X_1 + 150\,X_2 + 120\,X_3$$

Subject to:

$$20X_1 + 25X_2 + 30\,X_3 \ge 180$$
$$50\,X_1 + 40\,X_2 + 60\,X_3 \ge 650$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$$





## 2-5: الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية:

في ضوء ما تقدم، يمكن وضع صيغة عامة لنموذج البرمجة الخطية تتضمن على دالة الهدف (Z) في حالتي التعظيم (Maximize) والتقليل (Minimize)، وعلى (n) من متغيرات القرار ($X_j$)، و (m) من القيود (Constraints) معززة بالعلامات الرياضية التي من الممكن أن تأخذها وهي (≥، =، ≤)، ويمكن التعبير عن الصيغة العامة للنموذج الرياضي للبرمجة الخطية، على النحو الآتي:

دالة الهدف: $\text{Max. or Min. } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$

Subject to:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots + a_{1n}X_n\ (\le, =, \ge)\ b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots + a_{2n}X_n\ (\le, =, \ge)\ b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n\ (\le, =, \ge)\ b_m \end{array}\right\} \text{القيود}$$

شرط عدم السلبية : $X_1 , X_2 , \dots , X_n \ge 0$

إن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية السابقة، يمكن التعبير عنها بشكل أكثر اختصاراً باستخدام المجموع، وعلى النحو الآتي:

دالة الهدف : $\text{Max. or Min. } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \longleftarrow$

Sub. to:

القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\ (\le,=,\ge) b_i \;,\; (i=1,2,\dots,m)$$

شرط عدم السلبية: $\longleftarrow X_j \ge 0 \;,\; (j=1,2,\dots,n)$

إن الرموز [$b_i$, $a_{ij}$, $X_j$, $C_j$, Z] الواردة في الصيغة السابقة، تأخذ نفس التعريفات الواردة ضمن الفقرة (2-4) الآنفة الذكر الخاصة بصياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية.

إن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية السابق، يأخذ نوعين من الصيغ عند التطبيق، يمكن توضيحهما على النحو الآتي:

**2-5-1: الصيغة القانونية Canonical Form:**

يمكن توضيح الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية في حالتي التعظيم (Maximize)، والتقليل (Minimize)، على النحو التالي:

**أولاً: حالة التعظيم (Maximize):**

إن الصيغة القانونية (Canonical Form) لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم، تأخذ الشكل الآتي:

$$\underline{\text{Max.}}\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Sub. to:

$$\sum a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

وإن خصائص الصيغة القانونية في هذه الحالة هي:

1- إن دالة الهدف (Z) تكون من نوع (Maximum).

2- إن علامات جميع قيود النموذج تكون من نوع أقل أو يساوي (≤).

3- إن جميع متغيرات القرار تكون مقيدة بالإشارة، أي إن ($X_j \ge 0$).

**ثانياً: حالة التقليل (Minimum):**

إن الصيغة القانونية (Canonical Form) لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل، تأخذ الشكل الآتي:





$$\underline{\text{Min.}}\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Sub. to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge b_i \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

وإن خصائص الصيغة القانونية في حالة التقليل هي:

1- إن دالة الهدف (Z) تكون من نوع (Minimum).

2- إن علامات جميع قيود النموذج تكون من نوع أكبر أو تساوي (≥).

3- إن جميع متغيرات القرار تكون مقيدة بالإشارة، أي إن ($X_j \ge 0$).

**2-5-2: الصيغة القياسية Standard Form:**

تُعد الصيغة القياسية أو المعيارية (Standard Form) أفضل من الصيغة السابقة من الناحية التطبيقية، كونها تعتمد في حل مسائل البرمجة الخطية بموجب إحدى طرق الحل الشائعة، ويمكن الحصول على الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية بعد إجراء بعض التحويرات الرياضية حسب نوع المشكلة، وفيما يلي الوصف العام للحصول على الصيغة القياسية (الصيغة المستقرة) في حالتي التعظيم (Maximize)، والتقليل (Minimize)، وكالآتي:

**أولا: حالة التعظيم (Maximize):**

يمكن الحصول على الصيغة القياسية (Standard Form) لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم، وفقا للخطوات الآتية:

1- إضافة المتغيرات الراكدة (Slack Variables) إلى قيود الصيغة القانونية، لغرض تحويل المتباينات إلى معادلات.

2- إضافة المتغيرات الراكدة ($S_i$) أيضا إلى دالة الهدف (Z) مسبوقة (باصفار).

3- تضمين شرط عدم السلبية، قيد المتغيرات الراكدة ($S_i$) باعتبارها تمثل مستلزمات الإنتاج غير المستغلة، إلى جانب متغيرات القرار ($X_j$).

- المواد الخام
- القوى العاملة

وفي ضوء ما تقدم، تكون الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم (Maximize)، على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0\sum_{i=1}^{m} S_i$$

Sub. to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + S_i = b_i \quad , \quad (i=1,2,\dots,m)$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad S_i \geq 0 \quad , \quad (j=1,2,\dots,n)$$

مثال (3):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 20X_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \leq 60$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب:

أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية السابق.

الحل:

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 20X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , \quad S_1, S_2 \geq 0$$





ثانياً: حالة التقليل (Minimize):

يمكن الحصول على الصيغة القياسية (Standard Form) لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل، بإتباع الخطوات الآتية:

1- طرح المتغيرات الراكدة ($S_i$) من قيود الصيغة القانونية، لغرض تحويل المتباينات إلى معادلات.

2- إضافة المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variables) إلى قيود المشكلة، لمعالجة الإشارات السالبة للمتغيرات الراكدة ($S_i$)، ليتماشى مع شرط عدم السلبية ($Si \geq 0$).

3- طرح المتغيرات الراكدة ($S_i$) أيضاً من دالة الهدف ($Z$)، مسبوقة (بأصفار)، مع إضافة المتغيرات الاصطناعية ($R_i$) للدالة، مسبوقة بكميات افتراضية ($M$)، وغالباً ما تكون الكمية ($M$) كبيرة جداً ومن مضاعفات العدد (10) عشرة، أي تكون (10، 100، 1000، ... الخ).

4- تضمين شرط عدم السلبية، قيد المتغيرات الراكدة ($S_i$)، وقيد المتغيرات الاصطناعية ($R_i$)، إلى جانب متغيرات القرار ($X_j$).

وفي ضوء ما تقدم، يمكن كتابة الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل (Minimize)، على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j - 0\sum_{i=1}^{m} S_i + M\sum_{i=1}^{m} R_i$$

Sub. to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - S_i + R_i = b_i \quad , \quad (i=1,2,\dots,m)$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad S_i \geq 0 \quad , \quad R_i \geq 0 \quad , \quad (j=1,2,\dots,n)$$

M : Is very Large.

حيث أن:

$S_i$ : تمثل المتغير الراكد (Slack Variable) رقم (i).

$R_i$: تمثل المتغير الاصطناعي (Artificial Variable) رقم (i).

M: تمثل معامل المتغير الاصطناعي وهو قيمة كبيرة جداً.

مثال (4):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Min.} \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sub. to:

$$6X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب:

أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية السابق.

الحل:

$$\text{Min.} \quad Z = 2X_1 + 3X_2 \underline{- 0 S_1} \underline{- 0S_2} + \underline{MR_1} + MR_2$$

Sub. to:

$$6X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , \quad S_1, S_2 \geq 0 \quad , \quad R_1, R_2 \geq 0$$

M : Is very Large

ملاحظة (1):

عندما تحتوي قيود الصيغة القانونية (Canonical Form) على علامات رياضية مختلطة (≥، = ، ≤) بغض النظر عن نوع المشكلة، سواء كانت مشكلة تعظيم (Maximize) أو مشكلة تقليل (Minimize)، ففي هذه الحالة يمكن كتابة الصيغة القياسية (Standard Form) وفق ما هو موضح بالأمثلة الآتية:





مثال (5):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Max.} \quad Z = 3X_1 + 6X_2$$

Sub. to:

subject to

قيود

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$2X_1 \quad = 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

شرط عدم السلبية

الحل:

$$\text{Max.} \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + \underline{0 S_1} \underline{- MR_1}$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 10$$
$$2X_1 \quad + R_1 = 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , \quad S_1, R_1 \geq 0$$

مثال (6):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Min.} \quad Z = 5X_1 + 10X_2$$

Sub. to :

$$3X_1 + 6X_2 \geq 30$$
$$4X_2 = 10$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

$$\text{Min. } Z = 5X_1 + 10X_2 \underline{-0S_1} + \underline{MR_1} + \underline{MR_2}$$

Sub. to:

$$3X_1 + 6X_2 - S_1 + R_1 = 30$$

$$4X_2 \quad + R_2 = 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , \quad S_1, R_1, R_2 \geq 0$$

ملاحظة (2):

يتضح من الأمثلة السابقة المتعلقة بتحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بأن الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية تتصف بالخصائص الآتية:

1- إن دالة الهدف (Z) تكون من نوع (Maximize) أو من نوع (Minimize).

2- إن جميع قيود المشكلة بغض النظر عن نوعها عبارة عن معادلات، باستثناء قيد عدم السلبية.

3- إن جميع متغيرات القرار ($X_j$) والمتغيرات الراكدة ($S_i$) والمتغيرات الاصطناعية ($R_i$) تكون مقيدة بالإشارة، أي إن ($X_j \geq 0$)، ($S_i \geq 0$) ، ($R_i \geq 0$).

ملاحظة (3):

بعد أن تعرفنا على النواحي التطبيقية لاستخدام المتغيرات الراكدة ($S_i$) والمتغيرات ($R_i$) في قيود نموذج البرمجة الخطية ودالة الهدف (Z) عند تحويل الصيغة القانونية (Canonical Form) للنموذج، إلى الصيغة القياسية (Standard Form) التي تمثل الحالة المستقرة للنموذج، ينبغي وضع قاعدة عامة حول آلية استخدام المتغيرات المذكورة عند عملية التحويل، حسب نوع المشكلة ونوع العلامات الرياضية للقيود وهي ($\leq$ ، = ،$\geq$).





والجدول التالي يوضح القواعد الأساسية لاستخدام المتغيرات الراكدة ($S_i$) والمتغيرات الاصطناعية ($R_i$)، عند تحويل الصيغة القانونية للنموذج إلى الصيغة القياسية.

| نوع العلامة الرياضية للقيود | آلية استخدام المتغيرات الراكدة ($S_i$) والمتغيرات الاصطناعية ($R_i$) في قيود النموذج | آلية استخدام المتغيرات (S) و (R) في دالة الهدف (Z) | |
|---|---|---|---|
| | | Max. | Min. |
| أقل أو يساوي ($\leq$) | $+S_i$ | $+0S_i$ | $+0S_i$ |
| أكبر أو يساوي ($\geq$) | $-S_i + R_i$ | $-0S_i - MR_i$ | $-0S_i + MR_i$ |
| يساوي (=) | $+R_i$ | $-MR_i$ | $+MR_i$ |

### 2-6: طرق حل مشكلات البرمجة الخطية:

هناك طرق عدة للتوصل إلى حل مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية، إذ يتوقف استخدام أي من هذه الطرق على طبيعة المشكلة وحجمها، ومن هذه الطرق ما يأتي:

1- الطريقة البيانية Graphical Method.

2- الطريقة الجبرية Algebraic Method.

3- الطريقة المبسطة Simplex Method.

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل طريقة من الطرق السابقة، حيث سيتم تخصيص هذا الفصل لشرح الطريقتين الأولى والثانية، في حين سيؤجل دراسة الطريقة الثالثة المتمثلة بالطريقة المبسطة إلى الفصل الثالث من هذا الكتاب.

## 2-6-1: الطريقة البيانية The Graphical Method:

تعد الطريقة البيانية من أسهل طرق حل مشكلات البرمجة الخطية، وتصلح هذه الطريقة للوصول إلى الحل الأمثل للنماذج التي تحتوي على متغيرين قراريين فقط هما ($X_2$,$X_1$).

وللوصول إلى حل مشكلات البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة، نتبع الخطوات الآتية:

1- كتابة قيود النموذج على هيئة معادلات بدلاً من المتباينات.

2- رسم القيود على هيئة خطوط مستقيمة.

3- تحديد زوايا منطقة الحل الممكن (Feasible Region Solution).

4- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف (Z).

5- اختيار نقطة الحل الأمثل (Optimal Solution Point)، من بين نقاط زوايا منطقة الحل الممكن.

**مثال (7):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، باستخدام الطريقة البيانية:

Max. $Z = 5X_1 + 6X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \le 60$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

**الحل:**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، كالآتي:

القيد الأول : 1) $2X_1 + 3X_2 = 30$ , (يهمل) $2X_1 + 3X_2 < 30$





$\therefore\ 2X_1 + 3X_2 = 30$ $\rightarrow$

النقطة الأولى $\text{If } X_1 = 0 \Rightarrow \therefore 3X_2 = 30 \Rightarrow X_2 = 10 \Rightarrow \therefore P_1\ (0, 10)$

النقطة الثانية $\text{If } X_2 = 0 \Rightarrow \therefore 2X_1 = 30 \Rightarrow X_1 = 15 \Rightarrow \therefore P_2\ (15, 0)$

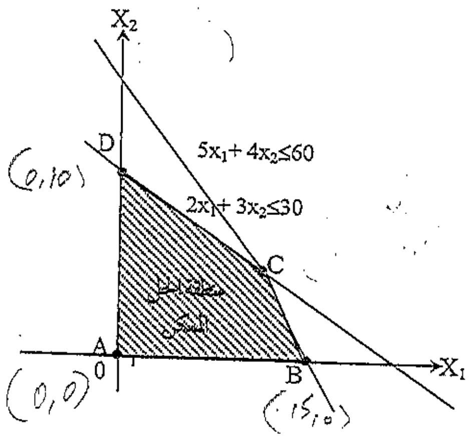
القيد الثاني: 2) $5X_1 + 4X_2 = 60$ , (يهمل) $5X_1 + 4X_2 < 60$

$\therefore\ 5X_1 + 4X_2 = 60$

$\text{If } X_1 = 0 \Rightarrow \therefore 4X_2 = 60 \Rightarrow X_2 = 15 \Rightarrow \therefore P_1\ (0, 15)$

$\text{If } X_2 = 0 \Rightarrow \therefore 5X_1 = 60 \Rightarrow X_1 = 12 \Rightarrow \therefore P_2\ (12, 0)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (D,C,B,A)، إذ أن:

$A = (0,0)$ , $B = (12,0)$ , $D = (0,10)$

ولإيجاد إحداثيات النقطة (C) نقوم بتقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$(2X_1 + 3X_2 = 30)$ ........ (1) . تضرب بـ(5)

$(5X_1 + 4X_2 = 60)$ ........ (2) . تضرب بـ (2)

$10X_1 + 15X_2 = 150$ ....... (3)

$\mp 10X_1 \mp 8X_2 = \mp 120$ ....... (4)

بالطرح

$7X_2 = 30$

$\therefore \boxed{X_2 = 4.3}$

نقوم بتعويض قيمة $(X_2 = 4.3)$ في المعادلة رقم (1) نحصل على:

$2X_1 + 3(4.3) = 30$

$2X_1 + 12.9 = 30$

$2X_1 = 17.1$

$\therefore \boxed{X_1 = 8.6}$

$\therefore C = (8.6, 4.3)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 5X_1 + 6X_2$ | Max. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (0,0) | 0 | 0 | 0 | |
| B(12,0) | 12 | 0 | 60 | |
| C (8.6, 4.3) | 8.6 | 4.3 | 68.8 | 68.8* |
| D (0, 10) | 0 | 10 | 60 | |

عليه يكون الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية، على النحو الآتي:

$[X_1 = 8.6 \quad , \quad X_2 = 4.3 \quad , \quad Z^* = 68.8]$.





مثال (8):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

Max. $Z = 2X_1 + 3X_2$

Sub. to:

1) $X_1 + X_2 \geq 10$

2) $X_1 \leq 8$

3) $X_2 \leq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، كالآتي:

القيد الأول :

1) $\therefore X_1 + X_2 = 10$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 10 \Rightarrow \therefore P_1(0, 10)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2(10, 0)$

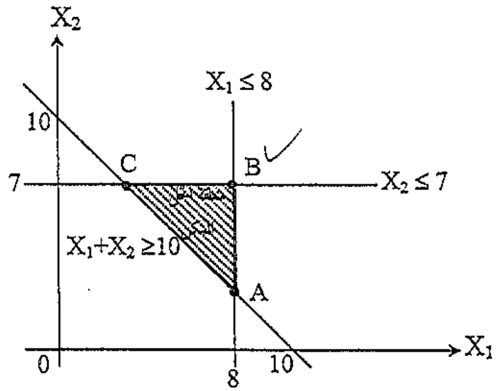
القيد الثاني:

2) $\therefore X_1 = 8 \Rightarrow \therefore P(8, 0)$

القيد الثالث:

3) $\therefore X_2 = 7 \Rightarrow \therefore P(0, 7)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (C,B,A)، إذ إن:

$B = (8, 7)$

ولإيجاد إحداثيات النقاط (C,A)، نتبع ما يأتي:

أ – نحصل على النقطة (A) من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$X_1 + X_2 = 10$ .............(1)

$X_1 \quad = 8$ .............(2)

نعوض قيمة ($X_1 = 8$) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:

$8 + X_2 = 10$

$\therefore \boxed{X_2 = 2}$

A $\therefore A = (8,2)$

ب– نحصل على النقطة (C) من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي أن:

$X_1 + X_2 = 10$ .............(1)

$X_2 = 7$ .............(2)

نعوض قيمة ($X_2 = 7$) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:





$X_1 + 7 = 10$

$\therefore \boxed{X_1 = 3}$

C $\therefore C = (3,7)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 2X_1 + 3X_2$ | Max. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (8,2) | 8 | 2 | 22 | |
| B(8,7) | 8 | 7 | (2X8)+(3X7) 37 | 37* |
| C (3,7) | 3 | 7 | 27 | |

عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، على النحو الآتي:

$[\ X_1 = 8 \quad , \quad X_2 = 7 \quad , \quad Z^* = 37\ ].$

مثال (9):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 4X_2 \le 20$$
$$X_1 \le 5$$
$$X_2 \le 4$$
$$X_1, X_2 \le 0$$

الحل:

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول: 1) $\therefore\ 2X_1 + 4X_2 = 20$

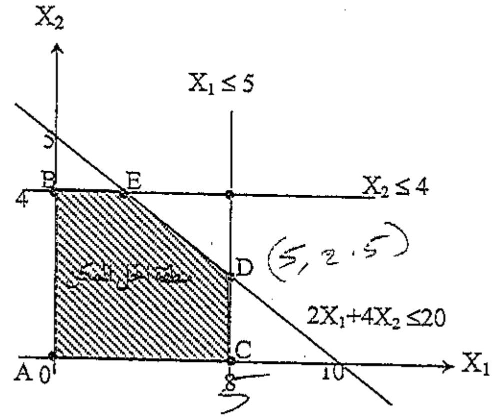
If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 5 \Rightarrow \therefore P_1\,(0, 5)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2\,(10, 0)$

القيد الثاني: 2) $\therefore X_1 = 5 \Rightarrow \therefore P(5, 0)$

القيد الثالث: 3) $\therefore X_2 = 4 \Rightarrow \therefore P(0, 4)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (E,D,C,B,A)، إذ أن:

$A = (0,0)$ , $B = (0,4)$ , $C = (5,0)$

ولإيجاد إحداثيات النقاط (E,D)، نتبع الآتي:

أ – نحصل على النقطة (D) من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$2X_1 + 4X_2 = 20$ ............ (1)

$X_1 \quad = 5$ ............(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_1 = 5$) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:

D → (5, ?)

2.5





$2(5) + 4X_2 = 20$

$\therefore 4X_2 = 10$

$\therefore \boxed{X_2 = 2.5}$

$\therefore D = (5, 2.5)$

ب- نحصل على النقطة (E) من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي أن:

$2X_1 + 4X_2 = 20$ ............ (1)

$X_2 = 4$ ............(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_2 = 4$) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) ينتج:

$2X_1 + 4(4) = 20$ E=(?, 4)

$\therefore 2X_1 = 4$ 2

$\therefore \boxed{X_1 = 2}$

$\therefore E = (2,4)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 3X_1 + 2X_2$ | Max. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (0,0) | 0 | 0 | 0 | |
| B(0,4) | 0 | 4 | 8 | |
| C (5,0) | 5 | 0 | 15 | |
| D (5,2.5) | 5 | 2.5 | 20 | 20* |
| E (2, 4) | 2 | 4 | 14 | |

عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، على النحو الآتي:

[ $X_1 = 5$ , $X_2 = 2.5$ , $Z^* = 20$ ].

(تعوض في معادلة الهدف)

**مثال (10):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

$$Max.\ Z = 30X_1 + 10X_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 4X_2 \geq 20$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$X_2 \geq 7$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

**الحل:**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول :

1) $\therefore\ 2X_1 + 4X_2 = 20$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 5 \Rightarrow \therefore P_1\,(0, 5)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2\,(10, 0)$

القيد الثاني:

2) $\therefore\ 4X_1 + 2X_2 = 20$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 10 \Rightarrow \therefore P_1\,(0, 10)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 5 \Rightarrow \therefore P_2\,(5, 0)$

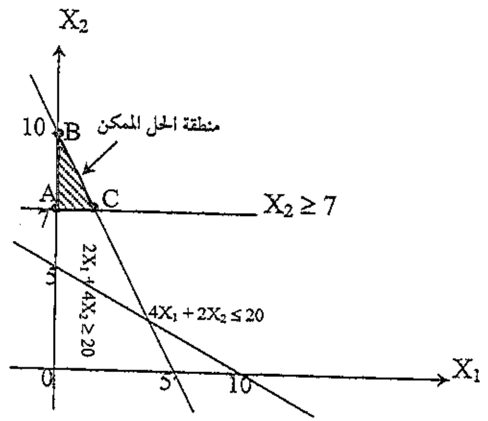
القيد الثالث:

3) $\therefore X_2 = 7 \Rightarrow \therefore P(0, 7)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:








من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (C,B,A)، إذ إن:

$A = (0,7) \quad , \quad B = (0, 10)$

ولإيجاد إحداثيات النقطة (C)، يتم ذلك من خلال تقاطع القيدين (الثاني والثالث)، أي أن:

$4X_1 + 2X_2 = 20$ ............. (1)

$X_2 = 7$ .............(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_2 = 7$) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:

$$4X_1 + 2(7) = 20$$
$$4X_1 = 6$$
$$\therefore \boxed{X_1 = 1.5}$$
$$\therefore C = (1.5, 7)$$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 30X_1 + 10X_2$ | Max. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (0,7) | 0 | 7 | 70 | |
| B(0,10) | 0 | 10 | 100 | |
| C (105.7) | 1.5 | 7 | 115 | 115* |

عليه يكون الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية، على النحو الآتي:

$[X_1 = 1.5 \quad , \quad X_2 = 7 \quad , \quad Z^* = 115 \quad ].$

**مثال (11):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

Min. $Z = 5X_1 + 15X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 2X_2 \le 20$$
$$2X_1 + 5X_2 \ge 30$$
$$X_2 \le 9$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

**الحل:**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول:

1) $\therefore \; 2X_1 + 2X_2 = 20$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 10 \Rightarrow \therefore P_1(0, 10)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2(10, 0)$

القيد الثاني:

2) $\therefore 2X_1 + 5X_2 = 30$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 6 \Rightarrow \therefore P_1(0, 6)$



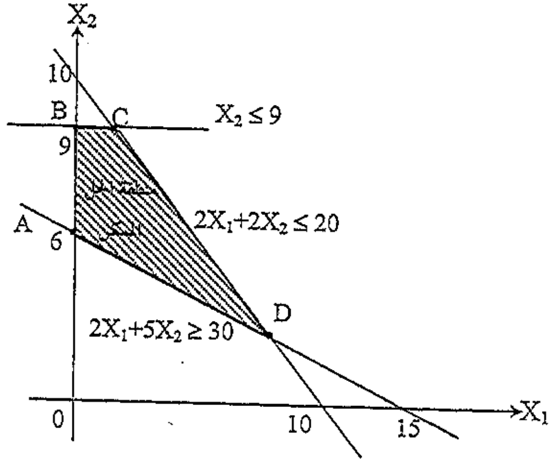


If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 15 \Rightarrow \therefore P_2(15, 0)$

القيد الثالث:

3) $\therefore X_2 = 9 \Rightarrow \therefore P(0, 9)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (D,C,B,A)، إذ أن:

$A = (0,6) \quad , \quad B = (0,9)$

ولإيجاد إحداثيات النقاط (D,C)، نتبع الآتي:

أ - نحصل على النقطة (C) من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي أن:

$2X_1 + 2X_2 = 20$ ............(1)

$X_2 = 9$ ............(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_2 = 9$) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) ينتج:

$2X_1 + 2(9) = 20$

$\therefore 2X_1 = 2$

$\therefore \boxed{X_1 = 1}$

$\therefore C = (1,9)$

ب) نحصل على النقطة (D) من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$2X_1 + 2X_2 = 20$ .......... (1)

$\mp 2X_1 \mp 5X_2 = \mp 30$ ......... (2)

بالطرح

$-3X_2 = -10$

$\therefore X_2 = 3.3$ ..........(3)

نعوض قيمة ($X_2 = 3.3$) في المعادلة (1)، نحصل على:

$2X_1 + 2(3.3) = 20$

$\therefore 2X_1 = 13.4$

$\therefore X_1 = 6.7$

$\therefore D = (6.7, 3.3)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 5X_1 + 15X_2$ | Min. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (0,6) | 0 | 6 | 90 | |
| B(0,9) | 0 | 9 | 135 | |
| C (1,9) | 1 | 9 | 140 | |
| D (6.7, 3.3) | 6.7 | 3.3 | 83* | 83* |

عليه يكون الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية، على النحو الآتي:

[ $X_1 = 6.7$ , $X_2 = 3.3$ , $Z^* = 83$ ].





**مثال (12):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

Min. $Z = 2X_1 + X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 3X_2 \leq 18$

$X_1 \geq 3$

$X_2 \geq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

**الحل:**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول:

1) $\therefore 2X_1 + 3X_2 = 18$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 6 \Rightarrow \therefore P_1\ (0, 6)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 9 \Rightarrow \therefore P_2\ (9, 0)$

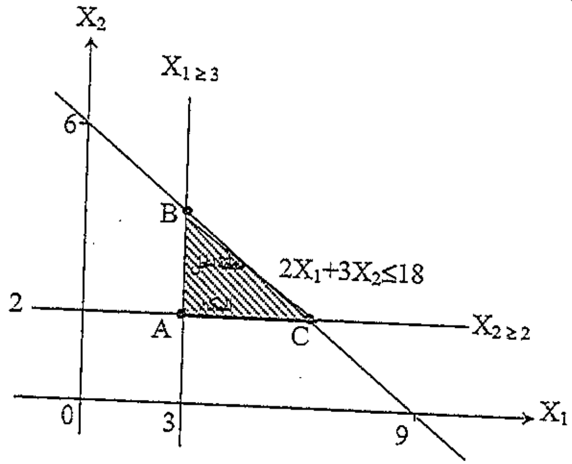
القيد الثاني:

2) $\therefore X_1 = 3 \Rightarrow \therefore P\ (3,0)$

القيد الثالث:

3) $\therefore X_2 = 2 \Rightarrow \therefore P(0, 2)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (C,B,A)، إذ أن:

$A = (3,2)$

ولإيجاد إحداثيات النقاط (C,B)، نتبع الآتي:

أ – نحصل على النقطة (B) من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$2X_1 + 3X_2 = 18$ ............(1)

$X_1 = 3$ ...........(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_1$=3) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) ينتج:

$2(3) + 3X_2 = 18$

$\therefore\ 3X_2 = 12$

$\therefore\ X_2 = 4$

$\therefore\ B = (3,4)$

ب– نحصل على النقطة (C) من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي أن:





$2X_1 + 3X_2 = 18$ ............(1)

$X_2 = 2$ ...........(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_2$=2) الواردة بالعلاقة (2) في المعادلة (1)، ينتج

$2X_1 + 3(2) = 18$

$\therefore\ 2X_1 = 12$

$\therefore\ \boxed{X_1 = 6}$

$\therefore\ C = (6,2)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 2X_1 + X_2$ | Min. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (3,2) | 3 | 2 | 8 | 8* |
| B(3,4) | 3 | 4 | 10 | |
| C (6,2) | 6 | 2 | 14 | |

عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، على النحو الآتي:

[ $X_1 = 3$ , $X_2 = 2$ , $Z^* = 8$ ].

مثال (13):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

Min. $Z = 3X_1 + 8X_2$

Sub. to:

$3X_1 + 5X_2 \geq 30$

$X_1 \leq 7$

$4X_1 + 3X_2 \leq 36$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول: 1) $\therefore 3X_1 + 5X_2 = 30$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 6 \Rightarrow \therefore P_1(0, 6)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2(10, 0)$

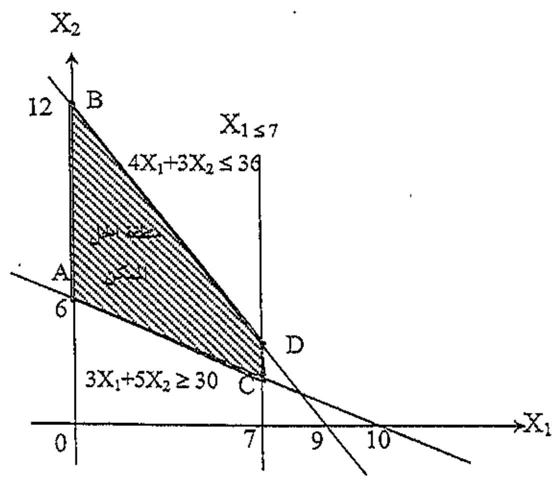
القيد الثاني: 2) $\therefore X_1 = 7 \Rightarrow \therefore P(7,0)$

القيد الثالث: 3) $\therefore 4X_1 + 3X_2 = 36$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 12 \Rightarrow \therefore P_1(0, 12)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 9 \Rightarrow \therefore P_2(9, 0)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني، الآتي:








من الشكل السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (D,C,B,A)، إذ أن:

$A = (0, 6) \quad , \quad B = (0, 12)$

ولإيجاد إحداثيات النقاط (D,C)، نتبع الآتي:

أ – نحصل على النقطة (C) من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$3X_1 + 5X_2 = 30$ ............. (1)

$X_1 = 7$ .............(2)

نقوم بتعويض القيمة ($X_1$=7) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:

$3(7) + 5X_2 = 30$

$\therefore 5X_2 = 9$

$\therefore \boxed{X_2 = 1.8}$

$\therefore C = (7, 1.8)$

ب – نحصل على النقطة (D) من تقاطع القيدين (الثاني والثالث)، أي أن:

$X_1 = 7$ .......... (1)

$4X_1 + 3X_2 = 36$ ...........(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_1$=7) الواردة بالعلاقة (1) في المعادلة (2)، ينتج:

$4(7) + 3X_2 = 36$

$\therefore 3X_2 = 8$

$\therefore \boxed{X_2 = 2.7}$

$\therefore D = (7, 2.7)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z=3X_1+8X_2$ | Min. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (0,6) | 0 | 6 | 48 | |
| B(0,12) | 0 | 12 | 96 | |
| C (7,1.8) | 7 | 1.8 | 35.4 | 35.4* |
| D ( 7, 2.7) | 7 | 2.7 | 42.6 | |

عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، على النحو الآتي:

$[\, X_1 = 7 \quad , \quad X_2 = 1.8 \quad , \quad Z^* = 35.4 \,]$.

مثال (14):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

$\text{Min. } Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. to:

$$4X_1 + 6X_2 \geq 12$$
$$8X_1 + 4X_2 \geq 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول:

1) $\therefore 4X_1 + 6X_2 = 12$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 2 \Rightarrow \therefore P_1(0, 2)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 3 \Rightarrow \therefore P_2(3, 0)$

القيد الثاني:

2) $\therefore 8X_1 + 4X_2 = 16$

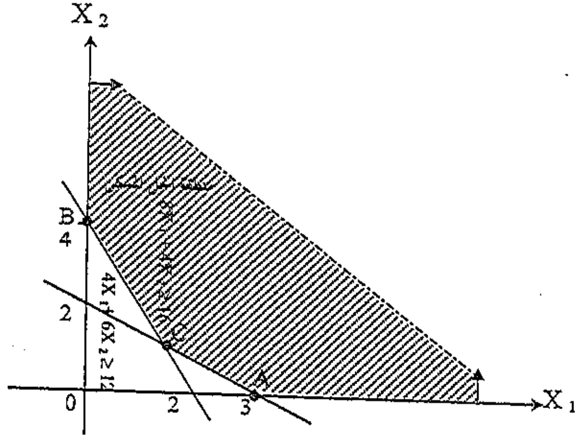
If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 4 \Rightarrow \therefore P_1(0, 4)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 2 \Rightarrow \therefore P_2(2, 0)$





عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




يتضح، من الشكل البياني السابق، بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (C,B,A)، إذ أن:

$A = (3,0) \quad , \quad B = (0,4)$

ولإيجاد احداثيات النقطة (C)، يتم ذلك من خلال تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$2 * (4X_1 + 6X_2 = 12)$ ............(1)

$8X_1 + 4X_2 = 16$ ............(2)

$8X_1 + 12X_2 = 24$

$\mp 8X_1 \mp 4X_2 = \mp 16$

بالطرح

$\therefore 8X_2 = 8$

$\therefore \boxed{X_2 = 1}$ ............. (3)

نعوض قيمة ($X_2 = 1$) في إحدى المعادلتين، ولتكن المعادلة (1) نحصل على:

$4X_1 + 6(1) = 12$

$\therefore 4X_1 = 6$

$\therefore \boxed{X_1 = 1.5}$

$\therefore C = (1.5, 1)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = 3X_1 + 2X_2$ | Min. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (0,6) | 3 | 0 | 9 | |
| B(0,12) | 0 | 4 | 8 | |
| C (7,1.8) | 1.5 | 1 | 6.5 | 6.5* |

عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، على النحو الآتي:

[ $X_1 = 1.5$ , $X_2 = 1$ , $Z^* = 6.5$].

**مثال (15):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانيا:

Min. $Z = X_1 + 2X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 3X_2 \geq 18$

$X_1 \geq 2$

$X_2 \geq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$





**الحل:**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات، على النحو الآتي:

القيد الأول: 1) $\therefore 2X_1 + 3X_2 = 18$

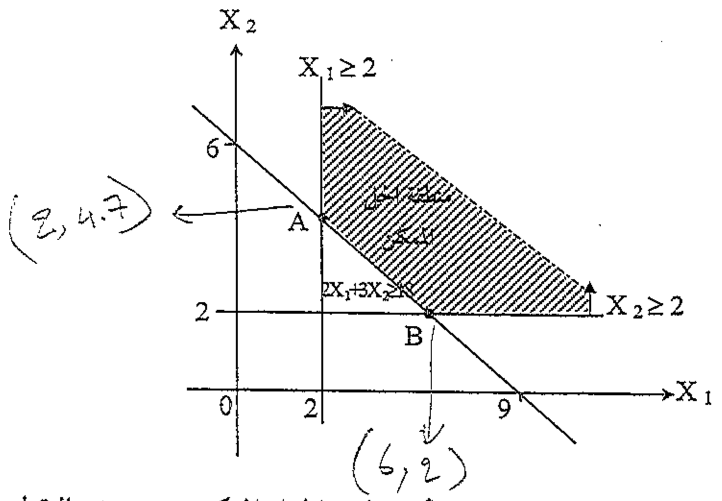
If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 6 \Rightarrow \therefore P_1(0, 6)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 9 \Rightarrow \therefore P_2(9, 0)$

القيد الثاني: 2) $\therefore X_1 = 2 \Rightarrow \therefore P(2,0)$

القيد الثالث: 3) $\therefore X_2 = 2 \Rightarrow \therefore P(0,2)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:




من الشكل البياني السابق، يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقطتين (B,A)، إذ يمكن إيجاد إحداثيات كل منهما كالآتي:

أ - نحصل على النقطة (A) من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي أن:

$2X_1 + 3X_2 = 18$ ..........(1)

$X_1 = 2$ ............(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_1$=2) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:



$X_2$ = ??

$2(2) + 3X_2 = 18$

$\therefore 3X_2 = 14$

$\therefore \boxed{X_2 = 4.7}$

$\therefore A = (2, 4.7)$

ب- نحصل على النقطة (B) من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي أن:

$2X_1 + 3X_2 = 18$ ............(1)

$X_2 = 2$ ...........(2)

نقوم بتعويض قيمة ($X_2$=2) الواردة بالعلاقة (2)، في المعادلة (1) نحصل على:

$2X_1 + 3(2) = 18$

$\therefore 2X_1 = 12$

$\therefore \boxed{X_1 = 6}$

$\therefore B = (6,2)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

| نقاط الحدود | $X_1$ | $X_2$ | $Z = X_1+2X_2$ | Min. Z |
|---|---|---|---|---|
| A (2,4.7) | 2 | 4.7 | 11.4 | |
| B(6,2) | 6 | 2 | 10 | 10* |

عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، على النحو الآتي:

$[X_1 = 6 \quad , \quad X_2 = 2 \quad , \quad Z^* = 10]$.

تعويض في المعادلة
دالة الهدف





**2-6-2: بعض الحالات الخاصة في الرسم البياني:**

إن مشكلات البرمجة الخطية التي تم دراستها وحلها في الأمثلة السابقة باستخدام الطريقة البيانية، اتصفت بأن لها حل أمثل وحيد (Unique Optimal Solution)، إلا إنه تصادفنا في الحياة العملية بعض الحالات النادرة لمشكلات أخرى للبرمجة الخطية ينبغي مراعاتها عند الحل.

وفيما يلي توضيح لبعض الحالات الخاصة بالأمثلة التطبيقية، على النحو الآتي:

**1- الحلول غير المحدودة The Unbounded Solutions:**

تعد مشكلات البرمجة الخطية غير المحدودة نادرة الحدوث، نظراً لكون أغلب المشكلات محدودة الحلول (لها حل أمثل وحيد) في الحياة العملية، والمثال التالي يوضح ذلك.

**مثال (16):**

لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

Max. $Z = 10X_1 + 15X_2$

Sub. to:

$X_1 + 2X_2 \geq 6$

$X_1 \quad \geq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

لغرض التحقق من الحالة المذكورة ينبغي رسم قيود المشكلة السابقة على هيئة خطوط مستقيمة، على النحو الآتي:

القيد الأول:

1) $\therefore X_1 + 2X_2 = 6$

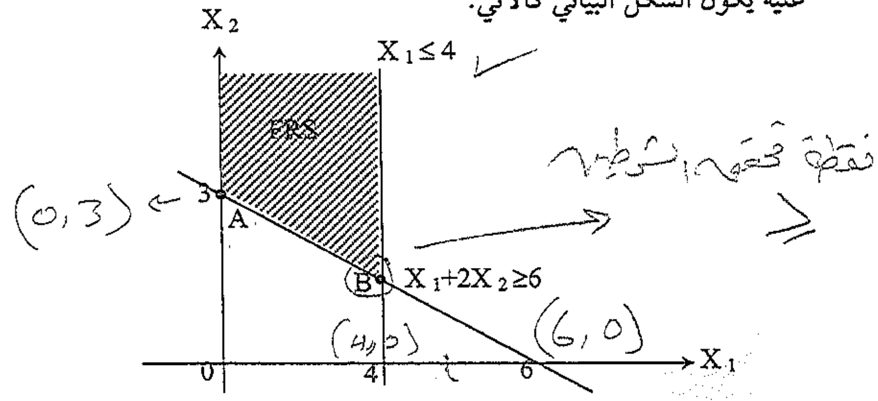
$x_1 \; x_2$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 3 \Rightarrow \therefore P_1(0, 3)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 6 \Rightarrow \therefore P_2(6, 0)$

القيد الثاني: 2) $\therefore X_1 = 4 \Rightarrow \therefore P(4,0)$

عليه يكون الشكل البياني كالآتي:




يتضح من الشكل البياني السابق إن منطقة الحل الممكن (FRS) تتمثل بالمنطقة المظللة وهي منطقة مفتوحة، إذ كلما نبتعد عن نقطة الأصل سنحصل على حل أعلى من سابقة مما سيؤدي إلى الحصول على حل غير محدود.

2- الحلول المنحلة (المفككة) The Degenerate Solutions:

يُعد حل مشكلة البرمجة الخطية حلاً منحلاً أو مفككاً إذا كانت قيمة أحد المتغيرات الأساسية أو أغلبها مساوية (للصفر)، وإن عدد المتغيرات الأساسية (Basic Variables) يكون أقل من عدد القيود (Constraints)، والمثال التالي يوضح ذلك.

**مثال (17):**

لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 8X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 \le 10$$

$$2X_1 + 5X_2 \le 20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$





للتحقق من الحالة المذكورة، نقوم برسم قيود المشكلة السابقة على هيئة خطوط مستقيمة، على النحو الآتي:

القيد الأول: 1) $\therefore X_1 + 2X_2 = 10$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 5 \Rightarrow \therefore P_1(0, 5)$

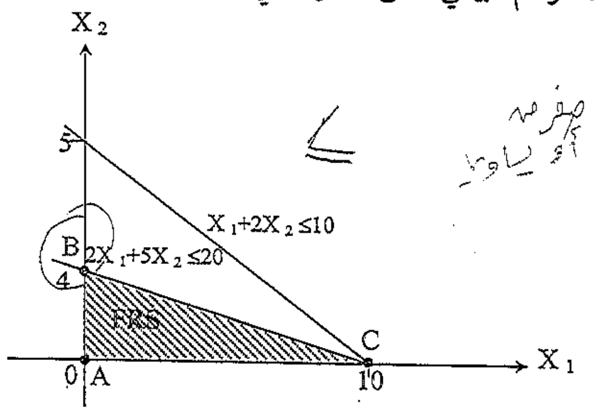
If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2(10, 0)$

القيد الثاني: 2) $\therefore 2X_1 + 5X_2 = 20$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 4 \Rightarrow \therefore P_1(0, 4)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2(10, 0)$

عليه يكون الرسم البياني، على النحو الآتي:




يتضح من الشكل البياني السابق إن منطقة الحل الممكن (FRB) محدودة بالنقاط (C, B, A)، إذ أن:

$A = (0,0)$ , $B = (0,4)$ , $C = (10,0)$

ولاختبار أمثلية النقاط، نقوم بإيجاد قيمة دالة الهدف (Z) للنقاط المذكورة كالآتي:

$\because Z = 6X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Max.}$

$\therefore Z_A = 6(0) + 8(0) = Zero$

$Z_B = 6(0) + 8(4) = 32$

$Z_C = 6(10) + 8(0) = 60^* \rightarrow Max.$

يتضح من النتائج أعلاه، بأن الحل الأمثل للمشكلة تمثلـه النقطـة {C (10,0)}، مما يجعل الحل بموجبها هو $[X_2 = 0, X_1 = 10]$، وبما أن عدد المتغـيرات الأساسـية في الحل الأمثل هو متغير واحد فقط $[X_1=10]$، وهو أقل من عدد المتغـيرات القراريـة $(X_j)$ في النموذج والبالغ عددها متغيرين، وهذا ما يشير إلى أن الحل يُعد حلاً منحلاً.

3- عدم وجود حلول مقبولة Infeasible Solution:

تحدث هذه الحالة عندما تكون قيود مشكلة البرمجة الخطية متعارضة (متعاكسـة) ولا تشكل منطقة مشتركة بسبب عدم تقاطعهما، مما سيؤدي ذلـك إلى عـدم الحصـول على حلول مقبولة للمشكلة، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (18):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Min.\ Z = 5X_1 + 10X_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 4X_2 \geq 20$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

للتحقق من حالة عدم وجود حلول مقبولة، نقوم برسم قيود المشكلة على هيئة خطوط مستقيمة، على النحو الآتي:

القيد الأول:

1) $\therefore 2X_1 + 4X_2 = 20$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 5 \Rightarrow \therefore P_1 (0, 5)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 10 \Rightarrow \therefore P_2 (10, 0)$





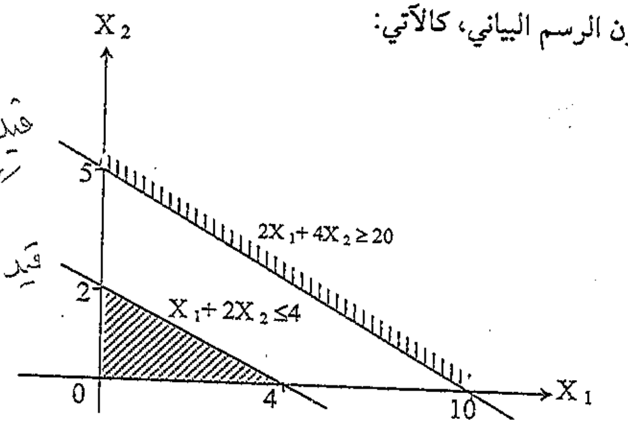
القيد الثاني:

2) $\therefore X_1 + 2X_2 = 4$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 2 \Rightarrow \therefore P_1 (0, 2)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 4 \Rightarrow \therefore P_2 (4, 0)$

عليه يكون الرسم البياني، كالآتي:




4- تعدد الحلول المثلى The Multiple Optimal Solutions:

يحصل أحياناً وجود عدة حلول مثلى لمشكلة البرمجة الخطية، وتحدث هذه الحالة عندما يكون أحد قيود النموذج موازياً إلى دالة الهدف (Z) أو منطبقـاً عليـها، والمثـال التالي يوضح ذلك.

مثال (19):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Max.\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 4X_2 \leq 12$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

للتحقق من حالة تعدد الحلول المثلى للمشكلة، نقوم برسم قيود النموذج علـى هيئة خطوط مستقيمة، على النحو الآتي:

القيد الأول: 1) $\therefore 2X_1 + 4X_2 = 12$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 3 \Rightarrow \therefore P_1(0,3)$

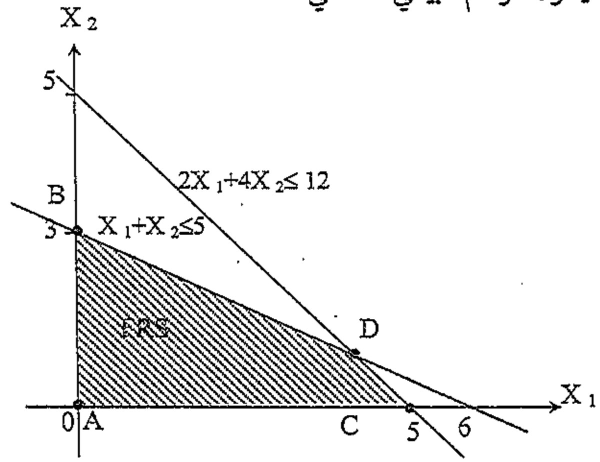
If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 6 \Rightarrow \therefore P_2(6,0)$

القيد الثاني: 2) $\therefore X_1 + X_2 = 5$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 5 \Rightarrow \therefore P_1(0,5)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 5 \Rightarrow \therefore P_2(5,0)$

عليه يكون الرسم البياني، كالآتي:




يتضح من الشكل البياني السابق، إن منطقة الحل الممكن (FRS) محدودة بالنقاط (D,C,B,A)، إذ أن:

A= (0,0) , B = (0,3) , C = (5,0)

ولإيجاد احداثيات النقطة (D) يتم ذلك بتقاطع القيدين، وقد حصلنا على الاحداثيات بعد حل معادلتي القيدين آنياً، وتبين إن [D = (4,1)] .

ولاختبار أمثلية النقاط، نقوم بإيجاد قيمة دالة الهدف (Z) للنقاط المذكورة، كالآتي:





$\because Z = 2X_1 + 4X_2 \rightarrow Max.$

$\therefore Z_A = 2(0) + 4(0) = Zero$

$\leftarrow Z_B = 2(0) + 4(3) = 12^* \rightarrow Max.$

$Z_C = 2(5) + 4(0) = 10$

$\leftarrow Z_D = 2(4) + 4(1) = 12^* \rightarrow Max.$

يتضح من النتائج أعلاه، بوجود أكثر من حل أمثل للمشكلة يتمثل بالنقطتين {D(4,1), B(0,3)} نظراً لتساوي قيمة دالة الهدف (Z) المحسوبة للنقطتين (D,B)، ويعود ذلك إلى إنطباق القيد الأول في النموذج على دالة الهدف (Z).

5- وجود قيود فائضة The Redundancy Constraints:

يحدث أحياناً وجود قيد أو عدد من القيود في نموذج البرمجة الخطية فائضة وليس لها أهمية أو تأثير يذكر على منطقة الحل الممكن (FRS) للمشكلة، ولمعالجة هكذا نوع من المشكلات ينبغي على متخذ القرار حذف القيد (القيود) التي يراها غير ضرورية في النموذج، وليس لها تأثير في تحديد منطقة الحل الممكن، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (20):

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Min.\ Z = 3X_1 + 6X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 \ge 4$$
$$4X_1 + 2X_2 \le 12$$
$$X_2 \ge 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

للتحقق من مشكلة القيود الفائضة في نموذج البرمجة الخطية، نقوم برسم القيود على هيئة خطوط مستقيمة، كالآتي:

القيد الأول: 1) $\therefore X_1 + X_2 = 4$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 4 \Rightarrow \therefore P_1(0,4)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 4 \Rightarrow \therefore P_2(4,0)$

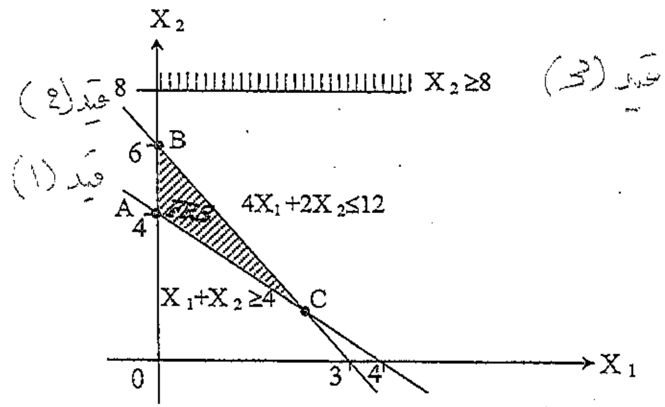
القيد الثاني: 2) $\therefore 4X_1 + 2X_2 = 12$

If $X_1 = 0 \Rightarrow \therefore X_2 = 6 \Rightarrow \therefore P_1(0,6)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow \therefore X_1 = 3 \Rightarrow \therefore P_2(3,0)$

القيد الثالث: 3) $\therefore X_2 = 8 \Rightarrow \therefore P(0,8)$

عليه يكون الرسم البياني، على النحو الآتي:




يتضح من الشكل البياني السابق، إن منطقة الحل الممكن (FRS) محدودة بالنقاط (C, B,A) والناتجة من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، في حين نلاحظ إن القيد الثالث ($X_2 \geq 8$) يعد قيدا فائضا وليس لـه تأثير على تحديد منطقة الحل الممكن (FRS).





## 2-6-3: الطريقة الجبرية The Algebraic Method:

تُعد الطريقة الجبرية من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد اسلوب التعويض الجبري للقيم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقاً إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، وتستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط هما ($X_2, X_1$).

ولحل نموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة، تتبع الخطوات الآتية:

1- تصنيف متغيرات النموذج الرياضي، إلى نوعين هما:

أ - المتغيرات الأساسية (Basic Variables):

وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (أكبر من الصفر) دائماً، أي أن ($X_j > 0$ , $S_i > 0$).

ب- المتغيرات غير الأساسية (Non- Basic Variables):

وهي تلك المتغيرات التي ليس لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (مساوية للصفر) دائماً، أي أن ($X_j = 0$ , $S_i = 0$).

2- تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة المستقرة (الصيغة القياسية) (Standard form)، وذلك باستخدام المتغيرات الراكدة (Slack Variables) في دالة الهدف وقيود النموذج، وكالآتي:

| نوع علامة القيود | آلية استخدام المتغيرات الراكدة في القيود | آلية استخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف | |
|---|---|---|---|
| | | Max. Z | Min. Z |
| أقل أو يساوي (≤) | $+S_i$ | $+0\,S_i$ | $+0\,S_i$ |
| أكبر أو يساوي (≥) | $-S_i$ | $-0\,S_i$ | $-0\,S_i$ |
| يساوي (=) | / | / | / |

3- عمل جدول يتضمن المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية، لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بموجب الطريقة الجبرية.

**مثال (21):**

جد الحل الأمثل للنموذج التالي، باستخدام الطريقة الجبرية:

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 6X_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \le 60$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

**الحل:**

1- تحويل النموذج الرياضي السابق من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \ , \ S_1, S_2 \ge 0$$

2- تحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار (2) متغيرين من (4) متغيرات، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\because C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = 6 \Rightarrow \therefore \{x_1x_2, x_1s_1, x_1s_2, x_2s_1, x_2s_2, s_1s_2\}$$





3- للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة باستخدام الطريقة الجبرية، نعمل الجدول الآتي:

| عدد الحالات الممكنة | المتغيرات غير الأساسية $X_j=0$ | $S_i=0$ | المتغيرات الأساسية $X_j>0$ | $S_i>0$ | دالة الهدف $Z=5X_1+6X_2+0S_1+0S_2$ | Max.Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1=0$ | $X_2=0$ | $S_1=30$ | $S_2=60$ | 0 | |
| 2 | $X_1=0$ | $S_1=0$ | $X_2=10$ | $S_2=20$ | 60 | |
| 3 | $X_1=0$ | $S_2=0$ | $X_2=15$ | $S_1=-15$ | 90 (تهمل) | |
| 4 | $X_2=0$ | $S_1=0$ | $X_1=15$ | $S_2=-15$ | 75 (تهمل) | |
| 5 | $X_2=0$ | $S_2=0$ | $X_1=12$ | $S_1=6$ | 60 | |
| 6 | $S_1=0$ | $S_2=0$ | $X_1=8.6$ | $X_2=4.3$ | 68.8 | 68.8* |

يتضح من النتائج الواردة بالجدول السابق، بأن الحل الأمثل للنموذج هو:

$$[X_1 = 8.6 \ , \ X_2 = 4.3 \ , Z^* = 68.8]$$

$x_1 = \frac{30-3x_2}{2}$ $\quad 5\left(\frac{30-3x_2}{2}\right) + 4x_2 = 60 \rightarrow x_2 = \frac{30}{7}$ $\quad x_2 = 4.28$ $\quad 2x_1 + \frac{3\times 30}{7} = 30$ $\quad x_1 = 3.52$

**مثال (22):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، جبرياً:

$$\text{Max. } Z = 18X_1 + 30X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 \le 200$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 300$$

$$X_1 \le 100$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

**الحل:**

1- تحويل النموذج السابق من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$Max.\ Z = 18X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200 \quad S_1$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300 \quad S_2$$
$$X_1 + S_3 = 100 \quad S_3$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \ , \ S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$X_1 = 200 - 2X_2$

$(X_1, X_2)\ (S_1, S_2, S_3)$

2- تحديد عدد الحالات الممكنة، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\because C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow \therefore C_2^5 = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5(4)(3!)}{2(1).3!} = 10$$

أي أن عدد الحالات العشرة، هي:

$[X_1X_2, X_1S_1, X_1S_2, X_1S_3, X_2S_1, X_2S_2, X_2S_3, S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3]$.

3- للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة جبريا، نعمل الجدول الآتي:

| عدد الحالات الممكنة | المتغيرات غير الأساسية $X_j=0$ $S_i=0$ | المتغيرات الأساسية $X_j>0$ $S_i>0$ | دالة الهدف $Z=18X_1+30X_2+0S_1+0S_2+0S_3$ | MaxZ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1=0$ $X_2=0$ | $S_1=200$ $S_2=300$ $S_3=100$ | 0 | |
| 2 | $X_1=0$ $S_1=0$ | $X_2=100$ $S_2=100$ $S_3=100$ | 3000 | |
| 3 | $X_1=0$ $S_2=0$ | $X_2=150$ $S_1=-100$ $S_3=100$ | يهمل (4500) | |
| 4 | $X_1=0$ $S_3=0$ | $X_2=0$ $S_1=200$ $S_2=300$ | 0 | |
| 5 | $X_2=0$ $S_1=0$ | $X_1=200$ $S_2=-300$ $S_3=-100$ | يهمل (3600) | |
| 6 | $X_2=0$ $S_2=0$ | $X_1=100$ $S_1=100$ $S_3=0$ | 1800 | |
| 7 | $X_2=0$ $S_3=0$ | $X_1=100$ $S_1=100$ $S_2=0$ | 1800 | |
| 8 | $S_1=0$ $S_2=0$ | $X_1=50$ $X_2=75$ $S_3=50$ | 3150 | 3150* |
| 9 | $S_1=0$ $S_3=0$ | $X_1=100$ $X_2=50$ $S_2=-100$ | يهمل (3300) | |
| 10 | $S_2=0$ $S_3=0$ | $X_1=100$ $X_2=0$ $S_1=100$ | 1800 | |





عليه يكون الحل الأمثل للنموذج، كالآتي:

$[X_1 = 50,\ X_2 = 75,\ Z^* = 3150]$.

**مثال (23) :**

جد الحل الأمثل للنموذج التالي، باستخدام الطريقة الجبرية:

$$Min.\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

Sub. to:

$$4X_1 + 6X_2 \geq 12$$
$$8X_1 + 4X_2 \geq 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

**الحل:**

1- تحويل النموذج الرياضي أعلاه من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

$$Mi.\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Sub. to:

$$4X_1 + 6X_2 - S_1 = 12$$
$$8X_1 + 4X_2 - S_2 = 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \ , \ S_1, S_2 \geq 0$$

2- تحديد عدد الحالات الممكنة والبالغة (6) ستة حالات، وفقاً للصيغة الآنفة الذكر.

3- للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة، نعمل الجدول الآتي:

| عدد الحالات الممكنة | المتغيرات غير الأساسية $X_j=0$ | $S_i=0$ | المتغيرات الأساسية $X_j>0$ | $S_i>0$ | دالة الهدف $Z=3X_1+2X_2+0S_1+0S_2$ | Min.Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1=0$ | $X_2=0$ | $S_1=-12$ | $S_2=-16$ | 0 (تهمل) | |
| 2 | $X_1=0$ | $S_1=0$ | $X_2=2$ | $S_2=-8$ | 4 (تهمل) | |
| 3 | $X_1=0$ | $S_2=0$ | $X_2=4$ | $S_1=12$ | 8 | |
| 4 | $X_2=0$ | $S_1=0$ | $X_1=3$ | $S_2=8$ | 9 | |
| 5 | $X_2=0$ | $S_2=0$ | $X_1=2$ | $S_1=-4$ | 6 (تهمل) | |
| 6 | $S_1=0$ | $S_2=0$ | $X_1=1.5$ | $X_2=1$ | 6.5 | 6.5* |

عليه يكون الحل الأمثل للمشكلة، على النحو الآتي:

$[X_1=1.5\ ,\ X_2=1\ ,\ Z^*=6.5]$.

وفي ضوء ما تقدم وبعد الانتهاء من حل بعض مشكلات البرمجة الخطية في حالة التعظيم (.Max) وحالة التقليل (.Min)، اتضح لنا إن حل المشكلات بموجب الطريقة الجبرية قد أسفرت على نفس نتائج الحل الأمثل للمشكلات بموجب الطريقة البيانية.





# أسئلة حول الفصل الثاني

س1: وضح بالتفصيل البدايات الأولى لتطبيق البرمجة الخطية.

س2: ما المقصود بالبرمجة الخطية، ذاكراً أهم مجالات استخدام هذا المفهوم؟

س3: وضح مزايا أسلوب البرمجة الخطية، شارحاً أهم الانتقادات الموجهة لهذا الأسلوب.

س4: عدد افتراضات البرمجة الخطية، شارحاً إياها بالتفصيل.

س5: وضح العناصر الأساسية لصياغة نموذج البرمجة الخطية، معززاً إجابتك بكتابة النموذج الرياضي.

س6: أكتب الصيغة العامة القانونية لنموذج البرمجة الخطية في حالتي التعظيم والتقليل، وبالصيغة المختصرة.

س7: أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالتي التعظيم والتقليل، وبالصيغة المختصرة.

س8: وضح بالتفصيل خصائص كل من الصيغتين القانونية والقياسية.

س9: وضح القواعد العامة لاستخدام المتغيرات الراكدة ($S_i$)، والمتغيرات الاصطناعية ($R_i$) في قيود النموذج ودالة الهدف (Z).

س10: عدد طرق حل مشكلات البرمجة الخطية، شارحاً كل من الطريقتين البيانية والجبرية باختصار.

س11: عدد الحالات الخاصة في الرسم البياني، معززاً إجابتك بالأمثلة التوضيحية لكل حالة، ومعقباً على النتائج.

س12: وضح بالتفصيل أهم خطوات تطبيق الطريقة الجبرية في حل مشكلات البرمجة الخطية.

س13: البيانات الواردة في الجدول التالي، تمثل آلية تحديد مزيج إنتاجي لمصنع يقوم بإنتاج نوعين من المنتجات، تمر عملية إنتاجها بثلاثة أنواع من المكائن وبالأوقات المبينة في الجدول التالي مع الربح المتوقع (بالدينار) للوحدة الواحدة من كل منتوج.

| الماكنة | الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة من: المنتوج (A) | المنتوج (B) | الوقت المتاح للماكنة (دقيقة) |
|---|---|---|---|
| التقطيع | 3 | 6 | 6000 |
| الطباعة | 4 | 2 | 6000 |
| التجميع | 5 | 2 | 5000 |
| الربح المتوقع | 2 | 3 | |

المطلوب:

صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية لإنتاج عدد الوحدات من كلا المنتجين، بما يحقق للمصنع أكبر قدر ممكن من الأرباح.

س14: البيانات الواردة في الجدول التالي، توضح مكونات مزيج غذائي يتكون من الحديد والبروتين والنشأ لمؤسسة إنتاجية تقوم بإنتاج نوعين من الأغذية مع بيان احتياجات الأغذية من كلا النوعين بالحد الأدنى مع التكاليف المتوقعة (دينار/كغم) من إنتاج كلا النوعين من الأغذية.

| المركبات | الاحتياجات المطلوبة لإنتاج (كغم/وحدة): الغذاء (A) | الغذاء (B) | الاحتياجات الدنيا (كغم/وحدة) |
|---|---|---|---|
| البروتين | 250 | 200 | 1000 |
| الألياف | 200 | 100 | 800 |
| النشأ | 2 | 2 | 10 |
| التكاليف المتوقعة | 5 | 4 | |





المطلوب:

صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية للمزيج الغذائي، بما يجعل تكاليف الإنتاج أقل ما يمكن.

س15: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية (LP) التالية، باستخدام الطريقة البيانية:

(1) $\text{Max. } Z = 7X_1 + 3X_2$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 \geq 6$$
$$X_1 \leq 5$$
$$X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

(2) $\text{Max. } Z = 4X1 + 3X2$

Sub. to:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 30$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$X_1 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

(3) $\text{Min. } Z = 8X1 + 10X2$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$
$$X_1 \geq 3$$
$$X_2 \leq 5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

(4) Min. $Z = 4X1 + 2X2$

Sub. to:

$3X_1 + 5X_2 \geq 15$

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$

$X_1 \quad \geq 2$

$X_1, X_2 \quad \geq 0$.

س16: حدد نوع الحالة الخاصة بيانيا، لنماذج البرمجة الخطية (LP) الآتية:

(1) Max. $Z = 5X1 + 8X2$

Sub. to:

$2X_1 + X_1 \geq 4$

$X_2 \quad \leq 2$

$X_1 , X_2 \quad \geq 0$

(2) Max. $Z = 4X1 + 6X2$

Sub. to:

$2X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1, X_2 \geq 0$ .

(3) Min. $Z = 10 X_1 + 15X_2$

Sub. to:

$2X_1 + X_2 \leq 6$

$4 X_1 + 2X_2 \geq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$





(4) Max. $Z = 5X_1 + 3X_2$

Sub. to:

$X_1 + X_2 \leq 4$

$5X_1 + 3X_2 \leq 15$

$X_1, X_2 \geq 0$

(5) Min. $Z = 6X_1 + 4X_2$

Sub. to:

$2X_1 + X_2 \leq 6$

$X_1 + X_2 \geq 4$

$X_1 \quad \leq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

س17: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية (LP) التالية، باستخدام الطريقة الجبرية:

(1) Max. $Z = 5X_1 + 10X_2$

Sub. to:

$2X_1 + X_2 \leq 10$

$2X_1 + 3X_2 \leq 18$

$X_1 \quad \geq 2$

$X_2 \leq 2$

$X_1, X2 \geq 0$

(2) Min. $Z = 2X_1 + 5X_2$

Sub. to:

$4X_1 + 6X_2 \geq 12$

$2X_1 + X_2 \geq 4$

$X_1 , X_2 \geq 0$

٣

الفصل الثالث

# البرمجة الخطية- الطريقة المبسطة

## Linear Programming- The Simplex Method

# الفصل الثالث

## البرمجة الخطية - الطريقة المبسطة

## Linear Programming - The Simplex Method

### 3-1: مقدمة:

تُعد الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) اسلوب رياضي متقدم في حل مشكلات البرمجة الخطية (LP)، كونها تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر)، كما وتُعد هذه الطريقة أفضل وأدق من الطريقتين السابقتين [ الطريقة البيانية والطريقة الجبرية ].

أن البدايات التأريخية لتطبيق الطريقة المبسطة (Simplex Method) تعود إلى الجهود المبذولة من قبل العالم (Dantzig) عام (1947)، عندما تبين لـه قصور وعجز كل من الطريقة البيانية والطريقة الجبرية في معالجة مشكلات البرمجة الخطية (LP)، عندما تحتوي على أكثر من متغيرين.

لقد شاع استخدام الطريقة المبسطة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية (LP) في وقتنا الحاضر، نتيجة إنتشار الحاسبات الالكترونية وتطور البرمجيات الجاهزة (Soft wares) المتعلقة بهذا النوع من المشكلات.

ويتم إيجاد حل مشكلات البرمجة الخطية (LP) بموجب هذه الطريقة وفقاً إلى ثلاث مراحل أساسية ومتسلسلة يمكن وصفها، على النحو الآتي:

1- المرحلة الأولى: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي) (Feasible Solution).

2- المرحلة الثانية: تحسين الحل الممكن للحصول على الحل الأفضل (Best Solution).

3- المرحلة الثالثة: تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution)، وقد يتم الوصول إلى الحل الأمثل بخطوة واحدة (One Iteration) أو عدد من الخطوات (Many Iterations).

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لحل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالتي التعظيم (Maximize) والتقليل (Minimize) لدالة الهدف:

**3-2: حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم (Maximize):**

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) بموجب الطريقة المبسطة، نتبع الخطوات الآتية:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة القياسية (Standard Form)، بعد إضافة المتغيرات الفائضة أو الراكدة ($S_i$) إلى كل من دالة الهدف (Z) وقيود النموذج، مع مراعاة جعل دالة الهدف (Z) مساوية (للصفر).

2- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible Solution)، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات ($X_j$, $S_i$) في قيود النموذج ودالة الهدف (Z).

3- تحديد المتغير الداخل (Entering Variable)، على أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4- تحديد المتغير الخارج (Leaving Variable)، عن طريق قسمة القيم الواقعة في الجهة اليمنى في عمود (R.H.S)، على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot Column) والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارج القسمة في عمود النسبة (Ratio) يُعد هو المتغير الخارج، ليحل محله المتغير الداخل.

5- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (Pivot Column).

6- الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (Pivot Row).





7- العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج يسمى بالعنصر المحوري (Pivot Element)، بمعنى آخر [ هو العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج ].

8- يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري (Pivot Element).

9- لغرض تحسين الحل الممكن (Feasible Solution) والحصول على الحل الأفضل (Best Solution)، نتبع الآتي:

أ - إيجاد معاملات دالة الهدف الجديد (New Z) كالآتي:

معاملات (Z) الجديدة = معاملات (Z) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية.

ب- إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات ($S_i$) كالآتي:

معاملات ($S_i$) الجديدة = معاملات ($S_i$) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف ($S_i$) * المعادلة المحورية.

10- يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم (Maximization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات ($C_j$) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أكبر أو تساوي الصفر، أي أن ($C_j \geq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات ($C_j$) في دالة الهدف (سالبة)، أي ($C_j < 0$)، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

11- يعاد إجراء الخطوات السابقة من (3-10) حتى يتم الحصول على جميع معاملات ($C_j$) دالة الهدف (Z)، أكبر أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \geq 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

**مثال (10):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$2X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \le 60$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

**الحل:**

لحل مشكلة البرمجة الخطية أعلاه، نتبع ما يأتي:

**الخطوة الأولى First Iteration :**

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) السابق إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z - 5X_1 - 6X_2 - 0\,S_1 - 0\,S_2 = 0$$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2 \ge 0$$

2- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن)، كالآتي:

| Basic Variables | Non- Basic Variables | | | | RHS الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $(b_i^s)$ | Ratio |
| $S_1$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 30 | $\frac{30}{3}=10$ |
| $S_2$ | 5 | 4 | 0 | 1 | 60 | $\frac{60}{4}=15$ |
| Z | -5 | -6 | 0 | 0 | 0 | |

الصف المحوري — العمود المحوري — العنصر المحوري





3- إن المتغير الداخل هو ($X_2$)، كونه يقابل أكبر قيمة (6) بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4- إن المتغير الخارج هو ($S_1$)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).

**ملاحظة:** تهمل القيم السالبة أو القيم غير المعرفة (∞) في عمود النسبة (Ratio):

5- إن العنصر المحوري هو القيمة (3) والتي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري.

6- حساب المعادلة المحورية (Pivot Equation)، وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري (3)، أي أن:

$$\text{Pivot Eqution} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{30}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

7- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير ($S_2$) ودالة الهدف (Z)، على النحو الآتي:

$$\text{New}(S_2) = \begin{bmatrix}5\\4\\0\\1\\60\end{bmatrix} - (4) * \begin{bmatrix}2/3\\1\\1/3\\0\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7/3\\0\\-4/3\\1\\20\end{bmatrix}$$

$5-\left(4 \times \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix}-5\\-6\\0\\0\\0\end{bmatrix} - (-6) * \begin{bmatrix}2/3\\1\\1/3\\0\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\\0\\60\end{bmatrix}$$

$-5 - {}^{-}4 = -5 + 4 = -1$

8- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، على النحو الآتي:

| Basic Variables | Non- Basic Variables | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $(b_i^s)$ | Ratio |
| $X_2$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 10 | 15 = |
| $S_2$ | $\frac{7}{3}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | 1 | 20 | 8.6 |
| Z | -1 | 0 | 2 | 0 | 60 | |

9- بما إن بعض قيم المعاملات ($C_j$) في صف دالة الهدف (Z) الجديدة (سالبة) أي إن ($C_j < 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية.

**الخطوة الثانية Second Iteration:**

1- إن المتغير الداخل هو ($X_1$)، كونه يقابل أكبر قيمة (1) بإشارة سالبة من بين القيم السالبة في صف دالة الهدف (Z) الجديدة.

2- إن المتغير الخارج هو ($S_2$)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (8.6) في عمود النسبة.

3- إن العنصر المحوري هو القيمة $\left(\frac{7}{3}\right)$.

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, 0, -\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 8.6\right]$$

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير ($X_2$) ودالة الهدف (Z) كالآتي:





$$\text{New}(X_2) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \left(\frac{2}{3}\right) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/7 \\ 3/7 \\ 8.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/7 \\ -2/7 \\ 4.3 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} - (-1) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/7 \\ 3/7 \\ 8.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10/7 \\ 3/7 \\ 68.6 \end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثالث، على النحو الآتي:

| Basic Variables | Non- Basic Variables | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $(b_i^s)$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{5}{7}$ | $-\frac{2}{7}$ | 4.3 |
| $X_1$ | 1 | 0 | $-\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 8.6 |
| Z | 0 | 0 | $\frac{10}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 68.6 |

7- يتضح من الجدول السابق، بأن جميع معاملات دالة الهدف (Z) أكبر وتساوي الصفر، أي أن ($C_j \geq 0$)، عليه فقد توصلنا للحل الأمثل، والذي يكون فيه.

$[X_1 = 8.6 \ , \ X_2 = 4.3 \ , \ Z^* = 68.6]$

**الاستنتاج:**

يتضح من النتائج النهائية لحل المشكلة بأن المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (9) تسعة وحدات تقريباً من المنتج ($X_1$)، و (4) أربعة وحدات من المنتج ($X_2$)، بما يحقق للمنشأة أقصى الأرباح وبمقدار (68.6) دينار.

**مثال (2):**

واجب

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 8X_2 + 4X_3$$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 \le 2$$
$$X_1 + 3X_3 \le 6$$
$$X_2 \le 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

**الحل:**

لحل مشكلة البرمجة الخطية أعلاه، نتبع ما يأتي:

**الخطوة الأولى First Iteration:**

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية السابق إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z - 6X_1 - 8X_2 - 4X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 2$$
$$X_1 + 3X_3 + S_2 = 6$$
$$X_2 + S_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \ , \ S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

2- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن)، كالآتي:





| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | ($b_i^s$) | Ratio |
| $S_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| $S_2$ | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 6 | ∞ |
| $S_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| Z | −6 | −8 | −4 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

الصف المحوري    العمود المحوري    العنصر المحوري

3- إن المتغير الداخل هو ($X_2$)، كونه يقابل أكبر قيمة(8) بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4- إن المتغير الخارج هو ($S_3$)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (1) في عمود النسبة.

5- العنصر المحوري هو القيمة (1).

6- حساب المعادلة المحورية، كالآتي:

$$\text{PivotEquation} = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right]$$
$$= [0,1,0,0,0,1,1]$$

7- حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرين ($S_2,S_1$) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(S_1) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\2\end{bmatrix} - (1)^* \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(S_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}-(0)*\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}=\text{Old}(S_2)$$

$$\text{New}(Z)=\begin{bmatrix}-6\\-8\\-4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-(-8)*\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\0\\-4\\0\\0\\8\\8\end{bmatrix}$$

8- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، على النحو الآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $(b_i^s)$ | Ratio |
| $S_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $S_2$ | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 6 | 6 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | ∞ |
| Z | -6 | 0 | -4 | 0 | 0 | 8 | 8 | |

9- بما إن بعض قيم المعاملات ($C_j$) في صف دالة الهدف (Z) الهدف (Z) الجديدة قيم سالبة، أي إن ($C_j < 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية.





الخطوة الثانية Second Iteration:

1- إن المتغير الداخل هو ($X_1$).

2- إن المتغير الخارج هو ($S_1$).

3- إن العنصر المحوري هو القيمة (1).

4- إن المعادلة المحورية هي:

Pivot Equation = [1, 0, 0, 1, 0, -1, 1]

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرين ($X_2, S_2$) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(S_1)=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}-(1)*\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\-1\\1\\1\\5\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(X_2)=\text{Old}(X_2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z)=\begin{bmatrix}-6\\0\\-4\\0\\0\\8\\8\end{bmatrix}-(-6)*\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\6\\0\\2\\14\end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابق في جدول الحل الثالث، على النحو الآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $(b_i^s)$ | Ratio |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | ∞ |
| $S_2$ | 0 | 0 | 3 | -1 | 1 | 1 | 5 | $\frac{5}{3}$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | ∞ |
| Z | 0 | 0 | -4 | 6 | 0 | 2 | 14 | |

7- يتضح من النتائج الواردة في الجدول السابق، بأن بعض قيم المعاملات $(C_j)$ في صف دالة الهدف (Z) الجديدة (سالبة) وهي (-4)، أي إن $(C_j < 0)$ وهذا يعني هناك إمكانية أخرى لتحسين الحل، عليه سيتم إعادة نفس الخطوات السابقة، كما موضح بالخطوة الثالثة.

3

**الخطوة الثالثة Third Iteration:**

1- المتغير الداخل هو $(X_3)$.

2- المتغير الخارج هو $(S_2)$.

3- العنصر المحوري هو القيمة (3).

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left|0,0,1,-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{3}\right|$$

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرين $(X_2,X_1)$ ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(X_1)=\text{Old}(X_1)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$





$$\text{New}(X_2)=\text{Old}(X_2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z)=\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\6\\0\\2\\14\end{bmatrix}-(-4)*\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{14}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{10}{3}\\\frac{62}{3}\end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الرابع، على النحو الآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $(b_i^s)$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| $X_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 0 | 0 | $\frac{14}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{62}{3}$ |

7- يتضح من الجدول السابق، بأن جميع معاملات دالة الهدف (Z) أكبر وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \geq 0)$، عليه فقد توصلنا للحل الأمثل، والذي يكون فيه:

$$\left[X_1=1\ ,\ X_2=1\ ,X_3=\frac{5}{3}=1.7\ ,\ Z=\frac{62}{3}=20.7\right]$$

**الاستنتاج:**

يتضح من النتائج النهائية لحل المشكلة بأن المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قرارا بإنتاج (1) وحدة واحدة من المنتج ($X_1$)، وإنتاج (1) وحدة واحدة أيضا من المنتج ($X_2$)، ووحدتين (2) تقريبا من المنتج ($X_3$)، بما يحقق للمنشأة أقصى الأرباح وبمقدار (20.7) دينار.

## 3-3: حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التقليل (Minimize):

إن حل مشكلات البرمجة الخطية (LP) بموجب الطريقة المبسطة (SimpleX Method) في حالة تقليل دالة الهدف (Z)، أي عندما تكون علامات القيود بصيغة أكبر أو تساوي (≥)، أو تكتب علامات القيود بصيغة [ المساواة (=)، أو أكبر من أو تساوي (≥)] في حالات خاصة جدا، يتم بواسطة أحد الطريقتين الآتيتين:

1- طريقة (M) الكبيرة (Big- M) Method.

2- طريقة المرحلتين (Two - Phase) Method.

وفيما يلي شرحا مفصلا لكل طريقة من الطرق أعلاه، وكالآتي:

### 3-3-1: طريقة (M) الكبيرة The (Big - M) Method:

تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات اصطناعية (Artificial Variables) إلى جانب المتغيرات الراكدة (Slack Variables) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة التقليل (Minimization)، عندما تكون علامات القيود مكتوبة بصيغة [ المساواة (=)، أو أكبر من أو تساوي (≥)]، وإلى دالة الهدف (Z)، على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية ($R_i$)في دالة الهدف (Z) بمعاملات كبيرة جدا تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التقليل (Minimization)، وإشارة سالبة في حالة التعظيم (Maximaization).





ولإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) بموجب هذه الطريقة، تتبع الخطوات الآتية:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، بعد إضافة المتغيرات الراكدة ($S_i$) إلى قيود النموذج ودالة الهدف (Z)، بعدها يتطلب إضافة المتغيرات الاصطناعية ($R_i$) إلى القيود ودالة الهدف أيضاً.

2- صياغة دالة هدف جديدة (Z)، بدلالة المتغيرات ($X_j$) و ($S_i$) بعد التعويض عن قيم ($R_i$) بما يساويها من المتغيرات ($X_j$) و ($S_i$)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة (M) فقط.

3- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، اعتماداً على جميع معاملات المتغيرات ($R_i$, $S_i$, $X_j$) الموجودة في قيود النموذج، ودالة الهدف (Z).

4- تحديد المتغير الداخل، على أساس أكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف (Z).

5- اعتماد بقية الخطوات السابقة والواردة في حالة التعظيم (Maximization)، ما عدا بعض الاختلافات الطفيفة، يمكن توضيحها بالخطوة (6).

6- يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التقليل (Minimization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات ($C_j$) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أقل أو تساوي الصفر، أي أن ($C_j \le 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات ($C_j$) في الدالة (موجبة)، أي أن ($C_j > 0$)، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

7- في حالة وجود أحد المعاملات ($C_j$) أكبر من الصفر ($C_j > 0$) في صف دالة الهدف (Z) يعاد إجراء الخطوات السابقة من (4-6) حتى يتم الحصول على جميع المعاملات ($C_j$) في صف دالة الهدف (Z) أقل أو تساوي الصفر ($C_j \ge 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل.

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطيـة (LP) التـالي، باستخدام طريقـة (M) الكبيرة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

**الحل:**

**الخطوة الأولى First Iteration:**

1) أ- تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0,\ S_1, S_2 \geq 0$$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم ($S_1$) و ($S_2$) ظهرت سالبة وهي ($S_1 = -30$)، ($S_2 = -40$)، مما يتعارض ذلك مع شرط عدم السلبية ($S_1, S_2 \geq 0$)، ولمعالجة هذا الموضوع يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية للقيود ودالة الهدف (Z).

ب- إضافة المتغيرات الاصطناعية ($R_i$) لقيود النموذج ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

Sub. to:





$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30 \quad ..........(1)$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40 \quad ............(2)$$
$$X_1, X_2 \geq 0,\ S_1, S_2 \geq 0,\ R_1, R_2 \geq 0$$

M : Is very Large.

2- صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات القراريـة ($X_j$) والمتغـيرات الراكـدة ($S_i$) فقط، وعلى النحو الآتي:

أ - من المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \quad ...............(3)$$

ب- نعوض قيم ($R_1$) و ($R_2$) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف (Z)، ينتج:

$$\because Z = 2X_1 + X_2 + M\,\{R_1 + R_2\}$$
$$= 2X_1 + X_2 + M\,\{[30 - X_1 - 3X_2 + S_1] + [40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2]\}$$
$$= 2X_1 + X_2 + M\,\{70 - 5X_1 - 5X_2 + S_1 + S_2\}$$
$$= 2X_1 + X_2 + 70M - 5MX_1 - 5MX_2 + MS_1 + MS_2$$
$$= (2-5M)\,X_1 + (1-5M)\,X_2 + MS_1 + MS_2 + 70M$$
$$\therefore Z - (2-5M)X_1 - (1-5M)\,X_2 - MS_1 - MS_2 = 70\,M$$

3- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن)، كالآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | ($b_i$'s) | Ratio |
| $R_1$ | 1 | 3 | −1 | 0 | 1 | 0 | 30 | 10 |
| $R_2$ | 4 | 2 | 0 | −1 | 0 | 1 | 40 | 20 |
| Z | (-2+5M) | (-1+5M) | -M | -M | 0 | 0 | 70 M | |

الصف المحوري   العمود المحوري   العنصر المحوري

4- المتغير الداخل هو ($X_2$)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة (-1+ 5M) في صف دالة الهدف (Z)، بعد التعويض عن (M=10) أو إحدى مضاعفاتها.

5- المتغير الخارج هو ($R_1$)، كونه يقابل أصغر قيمة موجبة (10) في عمود النسبة.

6- العنصر المحوري هو القيمة (3).

7- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

8- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير ($R_2$) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(R_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 40 \end{bmatrix} - (2)^* \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix} -2+5M \\ -1+5M \\ -M \\ -M \\ 0 \\ 0 \\ 70M \end{bmatrix} - (-1+5M)^* \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M \\ 0 \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M \\ (-M) \\ \frac{1}{3}-\frac{5}{3}M \\ 0 \\ 10+20M \end{bmatrix}$$

9 - تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، على النحو الآتي:





| B.V | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | ($b_i^s$) | Ratio |
| $X_1$ | $1/3$ | 1 | $-1/3$ | 0 | $1/3$ | 0 | 10 | 30 |
| $R_2$ | $10/3$ | 0 | $2/3$ | -1 | $-2/3$ | 1 | 20 | 6 |
| Z | $\left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right)$ | 0 | $\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M\right)$ | -M | $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M\right)$ | 0 | 10+20 M | |

10- بما إن بعض قيم المعاملات في صف دالة الهدف (Z) الجديدة (موجبة)، أي إن ($C_j > 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية:

**الخطوة الثانية Second Iteration:**

1- المتغير الداخل هو ($X_1$)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة $\left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right)$ في صف دالة الهدف (Z).

2- المتغير الخارج هو ($R_2$)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (6) في عمود النسبة (Ratio).

3- العنصر المحوري هو $\left(\frac{10}{3}\right)$.

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, 0, \frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right]$$

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير ($X_2$) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(X_2) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{3}\right)^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/5 \\ -3/10 \\ -1/5 \\ 3/10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/5 \\ 1/10 \\ 2/5 \\ -1/10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z)=\begin{bmatrix} \left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right) \\ 0 \\ \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M\right) \\ -M \\ \left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M\right) \\ 0 \\ 10+20M \end{bmatrix}-\left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right)*\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -M \\ \frac{1}{2}-M \\ 20 \end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثالث، على النحو الآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | $(b_i^s)$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{10}$ | 8 |
| $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | 6 |
| Z | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | -M | $\left(\frac{1}{2}-M\right)$ | 20 |

7- بما إن جميع معاملات صف دالة الهدف (Z) أقل وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \le 0)$، عليه فقد توصلنا للحل الأمثل للنموذج والذي يكون فيه:

$$[X_1=6 \quad , \quad X_2=8 \quad , \quad Z^*=20]$$

**الاستنتاج:**

يتضح من النتائج النهائية المتعلقة بحل المشكلة بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قرارا بإنتاج (6) ستة وحدات من المنتج $(X_1)$، وإنتاج (8) ثمانية وحدات من المنتج $(X_2)$، بما يحقق للمنشأة أقل التكاليف الإنتاجية وبمقدار (20) دينار.





**2-3-3: طريقة المرحلتين The (Two - Phase) Method:**

تعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة (M) الكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة التقليل (Minimize)، إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن نتأكد بأن هناك حل للنموذج، وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (r) مساوية للصفر، أي أن $(r=0)$، وبعدمه فلا يوجد حل للنموذج.

ويتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين، يمكن توضيحهما على النحو الآتي:

**أولاً: المرحلة الأولى:**

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية $(R_i)$ لقيود النموذج فقط.

2- صياغة دالة هدف جديدة (r) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية $(R_i)$، أي أن:

$$r = R_1 + R_2 + ... + R_n \longrightarrow \text{Min.}$$

3- تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، اعتماداً على معاملات المتغيرات القرارية والراكدة والاصطناعية $(R_i, S_i, X_j)$ في قيود النموذج، ودالة الهدف الجديدة (r).

4- تتبع الخطوات السابقة، حتى نحصل على قيمة $(r = 0)$، مما يعني وجود حل للنموذج، والمقترنة في كونه $(C_j \le 0)$ لجميع معاملات دالة الهدف (r).

**ثانياً: المرحلة الثانية:**

1- اعتماد الحل الأساسي النهائي في الخطوة (4) من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية $(R_i)$، ودالة الهدف (r).

2- اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، وتحسين قيمتها، للحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

3- في حالة وجود أحد المعاملات ($C_j$) أكبر من الصفر ($C_j > 0$) في صف دالة الهدف (Z)، يعاد إجراء نفس الخطوات حتى يتم الحصول على جميع المعاملات ($C_j$) أقل أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \le 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل للنموذج.

**مثال (4):**

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة المرحلتين:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \ge 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \ge 40$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

**الحل:**

**المرحلة الأولى:** يمكن الوصول إلى حل النموذج في مرحلته الأولى، وفقاً للآتي:

**الخطوة الأولى First Iteration:**

1- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2 \ge 0$$





يتضح من القيدين أعلاه، بأن قيم ($S_2, S_1$) سالبة، وتساويان على الترتيب ($S_1=-30$، $S_2=-40$)، مما يتعارض ذلك مع شرط عدم السلبية ($S_1, S_2 \ge 0$)، عليه سيتم إضافة المتغيرات الاصطناعية ($R_2, R_1$) للقيود، وعلى النحو الآتي:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30 \quad \text{.............(1)}$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40 \quad \text{............(2)}$$
$$X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2 \ge 0 \quad , \quad R_1, R_2 \ge 0$$

2- صياغة دالة هدف جديدة (r)، اعتماداً على قيم ($R_2, R_1$)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذن:

$$r = R_1 + R_2 \longrightarrow \text{Min.}$$

من المعادلتين (1) و(2)، نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \text{.............(3)}$$

نعوض قيمة ($R_1$) و ($R_2$) الواردة بالعلاقة (3)، في دالة الهدف الجديدة (r)، وكالآتي:

$$r = (30 - X_1 - 3X_2 + S_1) + (40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2)$$
$$= 70 - 5X_1 - 5X_2 + S_1 + S_2 \longrightarrow \text{Min.}$$
$$\therefore r + 5X_1 + 5X_2 - S_1 - S_2 = 70$$

3- تصميم الحل الإساسي (الحل الأولي)، كالاتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | ($b_i^s$) | Ratio |
| $R_1$ | 1 | 3 | −1 | 0 | 1 | 0 | 30 | 30 |
| $R_2$ | 4 | 2 | 0 | −1 | 0 | 1 | 40 | 10 |
| r | 5 | 5 | −1 | −1 | 0 | 0 | 70 | |

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

4- المتغير الداخل هو ($X_1$)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة (5) في صف دالة الهدف (r).

5- المتغير الخارج هو ($R_2$)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة.

6- العنصر المحوري هو القيمة (4).

7- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 10\right]$$

8- حساب القيم الجديدة للمتغير ($R_1$) ودالة الهدف (r)، كالآتي:

$$\text{New}(R_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} - (1)* \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -1 \\ 1/4 \\ 1 \\ -1/4 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(r) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 70 \end{bmatrix} - (5)* \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -1 \\ 1/4 \\ 0 \\ -5/4 \\ 20 \end{bmatrix}$$





9- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، كالآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | ($b_i^s$) | Ratio |
| $R_1$ | 0 | $5/2$ | -1 | $1/4$ | 1 | $-1/4$ | 20 | 8 |
| $X_1$ | 1 | $1/2$ | 0 | $-1/4$ | 0 | $1/4$ | 10 | 20 |
| r | 0 | $5/2$ | -1 | $1/4$ | 0 | $-5/4$ | 20 | |

10- إن بعض قيم المعاملات في صف دالة الهدف (r) الجديدة (موجبة)، أي إن ($C_j > 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية.

**الخطوة الثانية Second Iteration:**

1- المتغير الداخل هو ($X_2$).

2- المتغير الخارج هو ($R_1$).

3- العنصر المحوري هو القيمة $\left(\frac{5}{2}\right)$.

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[0, 1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8\right]$$

5- حساب القيم الجديدة للمتغير ($X_1$) ودالة الهدف (r)، كالآتي:

$$\text{New }(X_1)=\begin{bmatrix}1\\ 1/2\\ 0\\ -1/4\\ 0\\ 1/4\\ 10\end{bmatrix}-\left(\frac{1}{2}\right)*\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2/5\\ 1/10\\ 2/5\\ -1/10\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1/5\\ -3/10\\ -1/5\\ 3/10\\ 6\end{bmatrix}$$

$$\text{New }(r)=\begin{bmatrix}5\\ 5/2\\ -1\\ 1/4\\ 0\\ -5/4\\ 20\end{bmatrix}-\left(\frac{5}{2}\right)*\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2/5\\ 1/10\\ 2/5\\ -1/10\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثالث، كالآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | $R_2$ | $(b_i^s)$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{10}$ | 8 |
| $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | 6 |
| r | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 |

7- بما إن قيمة دالة الهدف $(r=0)$، والتي اقترنت بأن جميع المعاملات في صف دالة الهدف (r) سالبة ومساوية للصفر، أي أن $(C_j \le 0)$، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج وينبغي الاستمرار بالمرحلة الثانية.





**المرحلة الثانية:**

للوصول إلى الحل الأمثل للنموذج، نتبع الخطوات الآتية:

1- إعتماد النتائج النهائية الواردة في جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، بعد إستبعاد المتغيرات الاصطناعية $(R_2, R_1)$ ودالة الهدف (r) من الجدول المذكور.

2- اعتماد دالة الهدف (Z) الأصلية للمشكلة، وهي:

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 \rightarrow \text{Min.}$$

نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف (Z) للحصول على الحل الأمثل النهائي، بعد إستبعاد المتغيرات $(R_2, R_1)$ ودالة الهدف (r)، وإضافة دالة الهدف (Z) الأصلية إلى جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، وعلى النحو الآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $(b_i^s)$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 8 |
| $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | 6 |
| Z | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |

3- نقوم بكتابة القيود اعتماداً على النتائج النهائية الواردة بالجدول السابق، وعلى النحو الآتي:

$$X_2-\frac{2}{5}S_1+\frac{1}{10}S_2=8 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_1+\frac{1}{5}S_1-\frac{3}{10}S_2=6 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من المعادلتين (1) و (2)، يمكن الحصول على قيم المتغيرين $(X_2, X_1)$ كالآتي:

$$X_2 = 8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2$$
$$X_1 = 6 - \frac{1}{5}S_1 + \frac{3}{10}S_2 \quad \Bigg\} \ldots\ldots\ldots(3)$$

نقوم بتعويض قيم المتغيرين ($X_2, X_1$) الواردة في العلاقة (3)، في دالة الهدف ($Z$) الأصلية ينتج:

$$\because Z = 2X_1 + X_2$$
$$\therefore Z = 2\left[6 - \frac{1}{5}S_1 + \frac{3}{10}S_2\right] + \left[8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2\right]$$
$$= 12 - \frac{2}{5}S_1 + \frac{6}{10}S_2 + 8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2$$
$$= 20 + \frac{5}{10}S_2$$
$$= 20 + \frac{1}{2}S_2$$
$$\therefore Z - \frac{1}{2}S_2 = 20$$

4- تفريغ نتيجة دالة الهدف ($Z$) في جدول الحل النهائي، كالآتي:

| B.V. | Non . B.V. | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | ($b_i^s$) |
| $X_2$ | 0 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 8 |
| $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | 6 |
| $Z$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 20 |

5- يتضح من النتائج النهائية الواردة في جدول الحل السابق، بأن جميع معاملات دالة الهدف ($Z$) هي أقل وتساوي الصفر، أي إن ($C_j \leq 0$) عليه فقد توصلنا للحل الأمثل للمشكلة، والذي يكون فيه:





$$[X_1 = 6 \quad , \quad X_2 = 8 \quad , \quad Z^* = 20]$$

إن النتائج أعلاه، هي نفس النتائج التي تم الحصول عليها بموجب طريقة ($M$) الكبيرة.

**الاستنتاج:**

يتضح من النتائج السابقة، بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (6) ستة وحدات من المنتج ($X_1$)، وإنتاج (8) ثمانية وحدات من المنتج ($X_2$)، بما يجعل التكاليف النهائية أقل ما يمكن وبمقدار (20) دينار.

# أسئلة حول الفصل الثالث

س1 : وضح بالتفصيل الطريقة المبسطة (Simplex Method)، شارحاً أهم مراحلها الأساسية في حل مشكلات البرمجة الخطية.

س2: وضح خطوات الحصول على الحل الأمثل بموجب الطريقة المبسطة في حالة:

1- التعظيم (Maximize).

2- التقليل (Minimize).

س3: وضح المفاهيم التالية بالتفصيل:

1- المتغير الداخل (Entering Variable).

2- المتغير الخارج (Leaving Variable).

3- الصف المحوري (Pivot Row).

4- العمود المحوري (Pivot Column).

5- العنصر المحوري (Pivot Element).

6- المعادلة المحورية (Pivot Equation).

س4: وضح بالتفصيل المبادئ العامة لكل من:

1- طريقة (M) الكبيرة.

2- طريقة المرحلتين.

س5: وضح ما يلي بالتفصيل:

1- خطوات المرحلة الأولى الخاصة بطريقة المرحلتين.

2- خطوات المرحلة الثانية الخاصة بطريقة المرحلتين.

س6: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام الطريقة المبسطة:





1) Max. $Z = 10X_1 + 10X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 4X_2 \le 20$$
$$3X_1 \le 15$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

2) Max. $Z = 2X_1 + 4X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 \le 4$$
$$X_1 + 4X_2 \le 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

3) Max. $Z = 80X_1 + 50X_2$

Sub. to:

$$4X_1 + 2X_2 \le 400$$
$$3X_1 + 5X_2 \le 750$$
$$5X_1 + X_2 \le 400$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

4) Max. $Z = 8X_1 + 5X_2$

Sub. to:

$$4X_1 + 2X_2 \le 20$$
$$4X_1 + 8X_2 \le 32$$
$$2X_1 \le 4$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

س7: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام الطريقة المبسطة:

1) Max. $Z = 10X_1 + 15X_2$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 \le 300$$
$$X_2 = 200$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

2) Max. $Z = 3X_1 - X_2$

Sub. to:

$$X_1 - 2X_2 \ge 4$$
$$X_1 \ge 4$$
$$X_1 + X_2 \le 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

س8: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام طريقة (M) الكبيرة:

1) Min . $Z = 20X_1 + 15X_2$

Sub. to :

$$2X_1 + 3X_2 \ge 10$$
$$4X_1 \ge 10$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

2) Min. $Z = 50X_1 + 100X_2$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 = 120$$
$$X_1 \le 100$$
$$X_2 \ge 80$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$





3) Min. $Z = 6X_1 + 4X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 \le 8$$
$$X_1 + X_2 \ge 4$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

س9: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام طريقة المرحلتين:

1) Min. $Z = 30X_1 + 20X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 \ge 16$$
$$X_1 \ge 5$$
$$X_1 + X_2 \ge 12$$
$$X_2 \ge 8$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

2) Min. $Z = 12X_1 + 10X_2$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 \ge 2$$
$$2X_1 + 3X_2 \ge 6$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

س10: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، باستخدام:

1- طريقة (M) الكبيرة.

2- طريقة المرحلتين.

Min. $Z = 600X_1 + 400X_2 + 400X_3$

Sub. to:

$$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \ge 60$$
$$5X_1 + 2X_2 + X_3 \ge 40$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

٤

الفصل الرابع

# النموذج المقابل

## The Dual Model

# الفصل الرابع

# النموذج المقابل

# The Dual Model

## 4-1: مقدمة:

إن لكل نموذج أولي (Primal Model) من نماذج البرمجة الخطية (LP)، يوجد نموذج آخر يدعى بالنموذج المقابل (Dual Model)، وللنموذج المقابل يوجد حل أمثل (Optimal Solution) يتطابق مع الحل الأمثل للنموذج الأولي.

وتتمثل أهمية النموذج المقابل في حل مسائل البرمجة الخطية، بما يأتي:

1- تقليص الجهد الحسابي عند احتواء نموذج البرمجة الخطية الأولي على عدد كبير من القيود، وسرعة الحصول على الحل الأمثل بموجبه، عندما يصعب الحصول عليه في حالة النموذج الأولي.

2- يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل النهائي للنموذج الأولي، والعكس صحيح.

## 4-2: خطوات تحويل النموذج الأولي (Primal) إلى النموذج المقابل (Dual):

1- عكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (.Max) فإنها تصبح تقليل (.Min) في النموذج المقابل، أما إذا كانت دالة الهدف تقليل (.Min) فإنها تصبح تعظيم (.Max) في النموذج المقابل، مع مراعاة تحويل رمز الدالة للنموذج من (Z) إلى (W) في النموذج المقابل.

2- إبدال متغيرات النموذج الأولي من ($X_j$) إلى ($Y_j$) في النموذج المقابل.





3- جعل قيم الثوابت ($b_i$) التي تقع في الطرف الأيمن (.R.H.S) من قيود النموذج الأولي، كمعاملات ($C_j$) للمتغيرات ($Y_j$) في دالة الهدف (W) للنموذج المقابل.

4- جعل معاملات متغيرات دالة الهدف (Z) للنموذج الأولي، كقيم للثوابت التي تقع في الطرف الأيمن (.R.H.S) من القيود الجديدة للنموذج المقابل.

5- إبدال مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود النموذج الأولي ($a_{ij}$)، بحيث تصبح الصفوف أعمدة، والأعمدة صفوف، بمعنى آخر إيجاد [ مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات ($X_{ij}$) ].

6- إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة، أي أن ($Y_j \geq o , \forall_j$).

7- تحويل علامات القيود من أصغر من أو يساوي ($\leq$) إلى أكبر من أو يساوي ($\geq$)، وبالعكس.

**ملاحظات:**

1- في حالة النموذج الأولي، إذا كان [ عدد المتغيرات= n، وعدد القيود = m]، فإنه سيصبح في حالة النموذج المقابل [ عدد المتغيرات= m، وعدد القيود = n].

2- عند تحويل النموذج الأولي (Primal)، إلى النموذج المقابل (Dual)، يجب مراعاة ما يأتي:

أ - يجب أن تكون جميع علامات القيود أصغر من أو يساوي ($\leq$)، عندما تكون دالة الهدف (.Max).

ب- يجب أن تكون جميع علامات القيود أكبر من أو يساوي ($\geq$)، عندما تكون دالة الهدف (.Min).

3- يتطابق الحل الأمثل (Optimal Solution) للنموذج الأولي مع الحل الأمثل للنموذج المقابل، أي أن [$W^* = Z^*$].

4- عند إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual)، فإنه بالإمكان الحصول على الحل الأمثل للنموذج الأولي (Primal) مباشرة من جدول الحل النهائي للنموذج المقابل

(Dual)، ويتمثل هذا الحل بمعاملات دالة الهدف (W) التي تقع تحت المتغيرات الراكدة ($S_i$) أو الاصطناعية ($R_i$) في الجدول.

**مثال (1):**

أكتب النموذج المقابل (Dual) للنماذج الأولية (Primal) الآتية:

1) Max. $Z = X_1 + 3X_2 - 2X_3$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \le 10 \quad y_1$$
$$X_1 + 4X_2 \le 12 \quad y_2$$
$$3X_1 + 5X_3 \le 18 \quad y_3$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

**الحل:**

قبل البدء بكتابة النموذج المقابل، نقوم أولاً بإيجاد مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات ($X_j$) كالآتي:

Y

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Min. $W = 10Y_1 + 12Y_2 + 18Y_3$

Sub. to :

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \ge 1$$
$$Y_1 + 4Y_2 \ge 3$$
$$2Y_1 + 5Y_3 \ge -2$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0$$





2) Min. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub to:

$$10X_1 + 20X_2 \ge 100$$
$$15X_1 + 12X_2 \ge 150$$
$$16X_1 + 18X_2 \ge 200$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

**الحل:**

نقوم أولاً بإيجاد مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات ($X_j$) كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 12 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 16 \\ 20 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Max. $W = 100Y_1 + 150Y_2 + 200Y_3$

Sub. to:

$$10Y_1 + 15Y_2 + 16Y_3 \le 3$$
$$20Y_2 + 12Y_2 + 18Y_3 \le 2$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0$$

3) Max. $Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$

Sub. to:

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 \le 20$$
$$X_1 + 3X_2 \le 18$$
$$2X_2 - 2X_3 \ge 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

الحل:

نقوم أولاً بجعل علامات جميع القيود أقل من أو يساوي (≤)، أي أن:

$$\text{Max. } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

Sub. to:

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 \le 20$$
$$X_1 + 3X_2 \le 18$$
$$-2X_2 + 2X_3 \le -10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

عليه يكتب النموذج المقابل (Dual)، على النحو الآتي:

$$\text{Min. } W = 20Y_1 + 18Y_2 - 10Y_3 \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sub. to:

$$2Y_1 + Y_2 \ge 1$$
$$2Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \ge 2$$
$$-Y_1 + 2Y_3 \ge -3$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0$$

مثال (2):

لديك نموذج البرمجة الخطية (LP) الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \ge 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \ge 40$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

المطلوب:

1- أكتب النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الأولي أعلاه.





2- جد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام الطريقة المبسطة.

الحل:

1- يكتب النموذج المقابل (Dual)، على النحو الآتي:

$$\text{Max. } W = 30Y_1 + 40Y_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Sub. to:

مقابل

$$Y_1 + 4Y_2 \le 2 \Leftarrow X_1 \text{ مقابل}$$
$$3Y_1 + 2Y_2 \le 1 \Leftarrow X_2 \text{ مقابل}$$
$$Y_1, Y_2 \ge 0$$

2- إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل، كالآتي:

$$\text{Max. } W - 30Y_1 - 40Y_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$ معادلة هدفية

Sub. to:

$$Y_1 + 4Y_2 + S_1 = 2$$
$$3Y_1 + 2Y_2 + S_2 = 1$$
$$Y_1, Y_2 \ge 0, S_1, S_2 \ge 0$$

الآن نعمل جدول الحل الابتدائي، على النحو الآتي:

| B.V. | Non- B.V. | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Y_1$ | $Y_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $bi^s$ | Ratio |
| $S_1$ | 1 | 4 | 1 | 0 | = 2 | ½ |
| $S_2$ | 3 | 2 | 0 | 1 | = 1 | ½ |
| W | -30 | -40 | 0 | 0 | = 0 | |

الصف المحوري العنصر المحوري العمود المحوري

$$\therefore \text{Pivot equation} = \left[\frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{4}, \frac{0}{4}, \frac{2}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{New}(W) = \begin{bmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-40) * \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(S_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (2) * \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثاني، كالآتي:

| Basic | Non- B.V. | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Y_1$ | $Y_2$ | $S_1$ | $S_2$ | ($bi^s$) | Ratio |
| $Y_2$ | $1/4$ | 1 | $1/4$ | 0 | $1/2$ | 2 |
| $S_2$ | $5/2$ | 0 | $-1/2$ | 1 | 0 | 0 |
| W | -20 | 0 | 10 | 0 | 20 | |

الصف المحوري العنصر المحوري العمود المحوري

$$\therefore \text{Pivot equation} = \left[1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right]$$





$$\text{New}(W) = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} - (-20) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Y_2) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} - (1/4) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/10 \\ -1/10 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثالث، على النحو الآتي:

| B.V. | Non- B.V. | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|
| | $Y_1$ | $Y_2$ | $S_1$ | $S_2$ | ($bi^s$) |
| $Y_2$ | 0 | 1 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $Y_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 0 |
| W* | 0 | 0 | 6 | 8 | 20 |

بما أن جميع معاملات دالة الهدف ($W^*$) أكبر وتساوي الصفر، أي أن [$C_j \geq 0, \forall_j$]، عليه يكون الحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual) كالآتي:

$Y_1 = 0$

$Y_2 = 1/2$

$W^* = 20$

مثال (3):

لديك نموذج البرمجة الخطية (LP) الآتي:

$$\text{Max.}\quad Z = 2X_1 + 5X_2$$

Sub.to:

$$3X_1 + 5X_2 \le 8$$
$$2X_1 + 7X_2 \le 12$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

**المطلوب:**

1- كتابة النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الأولي السابق.

2- إيجاد الحل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

**الحل:**

1- يكتب النموذج المقابل (Dual) كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Min. } W = 8Y_1 + 12Y_2$$

Sub. to. :

$$3Y_1 + 2Y_2 \ge 2$$
$$5Y_1 + 7Y_2 \ge 5$$
$$Y_1, Y_2 \ge 0$$

2- إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأولي (Primal Model):

$$\text{Max.}\quad Z - 2X_1 - 5X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

Sub.to:

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 \quad\quad = 8$$
$$2X_1 + 7X_2 \quad\quad + S_2 = 12$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \ge 0$$





نقوم بعمل جدول الحل الأولي كالآتي:

| B.V. | Non- B.V. | | | | الثوابت | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | (bi^s) | Ratio |
| $S_1$ | 3 | 5 | 1 | 0 | 8 | $\frac{8}{5}$ |
| $S_2$ | 2 | 7 | 0 | 1 | 12 | $\frac{12}{7}$ |
| Z | −2 | −5 | 0 | 0 | 20 | |

الصف المحوري العنصر المحوري العمود المحوري

$$\therefore \text{ Pivot equation} = \left[\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}, 0, \frac{8}{5}\right]$$

$$\text{New}(S_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix} - (7) * \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \\ 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ 0 \\ -7/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} - (-5) * \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \\ 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول حل ثاني كالآتي:

| B.V. | Non- B.V. | | | | الثوابت |
|---|---|---|---|---|---|
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | ($bi^*$) |
| $X_2$ | $3/5$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $8/5$ |
| $S_2$ | $-11/5$ | 0 | $-7/5$ | 1 | $4/5$ |
| $Z^*$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 |

بما أن جميع قيم المعاملات أكبر وتساوي الصفر، أي أن $[C_j \geq 0, \forall_j]$ ، عليه يكون الحل الأمثل للنموذج الأولي، كالآتي:

$X_1 = 0$

$X_2 = 8/5$

$Z^* = 8$

أما بالنسبة للحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual) فنحصل عليه مباشرة من جدول الحل الأمثل النهائي للنموذج الأولي (Primal) حيث يتمثل الحل الأمثل بمعاملات دالة هدف ($Z^*$) التي تقع أسفل المتغيرات الراكدة ($S_2$,$S_1$) إذ إن:

$Y_1 = 1$

$Y_2 = 0$

$\therefore W^* = Z^* = 8$





## أسئلة حول الفصل الرابع

س1: وضح مفهوم النموذج المقابل (Dual Model)، ذاكراً أهم فوائد استخداماته.

س2: وضح خطوات تحويل النموذج الأولي (Primal Model) إلى النموذج المقابل (Dual Model).

س3: أكتب النموذج المقابل، لنماذج البرمجة الخطية (LP) الآتية:

1) Max. $Z = X_1 - 2X_2$

Sub. to:

$X_1 + 2X_2 = 8$

$2X_1 - X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

2) Min. $Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3$

Sub. to:

$X_1 + 2X_3 \geq 4$

$2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 6$

$3X_1 + X_2 + 2X_3 = 5$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

3) Max. $Z = 2X_1 + 3X_2$

Sub. to:

$X_1 + 2X_2 \geq 20$

$2X_1 + X_2 = 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

س4: إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية (LP) الآتي:

$$\text{Min. } Z = X_1 + 2X_2$$

Sub. to:

$$2X_1 + 6X_2 \geq 60$$
$$8X_1 + 4X_2 \geq 80$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب:

1- أكتب النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الأولي أعلاه.

2- جد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام الطريقة المبسطة.

3- جد الحل الأمثل للنموذج الأولي مباشرة من الحل النهائي للنموذج المقابل.

س5: إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية (LP) الآتي:

$$\text{Min. } Z = X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 \geq 1$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 3$$
$$3X_2 + 4X_3 \geq 6$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب:

1- أكتب النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الأولي أعلاه.

2- جد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام الطريقة المبسطة.

3- جد الحل الأمثل للنموذج الأولي مباشرة من الحل النهائي للنموذج المقابل.



٥

الفصل الخامس

# نموذج النقل

# The Transportation Model

# الفصل الخامس

# نموذج النقل

# The Transporation Model

## 5-1: مقدمة:

تُعد نماذج النقل أحد الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية (LP)، وذات أهمية كبيرة في دراسة إدارة الأعمال الإنتاجية والخدمية واتخاذ القرارات المتعلقة بنقل وتسويق السلع والبضائع المختلفة من مصادر إنتاجها إلى مراكز الاستلام (الاستهلاك) بهدف إيصالها إلى المستهلك الأخير بأقل كلفة ممكنة.

## 5-2: صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

قبل البدء بصياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل، لابد من توضيح وتعريف مكونات جدول النقل الآتي:

| Demand مراكز الطلب / Supply مراكز العرض | $D_1$ | $D_2$ | … | $D_j$ | … | $D_n$ | العرض ($a_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $C_{11}$ $X_{11}$ | $C_{12}$ $X_{12}$ | …. | $C_{1j}$ $X_{1j}$ | … | $C_{1n}$ $X_{1n}$ | $a_1$ |
| $S_2$ | $C_{21}$ $X_{21}$ | $C_{22}$ $X_{22}$ | | $C_{2j}$ $X_{2j}$ | | $C_{2n}$ $X_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | … | … | … | … | … | … | … |
| $S_i$ | $C_{i1}$ $X_{i1}$ | $C_{i2}$ $X_{i2}$ | | $C_{ij}$ $X_{ij}$ | | $C_{in}$ $X_{in}$ | $a_i$ |
| ⋮ | … | … | … | … | … | … | … |
| $S_m$ | $C_{m1}$ $X_{m1}$ | $C_{m2}$ $X_{m2}$ | … | $C_{mj}$ $X_{mj}$ | … | $C_{mn}$ $X_{mn}$ | $a_m$ |
| الطلب ($b_j$) | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_j$ | … | $b_n$ | $\sum_{i}^{m} a_i$ / $\sum_{j}^{n} b_j$ |

حيث أن:

$i = 1,2,3, \ldots, m$
$j = 1,2,3, \ldots, n$

إذ أن:

$S_i$ : يمثل مركز توزيع السلع والبضائع رقم (i).

$D_j$ : يمثل مركز استلام السلع والبضائع رقم (j).

$C_{ij}$ : يمثل تكاليف نقل وتسويق السلع والبضائع من مركز التوزيع (i) إلى مركز الاستلام (j).

$X_{ij}$ : كمية السلع والبضائع المسوقة من مركز التوزيع (i) إلى مركز الاستلام (j).

$a_i$ : كمية البضاعة المعروضة من مركز التوزيع (i).

$b_j$ : كمية البضاعة المطلوبة من مركز الاستلام (j).

وفي ضوء ما تقدم، واعتماداً على المعطيات الواردة في الجدول السابق، يمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

**1- الطريقة الأولى:**

**أولا: دالة الهدف:**

$$Min.\ Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + \ldots + C_{mn}X_{mn}$$

**ثانيا: قيود النموذج:**

أ - قيود مراكز التوزيع:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots + X_{2n} = a_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \ldots + X_{mn} = a_m$$





ب- قيود مراكز الاستلام:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \ldots + X_{m1} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \ldots + X_{m2} = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \ldots + X_{mn} = b_n$$

**ثالثاً: قيد عدم السلبية:**

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{mn} \geq 0$$

**2- الطريقة المختصرة:**

**أولاً: دالة الهدف:**

$$Min.\ Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

**ثانياً: قيود النموذج:**

أ- قيود مراكز التوزيع:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots, m$$

ب- قيود مراكز الاستلام:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1,2,3,\ldots, n$$

**ثالثاً: قيد عدم السلبية:**

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall i, j$$

## 3-5 : أنواع مشاكل النقل:

تقسم مشاكل النقل من حيث توازن جدول النقل أو عدم توازنه إلى ما يأتي:

### 1-3-5: مشاكل النقل المغلق Closed Transportation Problems:

يكون مجموعه الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع، بموجب هذا النوع من مشاكل النقل مساوية إلى الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، وهذا يعني بأن جدول النقل في حالة توازن، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

### 2-3-5: مشاكل النقل المفتوح Opened Transportation Problems:

بموجب هذا النوع من مشاكل النقل، يكون مجموع الكميات المعروضة غير مساوياً إلى مجموع الكميات المطلوبة، وفي هذه الحالة أما أن يكون مجموع الكميات المعروضة أكبر من مجموع الكميات المطلوبة أو بالعكس، وهذا يعني بأن جدول النقل في حالة عدم توازن، ويمكن توضيح ذلك من خلال العلاقات الرياضية الآتية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وتكون العلاقة أعلاه، على حالتين هما:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

وبما أن مشكلة النقل لا يمكن حلها إلا عندما يكون جدول النقل في حالة التوازن، عليه لابد من معالجة الحالة أعلاه وتحويلها إلى حالة التوازن، على النحو الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + D_o$$

إذ أن:





$D_0$ : يمثل مركز استلام وهمي بكلف مساوية للصفر.

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

لمعالجة الحالة أعلاه وتحويلها إلى حالة التوازن، نقوم بالإجراء الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + S_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

إذ أن:

$S_0$ : يمثل مركز توزيع وهمي بكلف مساوية للصفر.

## 4-5: الطرق المستخدمة لحل مشاكل النقل:

من أجل التوصل إلى حل مشاكل النقل، لابد من اعتماد طريقة واحدة لكل نوع من أنواع الحلول الآتية:

**أولاً: طرق إيجاد الحل الممكن Feasible Solution Methods:**

1- طريقة الركن الشمالي الغربي North - West Corner Method.

2- طريقة التوزيع العشوائي Random Distribution Method.

**ثانياً: طرق إيجاد الحل الأفضل Best Solution Methods:**

1- طريقة العنصر الأقل كلفة Least Cost Method.

2- طريقة فوجل Vogel's Method.

**ثالثاً: طرق إيجاد الحل الأمثل Optimal Solution Methods:**

1- طريقة عوامل الضرب Multipliers Method.

2- طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method.

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لطريقة واحدة لكل نوع من الحلول الثلاثة أعلاه، وكالآتي:

**5-4-1: إيجاد الحل الممكن:**

لإيجاد الحل الممكن (Feasible Solution) لمشكلة النقل، نقوم باستخدام طريقة 'الركن الشمالي الغربي'، والتي يمكن توضحها كالآتي:

- **طريقة الركن الشمالي العربي The North - West Corner Method:**

تُعد هذه الطريقة من أبسط طرق حل مشاكل النقل، وأن تطبيق هذه الطريقة ينطلق من اختيار خلية النقل الأولى والتي تقع في الصف الأول (الشمالي) والعمود الأول (الغربي) من جدول النقل، معتمدين بذلك العلاقة الرياضية الآتية:

$$\boxed{X_{11} = \text{Min}\,(a_1, b_1)}$$

مع مراعاة تخصيص أقل الكميتين ($a_1$) و ($b_1$) للخلية ($X_{11}$)، وتعديل كمية العرض والطلب للجدول بعد الانتهاء من تخصيص الكمية المطلوبة.

وبعد التأكد من أن جميع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع قد نفذت، تكون في هذه الحالة قد توصلنا إلى الحل الممكن لمشكلة النقل، بموجب هذه الطريقة.

**مثال (1):**

البيانات التالية، تمثل الكميات المعروضة من مراكز التوزيع والكميات المطلوبة من مراكز الاستلام، ومصفوفة تكاليف نقل الطن الواحد من مادة الإسمنت المقاوم من مصادر إنتاجها إلى مراكز الاستلام، ليتم توزيعها على تجار التجزئة.

| مراكز التوزيع | الكميات المعروضة | | مراكز الاستلام | الكميات المطلوبة |
|---|---|---|---|---|
| الزرقاء (1) | 1500 طن | | عمان (1) | 750 طن |
| جرش (2) | 1000 طن | | الكرك (2) | 1750 طن |
| السلط (3) | 1500 طن | | اربد (3) | 250 طن |
| | | | المفرق (4) | 250 طن |





وإن مصفوفة تكاليف النقل ($C_{ij}$) هي:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 \\ 14 & 17 & 5 & 2 \\ 18 & 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

**المطلوب:**

جد الحل الممكن للمشكلة بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min)، مستخدماً طريقة 'الركن الشمالي الغربي'.

**الحل:**

نقوم بتفريغ البيانات أعلاه، في جدول النقل الآتي:

| مراكز الاستلام / مراكز التوزيع | عمان (1) | الكرك (2) | اربد (3) | المفرق (4) | العرض ($a_i$) |
|---|---|---|---|---|---|
| الزرقاء (1) | 10 $X_{11}$ 750 | 8 750 | 6 | 4 | ~~1500~~ ~~750~~ 0 |
| جرش (2) | 14 | 17 1000 | 5 | 2 | ~~1000~~ 0 |
| السلط (3) | 18 | 7 | 11 250 | 9 1250 | ~~1500~~ ~~1250~~ 0 |
| الطلب ($b_j$) | ~~750~~ 0 | ~~1750~~ ~~1000~~ 0 | ~~250~~ 0 | ~~1250~~ 0 | 4000 / 4000 |

نبدأ بالخلية ($X_{11}$) التي تقع في الركن الشمالي الغربي، ونقوم بتحديد الكمية المطلوب تخصيصها لهذه الخلية وفقاً للعلاقة الرياضية الآتية:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \text{Min}\,(a_1, b_1) \\ &= \text{Min}\,(1500, 750) \\ &= 750 \end{aligned}$$

نقوم بوضع الكمية (750) طن في الخلية ($X_{11}$)، ويتم طرحها من الكمية المعروضة من مركز الزرقاء (1) وكذلك من الكمية المطلوبة من مركز عمان (1)،

وهكذا نستمر بعملية التخصيص حتى نتهي من توزيع جميع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع على مراكز الاستلام، وعلى النحو الآتي:

$$X_{12} = \text{Min}(a_1, b_2)$$
$$= \text{Min}(750, 1750)$$
$$= 750$$

$$X_{22} = \text{Min}(a_2, b_2)$$
$$= \text{Min}(1000, 1000)$$
$$= 1000$$

$$X_{33} = \text{Min}(a_3, b_3)$$
$$= \text{Min}(1500, 250)$$
$$= 250$$

$$X_{34} = \text{Min}(a_3, b_4)$$
$$= \text{Min}(1250, 1250)$$
$$= 1250$$

عليه تكون التكاليف النهائية (Total Costs) لعملية نقل مادة الإسمنت المقاوم كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 10X_{11} + 8X_{12} + 17X_{22} + 11X_{33} + 9X_{34}$$
$$= 10(750) + 8(750) + 17(1000) + 11(250) + 9(1250)$$
$$= 44500 \text{ JD.}$$

### 2-4-5: إيجاد الحل الأفضل:

لإيجاد الحل الأفضل (Best Solution) لمشكلة النقل، نستخدم لذلك طريقة "العنصر الأقل كلفة"، والتي يمكن توضيحها على النحو الآتي:





- **طريقة العنصر الأقل كلفة The Least Cost Method:**

أن من المآخذ على طريقة الركن الشمالي الغربي هو عدم الاستفادة من كلف النقل القليلة في مصفوفة التكاليف ($C_{ij}$) عند نقل وتسويق الكميات المطلوبة من مراكز الاستلام (الطلب)، أو إن عدد الخانات المملوءة بالكميات المسوقة لا تحقق العلاقة ($n + m-1$)، مما يتطلب البحث عن طريقة بديلة لتحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل، ويتمثل ذلك بطريقة العنصر الأقل كلفة.

ولإيجاد الحل الأفضل بموجب هذه الطريقة، نتبع الخطوات الآتية:

1- اختيار العنصر الأقل كلفة في مصفوفة تكاليف جدول النقل ($C_{ij}$)، وتحديد الكمية المطلوب تسويقها ($X_{ij}$) إلى مركز الاستلام، وفقاً للعلاقة الرياضية الآتية:

$$X_{ij} = \text{Min}(a_i, b_j)$$

مع مراعاة تعديل الكميات المعروضة ($a_i$) والكميات المطلوبة ($b_j$) بعد كل عملية تخصيص (تسويق).

2- بعد ذلك يتم اختيار العنصر الأقل كلفة التالي في مصفوفة التكاليف ($C_{ij}$)، وتحديد الكمية المطلوب تسويقها ($X_{ij}$) إلى مركز الاستلام الآخر وفقاً للعلاقة الرياضية السابقة، وهكذا حتى يتم التحقق من تسويق جميع الكميات المعروضة، وبهذا نكون قد توصلنا إلى الحل الأفضل لمشكلة النقل.

**مثال (2):**

جد الحل الأفضل لبيانات مشكلة النقل الواردة في المثال (1)، مستخدماً طريقة "العنصر الأقل كلفة" بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min):

الحل:

| مراكز الاستلام / مراكز الإنتاج | عمان (1) | الكرك (2) | اربد (3) | القرق (4) | العرض $(a_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الزرقاء (1) | 10 / 750 | 8 / 250 | 6 / 250 | 4 / 250 | ~~1500~~ ~~1250~~ ~~1000~~ ~~750~~ 0 |
| جرش (2) | 14 | 17 | 5 | 2 / 1000 | ~~1000~~ 0 |
| السلط (3) | 18 | 7 / 1500 | 11 | 9 | ~~1500~~ 0 |
| الطلب $(b_j)$ | ~~750~~ 0 | ~~1750~~ ~~250~~ 0 | ~~250~~ 0 | ~~1250~~ ~~250~~ 0 | 4000 / 4000 |

1- اختيار العنصر الأقل كلفة وهو $(C_{24} = 2)$، عليه فإن:

$X_{24} = \text{Min}(a_2, b_4)$

$= \text{Min}(1000, 1250)$

$= 1000$

2- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{14}=4)$، عليه فإن:

$X_{14} = \text{Min}(a_1, b_4)$

$= \text{Min}(1500, 250)$

$= 250$

3- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{13} = 6)$، عليه فإن:

$X_{13} = \text{Min}(a_1, b_3)$

$= \text{Min}(1250, 250)$

$= 250$

4- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{32}=7)$، عليه فإن:





$X_{32} = \text{Min}(a_3, b_2)$

$= \text{Min}(1500, 1750)$

$= 1500$

5- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{12} = 8)$، عليه فإن:

$X_{12} = \text{Min}(a_1, b_2)$

$= \text{Min}(1000, 250)$

$= 250$

6- العنصر الأقل كلفة التالي والأخير هو $(C_{11}=10)$، عليه فإن:

$X_{11} = \text{Min}(a_1, b_1)$

$= \text{Min}(750, 750)$

$= 750$

إذن التكاليف الكلية (TC) لعملية نقل مادة الإسمنت المقاوم، هي كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 10X_{11} + 8X_{12} + 6X_{13} + 4X_{14} + 2X_{24} + 7X_{32}$$

$$= 10(750) + 8(250) + 6(250) + 4(250) + 2(1000) + 7(1500)$$

$$= 24500 \text{ JD.}$$

### 5-4-3: إيجاد الحل الأمثل:

لإيجاد الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة النقل، نقوم باستخدام طريقة 'عوامل الضرب' والتي يمكن توضيحها على النحو الآتي:

- **طريقة عوامل الضرب The Multipliers Methods :**

تُعد هذه الطريقة من أفضل الطرق المستخدمة للحصول على الحل الأمثل، إذ تعتمد هذه الطريقة على النتائج النهائية التي يتم التوصل إليها بموجب طريقة 'العنصر الأقل كلفة'، وتتلخص خطوات طريقة عوامل الضرب بالآتي:

1 - تخصيص مؤشرات للصفوف تتمثل بـ $(U_i)$ وللأعمدة تتمثل بـ $(V_j)$ يتم تثبيتها على جدول الحل النهائي لطريقة العنصر الأقل كلفة.

2- صياغة عدد من العلاقات الرياضية، اعتماداً على تكاليف الخلايا المملوءة، وفقاً للصيغة الآتية:

$C_{ij} = U_i + V_j$

3- إيجاد حل العلاقات الرياضية المستحصل عليها في الخطوة (2)، بعد افتراض قيمة $(U_1=0)$.

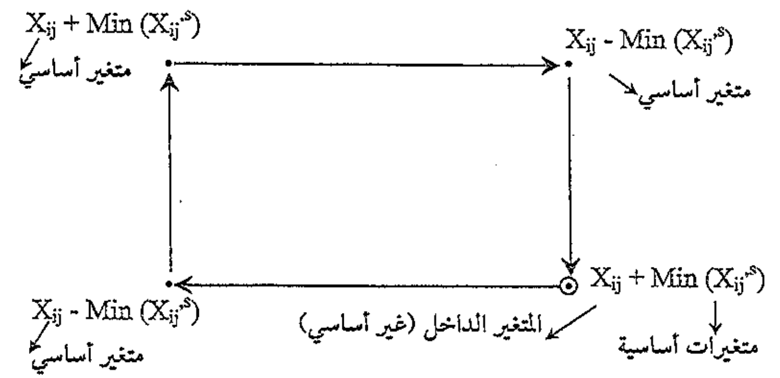
4- إيجاد تكاليف جديدة $(\hat{C}_{ij})$ للخلايا غير المملوءة، وفقاً للصيغة الآتية:

$\hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

5- (أ) في حالة الحصول على قيم موجبة إلى جميع التكاليف الجديدة، أي أن $(\hat{C}_{ij} \geq 0)$، فهذا يعني بأنه تم التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة.

(ب) أما في حالة ظهور قيم سالبة لبعض التكاليف الجديدة، أي أن $(\hat{C}_{ij} < 0)$ ففي هذه الحالة يتم تحديد المتغير الداخل (Entering Variable) على أساس أكبر قيمة سالبة.

6- تحديد المتغير الخارج (Leaving Variable) وفقاً للمسار المغلق الذي يبدأ بالمتغير الداخل (المتغير غير الأساسي) ويجب أن ينتهي فيه، كما موضح بالشكل الآتي:




7- بعد الانتهاء من تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج، نقوم بإعادة ترتيب الكميات الخاصة بالمسار المغلق أعلاه في جدول نقل آخر.





8- نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة، حتى يتم الحصول على قيم موجبة للتكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ أي أن $(\hat{C}_{ij} \geq 0)$ والتي من خلالها يتحقق الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (3):

استخدم النتائج النهائية المستحصل عليها بموجب طريقة العنصر الأقل كلفة الواردة في المثال (2) السابق:

المطلوب:

جد الحل الأمثل لمشكلة النقل، بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min)، مستخدماً طريقة عوامل الضرب.

الحل:

يوضح الجدول التالي النتائج النهائية المستحصل عليها من تطبيق طريقة (العنصر الأقل كلفة):

| | مراكز الاستلام / مراكز الإنتاج | $V_1$ عمان (1) | $V_2$ الكرك (2) | $V_3$ اربد (3) | $V_4$ المفرق (4) | العرض ($a_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | الزرقاء (1) | 10 / 750 | 8 / 250 | 6 / 250 | 4 / 250 | 1500 |
| $U_2$ | جرش (2) | 14 | 17 | 5 | 2 / 1000 | 1000 |
| $U_3$ | السلط (3) | 18 | 7 / 1500 | 11 | 9 | 1500 |
| | الطلب ($b_j$) | 750 | 1750 | 250 | 1250 | 4000 / 4000 |

وللحصول على الحل الأمثل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، نتبع الخطوات الآتية:

1- تخصيص المؤشرات ($U_i$) و ($V_j$) للصفوف والأعمدة على الترتيب، وتكوين عدد من العلاقات الرياضية، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\because\ U_i + V_j = C_{ij}$$

$$\therefore\ U_1 + V_1 = C_{11} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_1 = 10$$

$$U_1 + V_2 = C_{12} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_2 = 8$$

$$U_1 + V_3 = C_{13} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_3 = 6$$

$$U_1 + V_4 = C_{14} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_4 = 4$$

$$U_2 + V_4 = C_{24} \Rightarrow \therefore\ U_2 + V_4 = 2$$

$$U_3 + V_2 = C_{32} \Rightarrow \therefore\ U_3 + V_2 = 7$$

2- إيجاد حل العلاقات الرياضية أعلاه، بعد افتراض ($U_1$=0) نحصل على:

$$0 + V_1 = 10 \Rightarrow\ \therefore\ V_1 = 10$$

$$0 + V_2 = 8 \Rightarrow\ \therefore\ V_2 = 8$$

$$0 + V_3 = 6 \Rightarrow\ \therefore\ V_3 = 6$$

$$0 + V_4 = 4 \Rightarrow\ \therefore\ V_4 = 4$$

$$U_2 + 4 = 2 \Rightarrow\ \therefore\ U_2 = -2$$

$$U_3 + 8 = 7 \Rightarrow\ \therefore\ U_3 = -1$$

3- إيجاد التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ للخلايا غير المملوءة كالآتي:

$$\because\ \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\therefore\ \hat{C}_{21} = C_{21} - U_2 - V_1$$

$$= 14 - (-2) - 10$$

$$= 6$$

$$\hat{C}_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$$

$$= 17 - (-2) - 8$$

$$= 11$$





$$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$$

$$= 5 - (-2) - 6$$

$$= 1$$

$$\hat{C}_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$$

$$= 18 - (-1) - 10$$

$$= 9$$

$$\hat{C}_{33} = C_{33} - U_3 - V_3$$

$$= 11 - (-1) - 6$$

$$= 6$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$$

$$= 9 - (-1) - 4$$

$$= 6$$

4- بما أن قيم التكاليف الجديد $(\hat{C}_{ij})$ للخلايا المملوءة موجبة $(\hat{C}_{ij} > 0)$ عليه تم التوصل إلى الحل الأمثل وعنده تكون التكاليف الكلية (TC) النهائية كالآتي:

Min. $Z = 24500$ JD.

مثال (4):

البيانات التالية، توضح الكميات المنتجة بواسطة إحدى الشركات، والكميات المطلوبة من خلال مناطق الاستهلاك (4, 3, 2, 1)، وتكاليف نقل المنتجات من مراكز الإنتاج (1، 2، 3) إلى مناطق الاستهلاك المذكورة.

| مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج | المنطقة (1) | المنطقة (2) | المنطقة (3) | المنطقة (4) | الكميات المنتجة $(a_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| المركز (1) | 20 | 17 | 15 | 10 | 130 |
| المركز (2) | 16 | 14 | 18 | 13 | 50 |
| المركز (3) | 12 | 15 | 11 | 19 | 100 |
| الكميات المطلوبة $(b_j)$ | 40 | 40 | 80 | 120 | 280 / 280 |

المطلوب:

1- جد الحل الأفضل لمشكلة النقل، مستخدماً طريقة (العنصر الأقل كلفة).

2- اختبار أمثلية الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب).

الحل:

1- حل مشكلة النقل باستخدام طريقة (العنصر الأقل كلفة):

نقوم بتوزيع الكميات المنتجة $(a_i)$على مناطق الاستهلاك بموجب هذه الطريقة، وفقاً للصيغة الآتية:

$$X_{ij} = Min\ (a_i, b_j)$$





| | مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج | $V_1$ المنطقة (1) | $V_2$ المنطقة (2) | $V_3$ المنطقة (3) | $V_4$ المنطقة (4) | الكميات المنتجة $(a_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | المركز (1) | 20 / 10 | 17 | 15 | 10 / 120 | ~~130~~ ~~10~~ 0 |
| $U_2$ | المركز (2) | 16 / 10 | 14 / 40 | 18 | 13 | ~~50~~ ~~10~~ 0 |
| $U_3$ | المركز (3) | 12 / 20 | 15 | 11 / 80 | 19 | ~~100~~ ~~20~~ 0 |
| | الكميات المطلوبة $(b_j)$ | ~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0 | ~~40~~ 0 | ~~80~~ 0 | ~~120~~ 0 | 280 / 280 |

أ - العنصر الأقل كلفة هو $(C_{14} = 10)$، عليه فإن:

$$X_{14} = Min\ (a_1, b_4)$$
$$= Min\ (130, 120)$$
$$= 120$$

ب- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{33}=11)$، عليه فإن:

$$X_{33} = Min\ (a_3, b_3)$$
$$= Min\ (100, 80)$$
$$= 80$$

جـ- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{31}=12)$، عليه فإن:

$$X_{31} = Min\ (a_3, b_1)$$
$$= Min\ (20, 40)$$
$$= 20$$

د - العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{22} = 14)$، عليه فإن:

$X_{22} = Min (a_2, b_2)$

$= Min (50, 40)$

$= 40$

هـ- العنصر الأقل كلفة التالي هو ($C_{21}= 16$)، عليه فإن:

$X_{21} = Min (a_2, b_1)$

$= Min (10,20)$

$= 10$

د - العنصر الأقل كلفة التالي والأخير هو ($C_{11}=20$)، عليه فإن:

$X_{11} = Min (a_1, b_1)$

$= Min (10,10)$

$= 10$

عليه تكون التكاليف الكلية (TC)النهائية لنقل وتسويق المنتجات من مراكز الإنتاج (1، 2، 3) إلى مناطق الاستهلاك (4, 3, 2, 1)، على النحو الآتي:

$$Min.\ Z = 20^* X_{11}+ 10^*X_{14} + 16\ ^*X_{21} + 14^*X_{22}+ 12^*X_{31}+ 11^*X_{33}$$
$$= 20\ (10) + 10(120) + 16\ (10)+ 14(40) + 12(20) + 11(80)$$
$$= 200 + 1200 + 160 + 560 + 240 + 880$$
$$= 3240\ \ JD.$$

**2- إختبار أمثلية الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب):**

لاختبار أمثلية الحل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، تتبع الخطوات الآتية:

أ - تخصيص المؤشرات ($U_i$) للصفوف تتمثل بـ [$U_3, U_2, U_1$]، وأخرى ($V_j$) للأعمدة تتمثل [$V_4, V_3, V_2, V_1$]، على أصل جدول الحل النهائي لطريقة (العنصر الأقل كلفة)، وكما هي موضحة على أصل الجدول السابق.





ب- اعتماد تكاليف الخلايا المملوءة (المشغولة)، لصياغة عدد من العلاقات الرياضية، وفقا للصيغة الآتية:

$\because U_i + V_j = C_{ij}$

| | | |
|---|---|---|
| $\therefore U_1 + V_1 = 20 \Rightarrow$ | Let | $U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_1 = 20$ |
| $U_1 + V_4 = 10 \Rightarrow$ | $\because$ | $U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_4 = 10$ |
| $U_2 + V_1 = 16 \Rightarrow$ | $\because$ | $V_1 = 20 \rightarrow \therefore U_2 = -4$ |
| $U_2 + V_2 = 14 \Rightarrow$ | $\because$ | $U_2 = -4 \rightarrow \therefore V_2 = 18$ |
| $U_3 + V_1 = 12 \Rightarrow$ | $\because$ | $V_1 = 20 \rightarrow \therefore U_3 = -8$ |
| $U_3 + V_3 = 11 \Rightarrow$ | $\because$ | $U_3 = -8 \rightarrow \therefore V_3 = 19$ |

جـ- إيجاد التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) للخلايا غير المملوءة (غير المشغولة)، وفقا للصيغة الآتية:

$\because \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\therefore \hat{C}_{12} = C_{12} - U_1 - V_2$

$= 17 - 0 - 18$

$= -1$

$\hat{C}_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$

$= 15-0-19$

$= -4$

$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$

$= 18-(-4) -19$

$= 3$

$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4$

$= 13 - (-4) - 10$

$= 7$

$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2$

$= 15 - (-8) - 18$

$= 5$

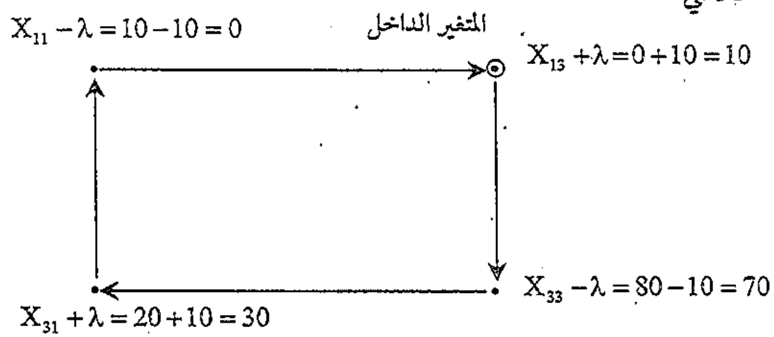
$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$

$= 19 - (-8) - 10$

$= 17$

د - نظرا لحصولنا على قيم سالبة لبعض التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$، أي أن بعض التكاليف $(\hat{C}_{ij} < 0)$، عليه فإن المتغير الداخل هو $(X_{13})$ كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة، والبالغة $(\hat{C}_{13} = -4)$.

هـ- عمل مسار مغلق يبدأ بمتغير الخلية $(X_{13})$ وينتهي به، لتحديد المتغير الخارج كالآتي:




أن تحديد قيمة $(\lambda)$ يتم على أساس أقل قيمة للمتغيرات $[X_{11}, X_{31}, X_{33}]$، أي أن:

$\lambda = \text{Min}(X_{33}, X_{31}, X_{11})$

$= \text{Min}(80, 20, 10)$

$= 10$





و- عمل جدول نقل جديد، يحتوي على الكميات $(X_{ij})$ الجديدة المعدلة، على النحو الآتي:

| | مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج | $V_1$ المنطقة (1) | $V_2$ المنطقة (2) | $V_3$ المنطقة (3) | $V_4$ المنطقة (4) | الكميات المنتجة $(a_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | المركز (1) | [20] | [17] | [15] 10 | [10] 120 | 130 |
| $U_2$ | المركز (2) | [16] 10 | [14] 40 | [18] | [13] | 50 |
| $U_3$ | المركز (3) | [12] 30 | [15] | [11] 70 | [19] | 100 |
| | الكميات المطلوبة $(b_j)$ | 40 | 40 | 80 | 120 | 280 / 280 |

نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة على تكاليف الجدول الجديد، حتى يتم الحصول على جميع قيم التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ موجبة، أي أن $(\hat{C}_{ij} > 0)$، وكالآتي:

$\because U_i + V_i = C_{ij}$

$\therefore U_1 + V_3 = 15 \Rightarrow \text{Let } U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_3 = 15$

$U_1 + V_4 = 10 \Rightarrow \because U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_4 = 10$

$U_2 + V_1 = 16 \Rightarrow \because V_1 = 16 \rightarrow \therefore U_2 = 0$

$U_2 + V_2 = 14 \Rightarrow \because U_2 = 0 \rightarrow \therefore V_1 = 14$

$U_3 + V_1 = 12 \Rightarrow \because U_3 = -4 \rightarrow \therefore V_1 = 16$

$U_3 + V_3 = 11 \Rightarrow \because V_3 = 15 \rightarrow \therefore U_3 = -4$

بعد ذلك نقوم بإيجاد التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$، كالآتي:

$\because \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\therefore \hat{C}_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 20 - 0 - 16 = 4$

$$\hat{C}_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 17 - 0 - 14 = 3$$
$$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 18 - 0 - 15 = 3$$
$$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 13 - 0 - 10 = 3$$
$$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 15 - (-4) - 14 = 5$$
$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4 = 19 - (-4) - 10 = 13$$

يتضح من أعلاه بأن جميع قيم التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ موجبة، أي أن $(\hat{C}_{ij} > 0)$، عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، وبالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية (TC) تكون كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 15\,(10) + 10\,(120) + 16\,(10) + 14(40) + 12\,(30) + 11(70)$$
$$= 150 + 1200 + 160 + 560 + 360 + 770$$
$$= 3200 \text{ JD.}$$

وبمقارنة التكاليف النهائية (Z) لطريقة (عوامل الضرب) والبالغة (3200) دينار مع التكاليف النهائية (Z) لطريقة (العنصر الأقل كلفة) والبالغة (3240)) دينار، نجد بأن تكاليف طريقة (عوامل الضرب) تقل بمقدار (40)دينار عن تكاليف طريقة (العنصر الأقل كلفة).





# أسئلة حول الفصل الخامس

س1: أكتب بالتفصيل الصيغة العامة لجدول النقل، موضحا مكونات الجدول.

س2: أكتب الصيغة العامة للنموذج الرياضي لمشكلة النقل بالطريقتين المختصرة والمطولة.

س3: إشرح بالتفصيل أنواع مشاكل النقل، موضحا أهم المعالجات في حالة عدم توازن جدول النقل.

س4: وضح التفسير العلمي للعلاقات الرياضية الآتية:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$

س5: أذكر الاحتمالات الممكنة للعلاقة الرياضية التالية، مع ذكر أهم المعالجات الرياضية لكل حالة:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

س6: أذكر فقط الطرق المستخدمة في حل مشاكل النقل.

س7: إشرح بالتفصيل خطوات حل مشكلة النقل باستخدام طريقة (الركن الشمالي الغربي).

س8: وضح بالتفصيل خطوات حل مشكلة النقل باستخدام طريقة (العنصر الأقل كلفة).

س9: وضح بالتفصيل خطوات حل مشكلة النقل باستخدام طريقة (عوامل الضرب).

س10: الجدول التالي، يوضح تكاليف نقل مادة معينة من مصادر إنتاجها (مراكز التوزيع) [$P_3, P_2, P_1$] إلى (4) أربعة وكلاء [$A_4, A_3, A_2, A_1$].

| الوكلاء / مصادر الإنتاج | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | A4 | العرض ($a_i$) |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 8 | 6 | 4 | 2 | 2000 |
| $P_2$ | 12 | 15 | 3 | 0 | 1300 |
| $P_3$ | 16 | 5 | 9 | 7 | 1700 |
| الطلب ($b_j$) | 1000 | 2000 | 500 | 1500 | 5000 / 5000 |

المطلوب:

إيجاد خطة النقل المثلى بحيث تكون التكاليف الكلية (TC) النهائية أقل ما يمكن (Min)، مستخدما الطرق الآتية:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي.

2- طريقة العنصر الأقل كلفة.

3- طريقة عوامل الضرب.



٦

الفصل السادس

# نماذج النقل متعددة المراحل

## The Multistages Transportation Models

# الفصل السابع

# نموذج التخصيص

# The Assignment Model

## 7-1: مقدمة:

يُعد نموذج التخصص حالة خاصة من نماذج النقل، والمشكلة في هذا النوع من النماذج تتعلق باختيار أفضل تخصيص يُؤدي إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح (العوائد).

ويُعرف نموذج التخصيص بأنــه: ((نمـوذج للبرمجـة الخطيـة ذو أغـراض خاصـة يستخدم في حل المشكلات التي تستدعي توزيع المهام على المـوارد المتاحـة (كالعمـال والأجهزة والآلات ومراكز الخدمة .... إلخ) للتوصـل إلى الملائمة المثلى بـين المهام والموارد المتاحة)).

كما يُعرف نموذج التخصيص بأنه: ((أسلوب رياضي يُستخدم من قبل متخـذي القرار في منظمات الأعمال، بهدف اختيـار عـدد مـن التخصيصـات الـتي تـؤدي إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح)).

ولنموذج التخصيص عدد من الاستخدامات والتطبيقـات في الواقـع العملـي، نذكر منها ما يأتي:

1- تخصيص عدد معين من الأجهزة لإنجاز عدد من المهام.
2- تخصيص عدد معين من العمال لإنجاز عدد من الأعمال.
3- تخصيص عدد معين من المدراء على عدد من المناصب الإدارية.
4- تخصيص عدد معين من الباصات على عدد من الخطوط الخارجية.
5- تخصيص عدد معين من الوكلاء على عدد من المناطق الجغرافية .

## 2-7: صياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص:

قبل البدء من صياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص، لابد من تحديد خصائص هذا الأسلوب والتي تُعد أساساً لبناء أو صياغة النموذج وهي:

1- يجب أن يكون عدد الصفوف مساوياً إلى عدد الأعمدة، أي أن $(m = n)$، في جدول نموذج التخصيص، بمعنى آخر يجب أن يكون عدد الوسائل (Agents) مساوياً إلى عدد المهام (Tasks) في الجدول.

2- يتم تخصيص وسيله واحدة (One Agent) لإنجاز مهمة واحدة (One Task) ويمكن التعبير عن ذلك عادة بأسلوب (One - to - one)

3- أن قيمة المتغير الأساسي $(X_{ij})$ لكل قيم $(i, j)$، تأخذ أحد قيمتين (0) أو (1)، أي أن $[X_{ij} = \{0 \text{ or } 1\}, \forall (i, j)]$، ولا يجوز أن يأخذ الأعداد الكسرية.

4- يُرمز إلى تكاليف التخصيص بالرمز $(C_{ij})$، ونعني بذلك كلفة تخصيص $(i)$ من الوسائل، لإنجاز $(j)$ من المهام، حيث أن $[j = 1, 2, 3, \ldots n, i = 1, 2, 3, \ldots m]$ كما هي موضحة بالجدول الآتي:

| الوسائل \ المهام | 1 | 2 | ... | n | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $C_{11}$ | $C_{12}$ | ... | $C_{1n}$ | 1 |
| 2 | $C_{21}$ | $C_{22}$ | ... | $C_{2n}$ | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ... | 1 |
| m | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | ... | $C_{mn}$ | 1 |
| $b_j$ | 1 | 1 | ... | 1 | m \ n |

وبالاعتماد على خصائص النموذج والبيانات الواردة بالجدول السابق، يمكن صياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص، على النحو الآتي:





(1) دالة الهدف:

$$Min. = Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

(2) قيود النموذج:

أ- قيود الوسائل:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = 1$$
$$X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} = 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$X_{mn} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = 1$$

ب- قيود المهام:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1, 2, 3, \ldots n$$

$$X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = 1$$

(3) قيد عدم السلبية:

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \quad (\forall i, j)$$

حيث أن:

$$X_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

## 7-3: الطرق المستخدمة في حل نموذج التخصيص:

هناك عدة طرق يمكن اعتماد أحدها للوصول إلى الحل الأمثل لنموذج التخصيص، نذكر منها:

1- طريقة العد الكامل Complete Enumeration Method.

2- الطريقة الهنكارية Hungarian Method.

وفيما يلي شرحاً مفصلاً للطريقتين المذكورتين:

### 7-3-1: طريقة العد الكامل Complete Enumeration Method:

تُعد طريقة العد الكامل من أبسط الطرق المستخدمة في عملية حل نموذج التخصيص عندما لا يتجاوز عدد المهام أو الوسائل (ثلاثة) لكل منهما، إذ يتم بموجبها تحديد جميع البدائل لعملية التوزيع [حساب جميع الاحتمالات الممكنة لعملية التخصيص]، ويتم ذلك وفقاً لقاعدة (المفكوك - Factorial) التالية، مثال ذلك: إذا كانت رتبة مصفوفة التكاليف (mxn) فإن:

$$\boxed{n! = n\,(n-1)(n-2)\ \dots\ 3\ (2)\ (1)}$$

**مثال (1):**

مصنع يرغب في تعيين (3) ثلاثة عمال (C, B, A) لإنجاز (3) ثلاث مهام هي (3, 2, 1)، وقد كانت تكاليف إنجاز هذه المهام موضحة بالجدول الآتي:





| العمال | المهام 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| A | 15 | 14 | 8 |
| B | 4 | 9 | 7 |
| C | 7 | 2 | 9 |

المطلوب: جد أفضل تخصيص للعمال على المهام بحيث تكون التكاليف الكلية (TC) أقل ما يمكن (Min.)، مستخدماً طريقة العد الكامل.

**الحل:**

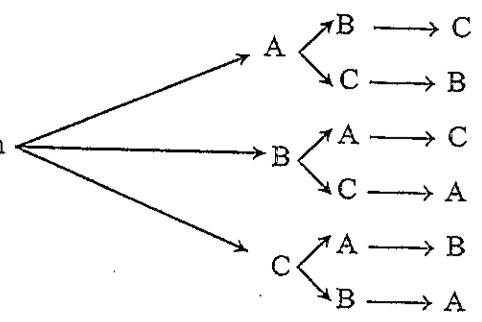
(1) تحديد عدد البدائل الممكنة لعملية التخصيص كالآتي:

$\because n = m = 3$

$\therefore n! = 3(2)\,(1)$

$= 6$ عدد البدائل

∴ Tree Diagram




| عدد البدائل |
|---|
| A, B, C |
| A, C, B |
| B, A, C |
| B, C, A |
| C, A, B |
| C, B, A |

(2) نقوم بوضع البدائل الستة أمام المهام الثلاث في الجدول التالي، وحساب التكاليف الكلية (TC) كالآتي:

| البدائل | المهام | | | مجموع تكاليف البدائل | التكاليف الكلية (TC) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | | |
| 1 | A | B | C | 15 + 9 + 9 | 33 |
| 2 | A | C | B | 15 + 2 + 7 | 24 |
| 3 | B | A | C | 4 + 14 + 9 | 27 |
| 4 | B | C | A | 4 + 2 + 8 | 14 → Min. |
| 5 | C | A | B | 7 + 14 + 7 | 28 |
| 6 | C | B | A | 7 + 9 + 8 | 24 |

(3) يتضح من الجدول السابق، بأن البديل الرابع (4) هو البديل الأفضل، كونه حقق أقل التكاليف (.Min) وقدرها (14) دينار، وعليه فإن أفضل تخصيص هو:

أ- تعيين العامل (B) لإنجاز المهمة (1).

ب- تعيين العامل (C) لإنجاز المهمة (2).

جـ- تعيين العامل (A) لإنجاز المهمة (3).

(4) عليه تكون التكاليف الكلية (TC) المتحققة بموجب هذا التخصيص هي:

$TC = 4 + 2 + 8 \rightarrow$ Min.

$= 14$ JD

مثال (2):

شركة ترغب في تعيين (3) ثلاثة مدراء (C, B, A) لأشغال (3) ثلاثة وظائف إدارية (3, 2, 1) وقد كانت الأرباح المتحققة عن إشغال هذه الوظائف موضحة بالجدول الآتي:





| المدراء | الوظائف | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| A | 13 | 7 | 5 |
| B | 8 | 6 | 7 |
| C | 9 | 2 | 12 |

المطلوب:

جد أفضل تخصيص للمدراء على الوظائف بحيث تكون الأرباح المتحققة (Profits) أكبر ما يمكن (.Max)، مستخدماً طريقة العد الكامل.

الحل:

(1) تحديد عدد البدائل الممكنة لعملية التخصيص، على النحو الآتي:

$\because n = m = 3$

$\therefore n! = 6$ عدد البدائل

(2) وضع البدائل الستة أمام الوظائف الثلاث في الجدول التالي، وحساب الأرباح المتحققة (Profits) كالآتي:

| البدائل | الوظائف | | | مجموع أرباح البدائل | الأرباح المتحققة (Profits) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | | |
| 1 | A | B | C | 13 + 6 + 12 | 31 → Max. |
| 2 | A | C | B | 13 + 2 + 7 | 22 |
| 3 | B | A | C | 8 + 7 + 12 | 27 |
| 4 | B | C | A | 8 + 2 + 5 | 15 |
| 5 | C | A | B | 9 + 7 + 7 | 23 |
| 6 | C | B | A | 9 + 6 + 5 | 20 |

يتضح من الجدول السابق، بأن البديل الأول (1) هو البديل الأفضل، كونه حقق أكبر ربح (.Max) وقدره (31) دينار، عليه فإن أفضل تخصيص هو:

أ- تعيين المدير (A) لأشغال المركز الوظيفي (1).

ب- تعيين المدير (B) لأشغال المركز الوظيفي (2).

جـ- تعيين المدير (C) لأشغال المركز الوظيفي (3).

(4) عليه تكون الأرباح (Profits) المتحققة بموجب هذا التخصيص هي:

$$\text{Profits} = 13 + 6 + 12 \quad \rightarrow \text{Max.}$$
$$= 31 \quad \text{JD}$$

### 7-3-2: الطريقة الهنكَارية The Hungarian Method:

للحصول على حل لمشكلة التخصيص بموجب هذه الطريقة في حالة تقليل التكاليف (.Min)، نتبع الخطوات الآتية:

1- طرح أقل قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود.

2- ثم نطرح أقل قيمة في كل صف من جميع قيم ذلك الصف.

3- تغطية الأصفار الناتجة في (الصفوف والأعمدة) بأقل عدد ممكن من المستقيمات.

4- أ- إذا كان [ عدد المستقيمات = عدد صفوف أو أعمدة الجدول]، فإننا في هذه الحالة قد توصلنا إلى الحل الأمثل لعملية التخصيص.

ب- أما إذا كان [ عدد المستقيمات أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة]، ففي هذه الحالة نقوم باختيار أقل قيمة من القيم غير المغطاة وطرحها من جميع القيم غير المغطاة، وأضافتها إلى قيم نقاط تقاطع المستقيمات.

5- بعد ذلك نقوم بعملية التغطية، حتى يتم الحصول على أن عدد المستقيمات يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة في الجدول.





6- تتم عملية التخصيص من خلال اختيار [المدير، العامل، ... الخ] الذي يقابل أقل عدد من الأصفار في الصف أو العمود، ونقوم بشطب الصف والعمود الذي يوجد فيه (الصفر)، وهكذا حتى نتهي من عملية التخصيص.

7- حساب التكاليف الكلية على أساس قيم التكاليف في المصفوفة الأصلية والمناظرة إلى عملية التخصيص النهائية، على أن تكون هذه التكاليف أقل ما يمكن (Min).

**ملاحظة:**

عند تطبيق الطريقة الهنكَارية في حالة تعظيم (.Max) الأرباح (العوائد)، يتم أولاً طرح جميع قيم الجدول من أعلى قيمة فيه، بعد ذلك يتم تطبيق خطوات الحل الآنفة الذكر.

**مثال (3):**

مصنع يرغب في تعيين (3) ثلاثة عمال (C, B, A) لإنجاز (3) ثلاث مهام (3, 2, 1)، وكانت تكاليف إنجاز هذه المهام موضحة بالجدول الآتي:

| العمال | المهام | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| A | 15 | 14 | 8 |
| B | 4 | 9 | 7 |
| C | 7 | 2 | 9 |

**المطلوب:**

جد أفضل تخصيص بحيث تكون التكاليف الكلية (TC) أقل ما يمكن (.Min)، مستخدماً الطريقة الهنكَارية.

**الحل:**

للحصول على أفضل تخصيص، نتبع الخطوات الآتية:

(1) طرح أقل قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود:

| العمال | المهام | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| A | 11 | 12 | 1 |
| B | 0 | 7 | 0 |
| C | 3 | 0 | 2 |

(2) طرح أقل قيمة في كل صف من جميع قيم ذلك الصف، في الجدول الوارد بالخطوة (1).

| العمال | المهام | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| A | 10 | 11 | 0 |
| B | 0 | 7 | 0 |
| C | 3 | 0 | 2 |

(3) بما أن عدد [ المستقيمات يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة]، عليه فقد تم التوصل إلى حل عملية التخصيص، وهو على النحو الآتي:

أ- تخصيص العامل (A) لإنجاز المهمة (3).

ب- تخصيص العامل (B) لإنجاز العامل (1).

جـ- تخصيص العامل (C) لإنجاز المهمة (2).

(4) عليه تكون التكاليف الكلية (TC) لقرار التخصيص هي:

$$TC = 8 + 4 + 2 \quad \rightarrow \text{Min.}$$
$$= 14 \text{ JD.}$$





مثال (4):

شركة صناعية ترغب في تخصيص (4) أربعة فنيين (D, C, B, A) على (4) أربع مكائن إنتاجية (4, 3, 2, 1)، وكانت الأرباح المتحققة عن إنجاز الفنيين لأعمالهم، موضحة بالجدول الآتي:

| الفنيين | المكائن | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 5 | 14 | 3 | 4 |
| B | 8 | 6 | 17 | 0 |
| C | 4 | 10 | 0 | 6 |
| D | 13 | 5 | 8 | 9 |

المطلوب:

جد أفضل تخصيص للفنيين بحيث تكون الأرباح (Profits) المتحققة أقصى ما يمكن (.Max)، مستخدما الطريقة الهنكارية.

الحل:

للحصول على أفضل تخصيص، نتبع الخطوات الآتية:

(1) نطرح جميع القيم من أكبر قيمة في الجدول والبالغة (17) كالآتي:

| الفنيين | المكائن | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 12 | 3 | 14 | 13 |
| B | 9 | 11 | 0 | 17 |
| C | 13 | 7 | 17 | 11 |
| D | 4 | 12 | 9 | 8 |

(2) طرح أقل قيمة في كل عمود مـن جميع قيـم ذلـك العمـود، في الجـدول الـوارد بالخطوة (1).

| الفنيين | المكائن | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 8 | 0 | 14 | 5 |
| B | 5 | 8 | 0 | 9 |
| C | 9 | 4 | 17 | 3 |
| D | 0 | 9 | 9 | 0 |

(3) طرح أقل قيمة في كل صف من جميع قيم ذلك الصف، في الجدول الوارد بالخطوة (2):

| الفنيين | المكائن | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 8 | 0 | 14 | 5 |
| B | 5 | 8 | 0 | 9 |
| C | 6 | 1 | 14 | 0 |
| D | 0 | 9 | 9 | 0 |

(4) بما أن عـدد [ المستقيمات يساوي عـدد الصفوف أو الأعمـدة] ، عليـه فقـد تم التوصل إلى حل عملية التخصيص، وهو على النحو الآتي:

أ- تخصيص الفني (A) لإنجاز العمل على المكانة (2).

ب- تخصيص الفني (B) لإنجاز العمل على الماكنة (3).

جـ- تخصيص الفني (C) لإنجاز العمل على الماكنة (4).

د- تخصيص الفني (D) لإنجاز العمل على الماكنة (1).

(5) عليه تكون الأرباح (Profits) المتحققة عن قرار التخصيص هي:

$$\text{Profits} = 14 + 17 + 6 + 13 \quad \to \text{Max.}$$
$$= 50 \text{ JD}$$





**مثال (5):**

البيانات الواردة في الجدول التالي، تمثل التكاليف المترتبة على تخصيص (4) أربعة مهندسين للإشراف على (4) أربعة مشاريع هندسية.

| المهندسون | المشاريع الهندسية | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 100 | 90 | 80 | 110 |
| B | 90 | 100 | 130 | 40 |
| C | 80 | 90 | 40 | 100 |
| D | 140 | 110 | 70 | 120 |

**المطلوب:**

جد أفضل تخصيص للمهندسين بحيث تكون التكاليف الكلية (TC) أقل ما يمكن (.Min) باستخدام الطريقة الهنكارية.

**الحل:**

للحصول على أفضل تخصيص للمهندسين، نتبع الخطوات الآتية:

1- طرح أقل قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود:

| المهندسون | المشاريع الهندسية | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 20 | 0 | 40 | 70 |
| B | 10 | 10 | 90 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 60 |
| D | 60 | 20 | 30 | 80 |

2- طرح أقل قيمة في كل صف من جميع قيـم ذلـك الصـف، في الجـدول الـوارد بالخطوة (1).

| المهندسون | المشاريع الهندسية | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 20 | 0 | 40 | 70 |
| B | 10 | 10 | 90 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 60 |
| D | 40 | 0 | 10 | 60 |

3- بما أن [ عدد المستقيمات أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة ]، ففي هذه الحالة لم نتوصل إلى الحل الأمثل لعملية التخصيص، وعليه نقوم باختيار أقل قيمة من بين القيم غير المغطاة في الجدول السابق والبالغة (10)، والقيام بطرح هذه القيمة من جميع قيم الجدول غير المغطاة، وإضافتها إلى قيم نقاط تقاطع المستقيمات، والجدول التالي يوضح ذلك:

| المهندسون | المشاريع الهندسية | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 10 | 0 | 30 | 70 |
| B | 0 | 10 | 80 | 0 |
| C | 0 | 10 | 0 | 70 |
| D | 30 | 0 | 0 | 60 |

4- بما إن [ عدد المستقيمات = عدد الصفوف أو الأعمدة ]، عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل لعملية تخصيص المهندسين، وعلى النحو الآتي:

أ- تخصيص المهندس (A) للإشراف على المشروع الهندسي (2).

ب- تخصيص المهندس (D) للإشراف على المشروع الهندسي (3).

جـ- تخصيص المهندس (C) للإشراف على المشروع الهندسي (1).

د- تخصيص المهندس (B) للإشراف على المشروع الهندسي (4).

5- عليه تكون التكاليف الكلية (TC) لقرار التخصيص كالآتي:

$$TC = 90 + 70 + 80 + 40$$

$$= 280 \text{ JD}$$





# أسئلة حول الفصل السابع

س1- ما المقصود بنموذج التخصيص، ذاكراً أهم استخدامات هذا النموذج وتطبيقاته في الواقع العملي؟

س2- وضح بالتفصيل خصائص النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص.

س3- اكتب بالتفصيل آلية صياغة النموذج الرياضي الخاص بأسلوب التخصيص.

س4- وضح خطوات حل مشكلة التخصيص، باستخدام الطريقة الهنكارية في حالتي التقليل (Min.) والتعظيم (Max.).

س5- الجدول التالي، يوضح تكاليف تعيين (4) أربعة موظفين (D, C, B, A) في (4) أربع وظائف شاغرة (1, 2, 3, 4).

| الموظفين | الوظائف | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 4 | 10 | 3 | 4 |
| B | 7 | 2 | 6 | 7 |
| C | 10 | 5 | 8 | 11 |
| D | 3 | 6 | 5 | 3 |

المطلوب:

جد أفضل تخصيص بحيث تكون التكاليف الكلية (TC) أقل ما يمكن (Min.)، مستخدماً طريقة العد الكامل.

س6: مصنع إنتاجي يرغب في تخصيص (4) أربعة فنيين (D, C, B, A) على (4) خطوط إنتاجية (4, 3, 2, 1)، وكان انتاجية كل عامل موضحة بالجدول الآتي:

| الفنيون | خطوط الإنتاج | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 5 | 10 | 7 | 9 |
| B | 6 | 4 | 5 | 3 |
| C | 9 | 2 | 8 | 11 |
| D | 3 | 7 | 13 | 12 |

**المطلوب:**

جد أفضل تخصيص بحيث يكون الإنتاج المتحقق أعلى ما يمكن(.Max) ، مستخدماً الطريقة الهنكارية.

س7: البيانات الواردة في الجدول التالي، تمثل التكاليف المترتبة على تخصيص (3) ثلاثة عمال لإنجاز (3) ثلاثة أعمال:

| العمال | الأعمال | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| A | 9 | 11 | 12 |
| B | 20 | 10 | 19 |
| C | 5 | 12 | 11 |

**المطلوب:**

جد أفضل تخصيص للعمال على الأعمال الثلاثة بحيث تكون التكاليف الكلية (TC) اقل ما يمكن (.Min)، باستخدام طريقة العد الكامل.





س8: على افتراض إن البيانات الواردة في الجدول السابق للسؤال (7) تمثل العوائد المتحققة من تخصيص الأعمال.

**المطلوب:**

جد أفضل تخصيص للعمال بحيث تكون العوائد (Profits) المتحققة أعلى ما يمكن (.Max)، مستخدماً الطريقة الهنكَارية.

# الفصل التاسع

# نظرية صفوف الانتظار

# Queuing Theory

## 9-1: مقدمة:

يُعد موضوع الانتظار من المشاكل المألوفة في حياتنا اليومية الاعتيادية، إذ نشاهد الناس في صفوف انتظار أمام [ الأسواق المركزية أو الجمعيات التعاونية الاستهلاكية، أو أمام صالات السينما أو عند الإشارات الضوئية في الشوارع العامة أو في محطات القطار أو انتظار الطائرات على المدارج أو في الجو استعداداً للإقلاع أو الهبوط أو انتظار المكائن العاطلة في ورش التصليح أو انتظار البواخر في الموانئ لغرض التحميل أو التفريغ] جميع الحالات أعلاه، تؤدي إلى مشكلة الانتظار التي لها أهمية كبيرة، نتيجة للتكاليف المترتبة عن حالة الانتظار والتشغيل.

إن البدايات التأريخية لنظرية صفوف الانتظار أو ما يطلق عليها أحياناً بـ [ نظرية الطوابير أو نظرية الأرتال]، تعود إلى الجهود المبذولة من قبل المهندس (Erlang) عام (1910/1959)، عندما لاحظ معاناة العاملات في أجهزة البدالات الهاتفية نتيجة الزخم الكبير من الطلبات على المكالمات الهاتفية مع محدودية الأجهزة، الأمر الذي أدى إلى تأخير الطلبات وعدم تأديتها بالسرعة المطلوبة.

إن الهدف من دراسة نظرية صفوف الانتظار هو لتحديد الفترة الزمنية للانتظار، وجعل هذه الفترة أقل ما يمكن (.Min)، ويترتب على ذلك إنشاء مراكز خدمة متعددة، كأن تكون [جمعيات، أسواق، موانئ، محطات، ... الخ]، بعد إجراء الموازنة الدقيقة بين تكاليف الانتظار وتكاليف اتخاذ القرار بشأن إنشاء مراكز خدمة جديدة.

## 9-2: وصف النموذج الرياضي لنظام صفوف الانتظار:

تعتمد نظرية صفوف الانتظار على وصول الوحدات [زبائن، مكائن، ... الخ] إلى محطات الخدمة، وعملية الوصول يمكن أن تكون:

أ- بمعدل ثابت خلال فترة زمنية معلومة، مثال ذلك [وصول البواخر إلى الموانئ، إقلاع الطائرات، ... إلخ ].

ب- بشكل عشوائي، مثال ذلك [التسوق من الأسواق المركزية، قطع التذاكر في صالات السينما، ... إلخ ].

إن الخصائص العامة لنظرية صفوف الانتظار، يمكن توضيحها على النحو الآتي:

1- أن معدل وصول الوحدات ($\lambda$) يخضع إلى توزيع بواسون (Poisson Distribution).

2- أن معدل تقديم الخدمة ($\mu$) يخضع إلى التوزيع الأسي (Exponential Distribution).

3- أن معدل الوصول ($\lambda$) أقل من معدل تقديم الخدمة ($\mu$)، أي أن ($\lambda < \mu$).

4- إن نظام الخدمة المعتمد هو [من يصل أولاً، يحصل على الخدمة أولاً – FCFS ].

وفيما يلي أهم الرموز المستخدمة في معادلات النماذج الرياضية لنظام صفوف الانتظار:

$n$ : عدد الوحدات في النظام [ الوحدات في صف الانتظار + الوحدات في مراكز الخدمة ].

$\lambda$ : عدد الوحدات القادمة إلى النظام في وحدة الزمن [ معدل الوصول لكل وحدة زمنية ].

$\mu$ : عدد الوحدات المغادرة من النظام (الوحدات التي قُدمت لها الخدمة) [معدل الخدمة لكل وحدة زمنية].





$P$ : إحتمال وجود وحدات في النظام [ معامل التشغيل ].

$P_o$ : إحتمال عدم وجود وحدات في النظام [ نسبة الوقت غير المستغل].

$L_s$ : إحتمال متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام [ طول النظام ].

$L_q$ : متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار [ طول صف الانتظار ].

$W_s$ : متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام.

$W_q$ : متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار .

وأخيراً، يمكن دراسة ومعالجة مشاكل الانتظار في الحالات الآتية:

1- نموذج صف الانتظار، بمركز خدمة واحد (1).

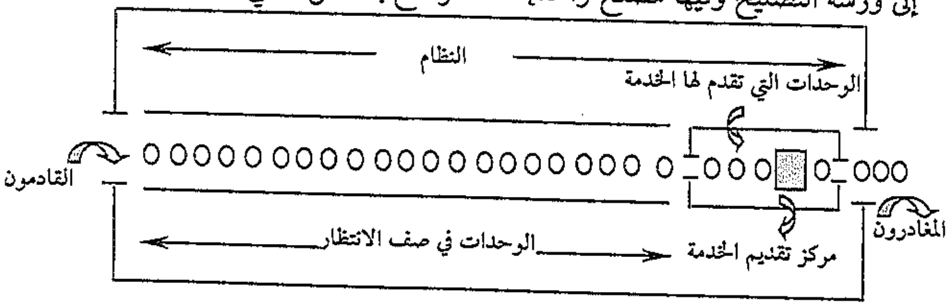
2- نموذج صف الانتظار، بأكثر من مركز خدمة (S).

3- علاقة صفوف الانتظار والتكاليف.

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل حالة من الحالات أعلاه، وعلى النحو الآتي:

## 9-3: نموذج صف الانتظار بمركز خدمة واحد:

يُعد هذا النموذج من أبسط الأنواع، ويسمى أحياناً بنظام القناة الواحدة (Single Channel System)، إذ تصل الوحدات إلى مركز الخدمة بشكل متتالي في صف واحد، وتقدم لها الخدمة بمرحلة واحدة، مثال ذلك [وصول السيارات العاطلة إلى ورشة التصليح وفيها مصلح واحد]، كما موضح بالشكل الآتي:



ولغرض معالجة هذا النوع من النماذج نقوم بتوضيح بعض العلاقات الرياضية والاحتمالية، على النحو الآتي:

(1) إحتمال وجود وحدات في النظام [ معامل التشغيل ]:

$$P = \frac{\lambda}{\mu} \quad , \quad \lambda < \mu$$

(2) إحتمال عدم وجود وحدات في النظام [ تعطل النظام ]:

$$P_o = 1 - P \quad \Rightarrow \quad P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

(3) متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(4) متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار:

$$L_q = P * L_s$$

or

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

(5) متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

(6) متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار:

$$W_q = P * W_s$$

or

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$





مثال (1):

يقوم الموظف المسؤول عن تسليم القروض للزبائن في أحد البنوك الأهلية بمدينة عمان، من تقديم الخدمة للزبائن بمعدل (40) زبون بالساعة في المتوسط، وأن معدل وصول الزبائن للبنك هو (28) زبون بالساعة في المتوسط.

**المطلوب:**

جد ما يأتي:

1- إحتمال أن يكون الموظف مشغولاً.

2- نسبة الوقت الضائع (غير المستغل).

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام.

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار.

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام.

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار.

**الحل:**

∵ معدل وصول الزبائن ($\lambda$) = 28 زبون بالساعة.

معدل تقديم الخدمة ($\mu$) = 40 زبون بالساعة.

(1) $\therefore P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{28}{40} = 0.7$ (معامل التشغيل)

(2) $\therefore P_o = 1 - P = 1 - 0.7 = 0.3$ (نسبة الوقت غير المستغل)

$(3)\ L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ (متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام) ٣

$= \frac{28}{40-28}$

$= 2.33$

$\approx 2$ زبون

$(4)\ L_q = P * L_s$ (متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار) ٤

$= 0.7 * 2.3$

$= 1.61$

$\approx 2$ زبون

$or\ L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$= \frac{(28)^2}{40(40-28)}$

$= 1.63$

$\approx 2$ زبون

$(5)\ W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$ (متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام) ٥

$= \frac{1}{40-28}$

$= \frac{1}{12}$ (ساعة)

$= \frac{1}{12} * 60$

$= 5$ دقيقة

$(6)\ W_q = P * W_s$ (متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار) ٦

$= 0.7 * 5$

$= 3.5$ دقيقة





$or\ W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

$= \frac{28}{40(40-28)}$

$= \frac{28}{480}$ (ساعة)

$= \frac{28}{480} * 60$

$= 3.5$ دقيقة

**مثال (2):**

يستطيع أحد الموانئ من إستقبال البواخر بمعدل (20) باخرة بالساعة في المتوسط، وأن معدل وصول البواخر للميناء هو (10) بواخر بالساعة في المتوسط.

**المطلوب:**

جد ما يأتي:

1- إحتمال أن يكون رصيف الميناء مشغولاً.

2- نسبة الوقت الضائع (غير المستغل).

3- متوسط عدد البواخر المتوقع في النظام.

4- متوسط عدد البواخر المتوقع في صف الانتظار.

5- متوسط وقت انتظار الباخرة المتوقع في النظام.

6- متوسط وقت انتظار الباخرة المتوقع في صف الانتظار.

**الحل:**

∵ معدل وصول البواخر ($\lambda$) = 10 بواخر بالساعة.

معدل تقديم الخدمة ($\mu$) = 20 باخرة بالساعة.

$(1)\ \because P = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (إحتمال أن يكون الرصيف مشغولاً)

$= \dfrac{10}{20}$

$= 0.5$

$(2)\ P_o = 1 - P$ (نسبة الوقت الضائع)

$= 1 - 0.5$

$= 0.5$

$(3)\ L_s = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ (متوسط عدد البواخر المتوقع في النظام)

$= \dfrac{10}{20-10}$

$= 1$ باخرة

$(4)\ L_q = P * L_s$

$= 0.5 * 1$

$= 0.5$

$\approx 1$ باخرة

$(5)\ W_s = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$ (وقت الانتظار المتوقع في النظام)

$= \dfrac{1}{20-10}$

$= \dfrac{1}{10}$ ساعة

$= \dfrac{1}{10} * 60$

$= 6$ دقيقة





$(6)\ W_q = P * W_s$ (وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار)

$= 0.5 * 6$

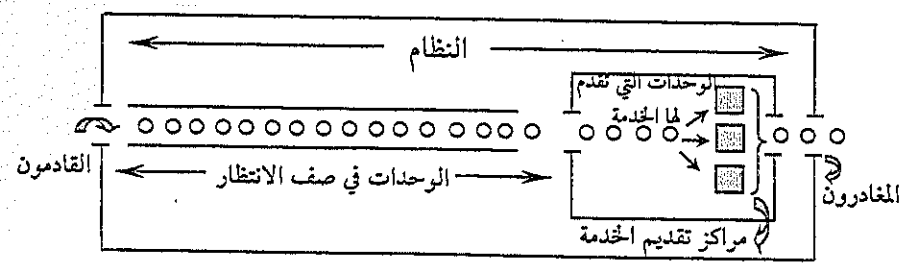
$= 3$ دقيقة

### 9-4: نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة (S):

يُعد نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة أكثر تعقيداً من النموذج الأول، إذ يكون تقديم الخدمة بموجب هذا النموذج وفقاً لأحد الأسلوبين الموضحين في أدناه:

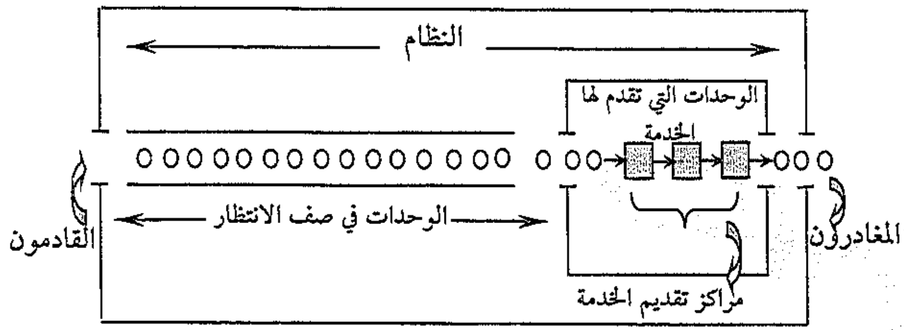
**الأسلوب الأول:**

يظهر هذا الشكل في حالة وجود أكثر من مركز خدمة (S)، ولكن الخدمة المقدمة للوحدات (الزبائن) تكون على مرحلة واحدة، مثال ذلك [وصول الزبائن إلى صالون الحلاقة، ففي هذه الحالة بإمكان الزبون أن يحصل على الخدمة من أي حلاق شاغر] ، كما هو موضح بالشكل الآتي:




**الأسلوب الثاني:**

يظهر هذا الشكل في حالة وجود أكثر من مركز خدمة (S)، ولكن الخدمة المقدمة للوحدات تكون على عدة مراحل، مثال ذلك [خطوط الإنتاج المتعلقة بصناعة السيارات، فإن المنتج (السيارة) تعالج بعد مرورها بعدة مراحل متسلسلة]، كما هو موضح بالشكل الآتي:




وفيما يلي أهم العلاقات الرياضية والاحتمالية الخاصة بهذا النموذج:

(1) إحتمال وجود وحدات في النظام [ النظام يعمل ]:

$$P = \frac{\lambda}{\mu} \quad , \qquad \lambda < S\mu$$

(2) إحتمال عدم وجود وحدات في النظام [ النظام متعطل ]:

$P_o \Leftarrow$ يمكن إيجاد قيمة ($P_o$) من جداول خاصة بهذا النموذج، اعتماداً على قيمة (P) وعدد مراكز الخدمة (S).

(3) متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{P^S * \lambda\mu * P_o}{(S-1)! * (S\mu - \lambda)^2}$$

$$= \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^S * \lambda\mu * P_o}{(S-1)! * (S\mu - \lambda)^2}$$

(4) متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

(5) متوسط وقت انتظار الوحدات المتوقع في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$





(6) متوسط وقت انتظار الوحدات المتوقع في النظام:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

**مثال (3):**

في أحد البنوك الأهلية بمدينة عمان، يقوم (2) اثنان من الموظفين بتسليم القروض للزبائن، بمعدل (30) زبون بالساعة في المتوسط، وأن معدل وصول الزبائن للبنك هو (24) زبون بالساعة في المتوسط.

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- إحتمال وجود زبائن في النظام.

2- إحتمال عدم وجود زبائن في النظام.

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار.

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف النظام.

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار.

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف النظام.

**الحل:**

∵ معدل وصول الزبائن ($\lambda$) = 24 زبون بالساعة.

معدل تقديم الخدمة ($\mu$) = 30 زبون بالساعة.

عدد مراكز الخدمة (S) = 2 مركزين.

(إحتمال وجود زبائن في النظام)

$$(1)\ \therefore P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{30} = 0.8$$

(2) $P_o = ?$ (إحتمال عدم وجود زبائن في النظام)

بالاعتماد على قيمة ($P = 0.8$) وعدد مراكز الخدمة ($S=2$)، يتضح من الجداول بأن قيمة ($P_o$) تساوي:

$$\therefore P_o = 0.4286$$

(3) $L_q = \dfrac{P^S * \lambda\mu * P_o}{(S-1)! * (S\mu - \lambda)^2}$ (متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار)

$$= \frac{(0.8)^2 * (24) * (30) * (0.4286)}{(2-1)! * [2(30) - 24]^2}$$

$= 0.15$ زبون

(4) $L_s = L_q + P$ (متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام)

$= 0.15 + 0.8$

$= 0.95$

$\approx 1$ زبون

(5) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$ (متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار)

$= \dfrac{0.15}{24}$

$= 0.006$ (ساعة)

$= 0.006 * 60$

$= 0.36$ دقيقة

(6) $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu}$ (متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام)

$= 0.006 + \dfrac{1}{30}$

$= 0.006 + 0.033$

$= 0.039$ (ساعة)

$= 0.039 * 60$

$= 2.34$ دقيقة





## 9-5: العلاقة بين صفوف الانتظار والتكاليف:

يُعد موضوع التكاليف من المسائل المهمة وذو أهمية كبيرة بالنسبة إلى نماذج صفوف الانتظار، وقد أخذت صدىً واسعاً لدى صانعي القرار، وعلى وجه التحديد في المؤسسات الإنتاجية والخدمية، التي تستخدم عدد كبير من الأيدي العاملة، حيث تتجمع هذه الأعداد الكبيرة في صفوف طويلة بانتظار استلام ما يحتاجونه من العُدد والأدوات الاحتياطية لدى أمين المخزن أثناء العمل، مما يترتب على ذلك من إضاعة للوقت وأعباء مالية باهضة نتيجة انتظارهم.

- **النموذج الرياضي للتكاليف:**

يُعطي النموذج الرياضي للتكاليف، بالصيغة الآتية:

$$TC = C_s + C_q$$

وأن كل من ($C_s$) و ($C_q$)، تأخذ الصيغ الآتية:

$$C_s = C_2 * t$$

$$C_q = C_1 * t * L_q$$

حيث إن:

$TC$ : التكاليف الكلية (Total Costs).

$C_s$ : التكاليف المخصصة للعاملين في مراكز الخدمة.

$C_q$ : تكاليف الوقت الضائع للوحدات في صف الانتظار.

$C_1$ : أجرة الوحدة الواحدة في صف الانتظار في وحدة الزمن (t).

$C_2$ : أجرة العاملين في مراكز الخدمة في وحدة الزمن (t).

$t$ : وحدة الزمن وتكون [ساعة، يوم، أسبوع، ... ].

$L_q$ : متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار.

**مثال (4):**

في مصنع إنتاجي، يوجد مخزن رئيسي لتجهيز العمال بالعدد والآلات المطلوبة لإنجاز عملهم، وإن معدل وصول العمال للمخزن هو (16) عامل بالساعة في المتوسط وبطريقة عشوائية، علماً بأن الخدمة تقدم لهم من قبل أمين المخزن بمعدل (20) عامل بالساعة في المتوسط، إذا علمنا بأن العامل يتقاضى أجراً قدره (2) ديناربن عن كل ساعة عمل، كما يتقاضى أمين المخزن أجراً قدره (1.5) دينار عن الساعة الواحدة، وأن عدد ساعات العمل في المصنع هي (8) ساعات.

المطلوب: جد ما يأتي:

1- تكاليف الوقت الضائع المترتب على انتظار العمال.

2- التكاليف النهائية الكلية (TC) المطلوبة لإنجاز العمل.

**الحل:**

∵ معدل وصول العمال ($\lambda$) = 16 عامل في الساعة.

معدل تقديم الخدمة ($\mu$) = 20 عامل في الساعة .

$$\therefore L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{(16)^2}{20(20-16)}$$

$= 3.2$ عامل

$\therefore C_q = C_1 * t * L_q$ (تكاليف الوقت الضائع عن انتظار العمال)

$= 2 * 8 * 3.2$

$= 51.2$ دينار

(2) $C_s = C_2 * t$ (تكاليف أمين المخزن في اليوم الواحد)

$= 1.5 * 8$

$= 12$ دينار





عليه تكون التكاليف النهائية (TC) كالآتي:

$\therefore TC = C_s + C_q$

$= 12 + 51.2$

$= 63.2$ دينار

**مثال (5):**

في أحد أندية تدريب هواة سباق السيارات، تولى مسؤول التدريب القيام بعمله بمعدل (8) ساعات يومياً، وبهدف تشجيع الهواة للاشتراك في المسابقات اللاحقة، قرر المسؤول منح مكافئة لكل متدرب (20) دينار في الساعة، وقد كُلف (2) اثنان من المستخدمين يقومون بإيواء سيارات المتدربين، لقاء أجر قدره (2) دينارين في الساعة لكل منهما، علماً بأن كل مستخدم يستطيع تقديم الخدمة لـ (25) من الهواة بالساعة في المتوسط، وإن معدل وصول الهواة كان (15) هاوي بالساعة في المتوسط.

المطلوب: جد ما يأتي:

1- تكاليف الوقت الضائع المترتب على انتظار الهواة.

2- التكاليف النهائية الكلية (TC) المطلوبة لإنجاز العمل.

**الحل:**

∵ معدل وصول الهواة ($\lambda$) = 15 هاوي في الساعة.

معدل تقديم الخدمة ($\mu$) = 25 هاوي في الساعة .

$$\therefore P = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{15}{25}$$

$= 0.6$

من الجداول المرفقة في نهاية الفصل وعند (P=0.6) نحصل على:

$P_o = 0.5385$

$$\therefore L_q = \frac{P^S * \lambda \mu * P_o}{(S-1)!*(S\mu - \lambda)^2}$$

$$= \frac{(0.6)^2 * 15 * 25 * 0.5385}{(2-1)!*(50-15)^2}$$

$= 0.06$

(تكاليف الوقت الضائع عن انتظار الهواة) $\therefore C_q = C_1 * t * L_q$

$= 20 * 8 * 0.06$

$= 9.6$ دينار

(تكاليف المستخدم الواحد في اليوم الواحد) (2) $C_s = C_2 * t$

$= 2 * 8$

$= 16$ دينار

∴ تكاليف المستخدمين الاثنين يكون:

$2 * C_S = 2 * 16$

$= 32$ دينار

عليه تكون التكاليف الكلية (TC) كالآتي:

$\therefore TC = C_s + C_q$

$= 32 + 9.6$

$= 41.6$ دينار





## قيم ($P_0$) لنموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة (S)

| $P = \frac{\lambda}{\mu}$ | عدد مراكز الخدمة (S) 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 0.8605 | 0.8607 | 0.8607 | 0.8607 |
| 0.20 | 0.8182 | 0.8187 | 0.8187 | 0.8187 |
| 0.25 | 0.7778 | 0.7788 | 0.7788 | 0.7788 |
| 0.30 | 0.7391 | 0.7407 | 0.7408 | 0.7408 |
| 0.35 | 0.7021 | 0.7046 | 0.7047 | 0.7047 |
| 0.40 | 0.6667 | 0.6701 | 0.6703 | 0.6703 |
| 0.45 | 0.6327 | 0.6373 | 0.6376 | 0.6376 |
| 0.50 | 0.6000 | 0.6061 | 0.6065 | 0.6065 |
| 0.55 | 0.5686 | 0.5763 | 0.5769 | 0.5769 |
| 0.60 | 0.5385 | 0.5479 | 0.5487 | 0.5488 |
| 0.65 | 0.5094 | 0.5209 | 0.5219 | 0.5220 |
| 0.70 | 0.4815 | 0.4952 | 0.4965 | 0.4966 |
| 0.75 | 0.4545 | 0.4706 | 0.4722 | 0.4724 |
| 0.80 | 0.4286 | 0.4472 | 0.4491 | 0.4493 |
| 0.85 | 0.4035 | 0.4248 | 0.4271 | 0.4274 |
| 0.90 | 0.3793 | 0.4035 | 0.4062 | 0.4065 |
| 0.95 | 0.3559 | 0.3831 | 0.3863 | 0.3867 |
| 1.00 | 0.3333 | 0.3636 | 0.3673 | 0.3678 |

| $P = \frac{\lambda}{\mu}$ | عدد مراكز الخدمة (S) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1.20 | 0.2500 | 0.2941 | 0.3002 | 0.3011 |
| 1.40 | 0.1765 | 0.2360 | 0.2449 | 0.2463 |
| 1.60 | 0.1111 | 0.1872 | 0.1993 | 0.2014 |
| 1.80 | 0.0526 | 0.1460 | 0.1616 | 0.1646 |
| 2.00 | | 0.1111 | 0.1304 | 0.1343 |
| 2.20 | | 0.0815 | 0.1046 | 0.1094 |
| 2.40 | | 0.0562 | 0.0831 | 0.0889 |
| 2.60 | | 0.0345 | 0.0651 | 0.0721 |
| 2.80 | | 0.0160 | 0.0521 | 0.0581 |
| 3.00 | | | 0.0377 | 0.0466 |
| 3.20 | | | 0.0273 | 0.0372 |
| 3.40 | | | 0.0186 | 0.0293 |
| 3.60 | | | 0.0013 | 0.0228 |
| 3.80 | | | 0.0051 | 0.0174 |
| 4.00 | | | | 0.0130 |
| 4.20 | | | | 0.0093 |
| 4.40 | | | | 0.0063 |
| 4.60 | | | | 00.38 |
| 4.80 | | | | 0.0017 |





# أسئلة حول الفصل التاسع

س1: ما المقصود بنظرية صفوف الانتظار، ذاكراً الوصف التفصيلي للنموذج الرياضي لنظام صفوف الانتظار.

س2: وضح بالتفصيل أهم الخصائص العامة لنظرية صفوف الانتظار.

س3: وضح نموذج صف الانتظار بمركز خدمة واحد، معززاً إجابتك بالمخطط التوضيحي للنظام.

س4: أكتب فقط العلاقات الرياضية والاحتمالية لنموذج صف الانتظار بمركز خدمة واحد.

س5: وضح نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة (S)، ذاكراً الأشكال التوضيحية للنظام.

س6: أكتب فقط العلاقات الرياضية والاحتمالية لنموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة (S).

س7: وضح العلاقة بين صفوف الانتظار والتكاليف المترتبة عن الانتظار، ذاكراً الصيغة الرياضية للتكاليف الكلية (TC).

س8: إثبت صحة العلاقات الرياضية الآتية:

$$(1)\ P_o = \frac{\mu-\lambda}{\mu} \quad , \quad \mu > \lambda$$

$$(2)\ L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad , \quad \text{If } (S = 1)$$

س9: تستطيع شركة الكهرباء من إستقبال شكاوى المواطنين عن انقطاع التيار الكهربائي بمعدل (4) شكاوى بالساعة في المتوسط، وأن احتمال وجود شكاوى في النظام بلغ (0.8)، علماً بأن لدى الشركة سيارة إصلاح واحدة تستطيع من خلالها تقديم الخدمة.

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- متوسط عدد الطلبات المتوقع في النظام.

2- متوسط عدد الطلبات المتوقع في صف الانتظار.

3- متوسط الوقت المستغرق من قبل طالبي الشكاوى في النظام.

4- متوسط الوقت المستغرق من قبل طالبي الشكاوى في صف الانتظار.

س10: في أحد البنوك الأهلية بمدينة عمان، يقوم (2) اثنان من أمناء الصندوق بتقديم الخدمة للزبائن بمعدل (30) زبون بالساعة في المتوسط، وأن إحتمال وجود زبائن في النظام بلغ (0.7).

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار.

2- متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام.

س11: يستطيع أحد مقالع الأحجار الذي يقوم بتزويد معامل الإسمنت بحجر الكلس من استقبال الشاحنات عشوائياً، بمعدل (20) شاحنة بالساعة في المتوسط، وأن إدارة المقلع تستطيع تقديم الخدمة من خلال موقعين وبطريقة عشوائية، بمعدل (25) شاحنة بالساعة في المتوسط، علماً بأن أجرة سائق الشاحنة (2) دينارين في الساعة، وأجرة عامل موقع الخدمة (1.5) دينار في الساعة، وإن مدة عمل المقلع (12) ساعة يومياً.

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- تكاليف الوقت الضائع المترتب على انتظار الشاحنات.

2- التكاليف النهائية الكلية (TC) المطلوبة لإنجاز العمل.



10

الفصل العاشر

# تحليل ماركوف

## Markov Analysis

انظر هاني عرب P63

# الفصل العاشر

# تحليل ماركوف

# Markov Analysis

## 10-1: مقدمة:

يُعد تحليل ماركوف أحد الأساليب الكمية المعروفة، الذي يتم بموجبه تحليل التغيرات الحالية لظاهرة ما، من أجل التنبؤ بالتغيرات المستقبلية لهذه الظاهرة، ويرد هذا الأسلوب عادة ضمن أساليب بحوث العمليات (Operations Research).

ويُنسب أسلوب تحليل ماركوف إلى العالم الروسي ماركوف (A.Markov) (1922-1952)، وقد اقتصر إستخدام هذا الأسلوب في بادئ الأمر على التطبيقات الفيزيائية المتمثلة بدراسة حركة جزيئات الغاز في إناء مغلق من أجل التنبؤ بحركة هذه الجزيئات في المستقبل.

وتُعد عمليات ماركوف حالة خاصة من العمليات التصادفية أو العشوائية، وينظر لهذه العمليات بأنها سلسلة من الحالات التي تمر بها ظاهرة ما خلال فترة زمنية معينة أو سلسلة العمليات التي يمر بها جسم متحرك خلال فترات زمنية مختلفة، وتدعى سلسلة العمليات المذكورة بسلسلة ماركوف (Markov Chains). ومن أجل التعرف على عمليات ماركوف لابد من استخدام الأساليب التحليلية والاستنتاجات الرياضية وتوضيح الخواص المميزة لها أثناء عملية تطورها.

وفي ضوء ما تقدم، يُعرف أسلوب تحليل سلاسل ماركوف بأنه: "أسلوب رياض علمي وتحليلي لسلوك الظواهر المختلفة خلال الفترة الحالية من أجل التنبؤ بسلوك هذه الظواهر في المستقبل أي في الفترات اللاحقة".

ويُستخدم أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في العديد من المجالات الاقتصادية وحقول الإدارة والتسويق، نذكر منها ما يأتي:

1- تحليل سلوك المستهلك وانتقاله من منتوج إلى آخر خلال فترة زمنية معينة، والتنبؤ بسلوكه مستقبلاً خلال فترات زمنية لاحقة.

2- تحليل حركة الأفراد من وإلى الوظائف المختلفة خلال فترات زمنية متعاقبة، من أجل التنبؤ بعدد الأفراد في المستقبل.

3- دراسة وتحليل الظواهر السلبية التي تواجه المنظمات في أنشطتها المختلفة، منها على سبيل المثال لا الحصر:

أ- تحليل الظواهر السلبية التي تواجه النشاط المالي المتعلق بإدارة حسابات المدينين، من أجل التنبؤ بما يسمى بالديون المعدومة مستقبلاً.

ب- تحليل الظواهر السلبية التي تواجه النشاط الهندسي المتعلق بإدارة الصيانة، لغرض التنبؤ باحتمالية عطل المكائن والأجهزة في المستقبل.

### 10-2: إفتراضات تحليل ماركوف:

إن أسلوب تحليل ماركوف يستند على افتراض أساسي، مفاده: [ إن أي نظام يتم التعامل معه في بادئ الأمر يكون في حالته الأولية، تمهيداً للانتقال إلى حالة أخرى ]، ويستند هذا الافتراض على قوانين إحتمالية معينة تسمى الاحتمالات الانتقالية (Transition Probabilities)، والتي تعرف بأنها: "احتمالات الانتقال من حالة معينة إلى حالة أخرى خلال فترة زمنية معينة".

فعلى سبيل المثال، إن احتمال انتقال الظاهرة من الحالة (i) في الفترة الحالية (n) إلى حالة أخرى ولتكن (j) في الفترة اللاحقة (n + 1)، يكتب على النحو الآتي:

$$P\{X_{n+1} = j / X_n = i\} = P_{ij} \quad , \quad \forall\, i, j$$

حيث إن:

$X_n$ : تمثل قيمة الظاهرة في الفترة الحالية (n) .





$X_{n+1}$ : تمثل قيمة الظاهرة في الفترة اللاحقة (n + 1).

$P_{ij}$ : تمثل احتمال انتقال الظاهرة من الحالة (i) إلى الحالة (j).

لقد جرت العادة بوضع قيم الاحتمالات الانتقالية ($P_{ij}$) في مصفوفة مربعة $P = [P_{ij}]$، التي تأخذ الشكل الآتي:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & \cdots & P_{mn} \end{bmatrix}$$

ويطلق على المصفوفة أعلاه، بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية (Transition Probabilities Matrix)، أو تدعى أحياناً بمصفوفة ماركوف (Markov Matrix)، التي تمثل مصفوفة العمليات التصادفية أو العشوائية، والتي يكون فيها مجموع احتمالات أي صف من صفوفها مساوٍ إلى الواحد الصحيح، أي إن:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad , \quad (i = 1, 2, 3, \ldots.. m)$$

وتأسيساً على ما تقدم، يتضح بأن أسلوب تحليل سلاسل ماركوف ينطوي على حساب ما يأتي:

1- مصفوفة الاحتمالات الانتقالية.

2- التنبؤ المستقبلي بالحصص السوقية.

3- تحديد شروط حالة توازن السوق.

وفيما يلي شرحاً بشيء من التفصيل لكل حالة من الحالات المذكورة:

### 10-3: إيجاد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية:

للحصول على مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، نقوم بإيجاد ما يأتي:

(1) قوة الاحتفاظ بالزبائن:

وتعني قدرة الشركة أو المصنع بالاحتفاظ على أكبر نسبة من زبائنه، ويتم حساب ذلك وفقاً للصيغة الآتية:

$$K_i = 1 - \frac{L_i}{V_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث إن:

$K_i$ : تمثل نسبة الاحتفاظ بالزبائن للشركة رقم (i).

$V_i$: تمثل عدد الزبائن في بداية الفترة للشركة رقم (i).

$L_i$ : تمثل عدد الزبائن الذين تتم خسارتهم من قبل الشركة رقم(i) .

(2) إحتمالات خسارة الزبائن:

وتعني تحديد إحتمال خسارة كل شركة أو مصنع من زبائنه إلى الشركات أو المصانع الأخرى، ويتم حساب ذلك وفقاً للصيغة الآتية:

$$LP_i = \frac{N}{V_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث إن:

$LP_i$: إحتمال الخسارة للشركة رقم (i).

$V_i$: عدد الزبائن في بداية الفترة للشركة رقم (i).

N: عدد الزبائن الذين تخسرهم الشركة وذهبوا للشركات الأخرى.

وفيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية لتوضيح آلية إيجاد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية:

مثال (1):

تتنافس ثلاثة مصانع إنتاجية متخصصة في صناعة الأجهزة المنزلية من أجل تقاسم السوق، ومن خلال دراسة السوق لشهر (نيسان/ 2007)، تبين إن عدد الزبائن في بداية الفترة، موضح بالجدول الآتي:





| المصانع المتنافسة | عدد الزبائن ($V_i$) |
|---|---|
| $F_1$ | 2300 |
| $F_2$ | 2200 |
| $F_3$ | 2500 |

وكانت مصفوفة كسب وخسارة الزبائن للمصانع الثلاثة خلال الشهر المذكور، على النحو الآتي:

| $F_i$ \ $F_j$ | | خسارة ($L_i$) $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|
| كسب ($W_i$) | $F_1$ | 0 | 300 | 200 |
| | $F_2$ | 200 | 0 | 100 |
| | $F_3$ | 100 | 150 | 0 |

المطلوب:

إيجاد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية.

الحل:

قبل البدء بتحديد نسب الاحتفاظ بالزبائن، واحتمالات خسارة المصانع لزبائنهم، لابد من توضيح طبيعة المنافسة بين المصانع الثلاثة من حيث كسب وخسارة الزبائن لكل مصنع، وعلى النحو الآتي:

| المصانع ($F_i$) | كسب ($W_i$) | خسارة ($L_i$) |
|---|---|---|
| $F_1$ | 300 | 500 |
| $F_2$ | 450 | 300 |
| $F_3$ | 300 | 250 |

عليه تكون نسبة احتفاظ كل مصنع بزبائنه، على النحو الآتي:

$$\because K_i = 1 - \frac{L_i}{V_i} \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$\therefore K_1 = 1 - \frac{500}{2300}$$

$$= 1 - 0.22$$

$$= 0.78$$

$$K_2 = 1 - \frac{300}{2200}$$

$$= 1 - 0.14$$

$$= 0.86$$

$$K_3 = 1 - \frac{250}{2500}$$

$$= 1 - 0.1$$

$$= 0.90$$

وإن إحتمالات خسارة كل مصنع لزبائنه إلى المصانع الأخرى، يكون كالآتي:

$$LP_i = \frac{N}{V_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

ووفقاً للصيغة أعلاه، يمكن حساب احتمالات الخسارة، على النحو الآتي:

(1) حساب إحتمال خسارة المصنع ($F_1$) لزبائنه لكل من ($F_3$ , $F_2$):

$$\therefore LP_1 = \frac{\text{No.of Loss}(F_1)\text{ for }(F_2 \& F_3)}{V_1}$$

ويمكن تجزئة العلاقة أعلاه، إلى ما يأتي:

$$LP_1 = \frac{\text{No.of Loss}(F_1)\text{ for }(F_2)}{V_1} = \frac{300}{2300} = 0.13$$

$$LP_1 = \frac{\text{No.of Loss}(F_1)\text{ for }(F_3)}{V_1} = \frac{200}{2300} = 0.09$$





(2) حساب إحتمال خسارة المصنع ($F_2$) لزبائنه لكل من ($F_3$, $F_1$):

$$LP_2 = \frac{\text{No.of Loss}(F_2)\text{ for }(F_1 \& F_3)}{V_2}$$

ويمكن تجزئة العلاقة أعلاه، إلى الآتي:

$$LP_2 = \frac{\text{No.of Loss}(F_2)\text{ for }(F_1)}{V_2} = \frac{200}{2200} = 0.09$$

$$LP_2 = \frac{\text{No.of Loss}(F_2)\text{ for }(F_3)}{V_2} = \frac{100}{2200} = 0.05$$

(3) حساب إحتمال خسارة المصنع ($F_3$) لزبائنه لكل من ($F_2$, $F_1$):

$$LP_3 = \frac{\text{No.of Loss}(F_3)\text{ for }(F_1 \& F_2)}{V_3}$$

ويمكن تجزئة العلاقة أعلاه، إلى ما يأتي:

$$LP_3 = \frac{\text{No.of Loss}(F_3)\text{ for }(F_1)}{V_3} = \frac{100}{2500} = 0.04$$

$$LP_3 = \frac{\text{No.of Loss}(F_3)\text{ for }(F_2)}{V_3} = \frac{150}{2500} = 0.06$$

وبناء على النتائج المتقدمة، يمكن بناء مصفوفة الاحتمالات الانتقالية كالآتي:

| $F_i$ \ $F_j$ | | خسارة $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|
| كسب | $F_1$ | 0.78 | 0.13 | 0.09 |
| | $F_2$ | 0.09 | 0.86 | 0.05 |
| | $F_3$ | 0.04 | 0.06 | 0.90 |

من المصفوفة أعلاه، يتضح بان القيم الواقعة على القطر (0.90, 0.86, 0.78) تمثل نسب إحتفاظ كل مصنع بزبائنه، أما قيم الصفوف فإنها تمثل إحتمال خسارة كل

مصنع من زبائنه للمصانع الأخرى، في حين تمثل قيم الأعمدة إحتمال كسب كل مصنع للزبائن من المصانع الأخرى.

### 4-10: التنبؤ المستقبلي بالحصص السوقية:

يُعد التنبؤ بالحصص السوقية للفترات اللاحقة، محوراً أساسياً في عملية اتخاذ القرار، ضمن إدارة التسويق في منظمات الأعمال الإنتاجية أو الخدمية، وذلك من أجل تخطيط:

1- حجم الإنتاج للفترات اللاحقة.

2- حجم المبيعات للفترات اللاحقة.

3- حجم النشاط التسويقي في المستقبل.

وتستند عملية التنبؤ بالحصص السوقية، على ما يأتي:

$$\text{الحصة السوقية للشركة في الفترة الحالية} = \frac{\text{عدد زبائن الشركة في بداية الفترة}}{\text{مجموع زبائن الشركات في بداية الفترة}}$$

أي أن :

$$\text{Share}(F_i) = \frac{V_i}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

حيث إن:

Share $(F_i)$: تمثل الحصة السوقية للشركة رقم (i) في الفترة الحالية.

$V_i$ : تمثل عدد الزبائن في بداية الفترة للشركة رقم (i).

V: تمثل مجموع الزبائن للشركات في بداية الفترة، إذ أن $\left[V = \sum_{i=1}^{m} V_i\right]$.

**مثال (2):**

إستخدم المعلومات الواردة بالمثال رقم (1)، المتعلقة بعدد الزبائن $(V_i)$ للمصانع الثلاثة $(F_3, F_2, F_1)$ وهي (2500، 2200، 2300) على الترتيب، وكذلك مصفوفة





الاحتمالات الانتقالية المستخرجة للمثال السابق وذلك: للتنبؤ بالحصص السوقية للمصانع الثلاثة للأشهر (نيسان، مايس، حزيران) لسنة (2007).

**الحل:**

لإيجاد الحصص السوقية للمصانع الثلاثة، نطبق الصيغة الآتية:

$$\text{Share}(F_i) = \frac{V_i}{V} \qquad , i = 1, 2, 3$$

عليه فإن الحصة السوقية للمصنع $(F_1)$ لشهر نيسان (نيسان/ 2007) هي:

$$\text{Share}(F_1) = \frac{V_1}{V} \qquad , V = 2300 + 2200 + 2500 = 7000$$

$$= \frac{2300}{7000} = 0.33$$

وإن الحصة السوقية للمصنع $(F_2)$ لشهر (نيسان/ 2007) هي:

$$\text{Share}(F_2) = \frac{V_2}{V} = \frac{2200}{7000} = 0.31$$

وأخيراً، إن الحصة السوقية للمصنع $(F_3)$ لشهر (نيسان/ 2007) هي:

$$\text{Share}(F_3) = \frac{V_3}{V} = \frac{2500}{7000} = 0.36$$

وبعد الانتهاء يتم عرض الحصص السوقية للمصانع الثلاثة، لشهر (نيسان/ 2007) بهيئة صف (Row)، أي إن:

$$Shares\ (F_i) = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.31 & 0.36 \end{pmatrix}$$

وللتنبؤ بالحصص السوقية للمصانع الثلاثة $(F_3, F_2, F_1)$، للفترة القادمة لشهر (مايس/ 2007)، نقوم بضرب عناصر صف الحصص السوقية أعلاه لشهر (نيسان/ 2007) في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، أي إن:

$$Shares\ (F_i) = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.31 & 0.36 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.78 & 0.13 & 0.09 \\ 0.09 & 0.86 & 0.05 \\ 0.04 & 0.06 & 0.90 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Share\ (F_1) = [\ 0.33\ (0.78) + 0.31\ (0.09) + 0.36\ (0.04)\ ]$$
$$= 0.2574 + 0.0279 + 0.0144$$
$$= 0.2997$$

$$Share\ (F_2) = [033\ (0.13) + 0.31\ (0.86) + 0.36\ (0.06)\ ]$$
$$= 0.0429 + 0.2666 + 0.0216$$
$$= 0.3311$$

$$Share\ (F_3) = [0.33(0.09) + 0.31\ (0.05) + 0.36\ (0.90)\ ]$$
$$= 0.0297 + 0.0155 + 0.3240$$
$$= 0.3692$$

ويمكن عرض الحصص السوقية للمصانع الثلاثة، لشهر (مايس / 2007) بهيئة صف وعلى النحو الآتي:

$$Shares = \begin{pmatrix} 0.2997 & 0.3311 & 0.3692 \end{pmatrix}$$

وللتنبؤ بالحصص السوقية للمصانع الثلاثة $(F_3, F_2, F_1)$، للفترة القادمة لشهر (حزيران/ 2007)، نقوم بضرب عناصر الصف أعلاه لشهر (مايس/ 2007) في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، أي أن:

$$Shares\ (F_i) = \begin{pmatrix} 0.2997 & 0.3311 & 0.3692 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.78 & 0.13 & 0.09 \\ 0.09 & 0.86 & 0.05 \\ 0.04 & 0.06 & 0.90 \end{bmatrix}$$





$$\therefore Share\ (F_1) = [\ 0.2997\ (0.78) + 0.3311\ (0.09) + 0.3692\ (0.04)\ ]$$
$$= 0.2784$$

$$Share\ (F_2) = [0.2997\ (0.13) + 0.3311(0.86) + 0.3692\ (0.06)\ ]$$
$$= 0.3458$$

$$Share\ (F_3) = [0.2997(0.09) + 0.3311\ (0.05) + 0.3692\ (0.90)\ ]$$
$$= 0.3758$$

وتأسيساً على ما تقدم، فإن الحصص السوقية للمصانع الثلاثة للأشهر المذكورة (نيسان، مايس، حزيران) لسنة (2007)، موضحة بمصفوفة الحصص السوقية الواردة بالجدول الآتي:

| الأشهر | الحصص السوقية للمصانع | | |
|---|---|---|---|
| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
| نيسان | 0.33 | 0.31 | 0.36 |
| مايس | 0.2997 | 0.3311 | 0.3692 |
| حزيران | 0.2784 | 0.3458 | 0.3758 |

### 10-5: تحديد شروط حالة توازن السوق:

تُعرف حالة توازن السوق، بأنها: "الحالة التي تصبح فيها الحصص السوقية للمنظمات الداخلة في عملية المنافسة بالسوق في حالة إستقرار دون أن تتغير هذه الحصص في الفترات اللاحقة".

ويمكن التوصل إلى حالة توازن السوق، من خلال العلاقات الآتية:

أ- نفرض لدينا متجه إحتمالي صفي ($\underline{S}$)، يمثل الحصص (Shares) السوقية لـ (m) من المنظمات، أي إن:

$$\underline{S} = [\ S_1, S_2, \ldots, S_m] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

حيث إن مجموع حصص المنظمات يجب أن يكون مساوٍ إلى الواحد الصحيح، أي إن:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ب- نفرض لدينا مصفوفة الاحتمالات الانتقالية $P = [P_{ij}]$ مربعة الشكل ومن درجة (mxn)، والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$P_{mxn} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mn} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

حيث إن مجموع قيم كل صف من صفوف مصفوفة الاحتمالات الانتقالية أعلاه، يكون مساوٍ إلى الواحد الصحيح، أي إن:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

وبإعادة استخدام العلاقات السابقة بالآلية التالية، يمكن الوصول إلى حالة توازن السوق، على النحو الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\underline{S}.P = \underline{S} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

يمكن إعادة كتابة العلاقات الواردة في (8) و (9)، على النحو الآتي:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$[S_1 \;\; S_2 \;\; \ldots \;\; S_m] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mn} \end{bmatrix} = [S_1 \;\; S_2 \;\; \ldots \;\; S_m] \ldots (11)$$

وبتبسيط العلاقتين (10) و (11)، نحصل على المعادلات الآتية:

$$S_1 + S_2 + \ldots\ldots\ldots + S_m = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$





$$\left.\begin{aligned} S_1P_{11} + S_2P_{21} + \ldots\ldots + S_mP_{m1} &= S_1 \\ S_1P_{12} + S_2P_{22} + \ldots\ldots + S_mP_{m2} &= S_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ S_1P_{1n} + S_2P_{2n} + \ldots\ldots + S_mP_{mn} &= S_m \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

يتضح من المعادلات الواردة في العلاقتين (12) و (13) عن وجود (m + 1) معادلة تحتوي على (m) من المجاهيل، ولغرض حل منظومة المعادلات السابقة، ينبغي حذف أحداها بهدف الحصول على (m) من المعادلات تحتوي على (m) من المجاهيل.

وبعد إجراء حل منظومة المعادلات البالغ عددها (m) باستخدام طريقة الحذف أو التعويض، سنحصل على متجه احتمالي صفي ($\underline{S}^*$)، حيث إن هذا المتجه يمثل شروط حالة توازن السوق، وإن قيم المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$) تشير إلى حصص المنظمات في فترة توازن السوق.

مثال (3):

إستخدم المعلومات الواردة في المثال (2)، المتعلقة بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P) التي تمثل الحصص السوقية لثلاثة مصانع للأشهر (نيسان، مايس، حزيزان) لسنة (2007)، إذا علمت بأن مجموع الزبائن للمصانع الثلاثة بلغ (7000) زبون.

$$P = \begin{bmatrix} 0.3300 & 0.3100 & 0.3600 \\ 0.2997 & 0.3311 & 0.3692 \\ 0.2784 & 0.3458 & 0.3758 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- تحديد شروط حالة توازن السوق.

2- تحديد نسبة الحصة السوقية لكل مصنع في فترة التوازن.

3- تحديد عدد الزبائن لكل مصنع في فترة توازن.

**الحل:**

1- تحديد شروط حالة توازن السوق:

للوصول إلى شروط حالة توازن السوق، نقوم باستخدام العلاقات الآتية:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 1$$

$$\underline{S}\, P = \underline{S}$$

يمكن إعادة كتابة العلاقتين أعلاه، على النحو الآتي:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

$$[S_1 \quad S_2 \quad S_3]\begin{bmatrix} 0.3300 & 0.3100 & 0.3600 \\ 0.2997 & 0.3311 & 0.3692 \\ 0.2784 & 0.3458 & 0.3758 \end{bmatrix} = [S_1 \quad S_2 \quad S_3]$$

وبتبسيط العلاقتين أعلاه، نحصل على المعادلات الآتية:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$0.33\, S_1 + 0.2997\, S_2 + 0.2784\, S_3 = S_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$0.31\, S_1 + 0.3311\, S_2 + 0.3458\, S_3 = S_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$0.36 S_1 + 0.3692\, S_2 + 0.3758\, S_3 = S_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

يتضح من العلاقات (1، 2، 3، 4) عن وجود (4) أربعة معادلات تحتوي على (3) ثلاثة مجاهيل، ولحل المعادلات أعلاه ينبغي حذف إحدى المعادلات ولتكن المعادلة رقم (4).

وبحل المعادلات المتبقية (1، 2، 3) باستخدام طريقة الحذف حصلنا على المجاهيل الثلاثة ($S_3, S_2, S_1$) على النحو الآتي

أ- بحل المعادلتين (1) و (2) باستخدام طريقة الحذف، حصلنا على المعادلة الآتية:





$$0.9697\, S_2 + 0.9484\, S_3 = 0.67 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ب- وبحل المعادلتين (1) و (3) باستخدام طريقة الحذف، حصلنا على المعادلة الآتية:

$$0.9789\, S_2 - 0.0358\, S_3 = 0.31 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

جـ- وبحل المعادلتين (5) و (6) باستخدام طريقة الحذف، حصلنا على ما يأتي:

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= 0.330 \\ S_3 &= 0.369 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

وبتعويض ناتج العلاقة ر قم (7) في العلاقة رقم (1)، حصلنا على قيمة ($S_1$)، كالآتي:

$$\because\ S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

$$\therefore\ S_1 = 1 - S_2 - S_3$$

$$= 1 - 0.33 - 0.369$$

$$= 0.301$$

عليه ستكون قيم المتجه الاحتمالي الصفي ($\underline{S}^*$)، على النحو الآتي:

$$\underline{S}^* = [0.301 \quad 0.330 \quad 0.369] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

إن المتجه الاحتمالي الصفي ($\underline{S}^*$) الوارد بالعلاقة (8)، يمثل شروط حالة توازن السوق. وللتحقق من ذلك نقوم بضرب المتجه الاحتمالي الصفي ($\underline{S}^*$) في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P) على النحو الآتي:

$$\underline{S}^* P = [0.301 \quad 0.330 \quad 0.369]\begin{bmatrix} 0.3300 & 0.3100 & 0.3600 \\ 0.2997 & 0.3311 & 0.3692 \\ 0.2784 & 0.3458 & 0.3758 \end{bmatrix}$$

$$= [0.301 \quad 0.330 \quad 0.369]$$

من أعلاه يتضح إستقرار قيم المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$) وعدم تغيرها، وهذا يدل على إن المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$) يمثل شروط حالة توازن السوق.

2- تحديد نسبة الحصة السوقية لكل مصنع في فترة التوازن:

يمكن الحصول على حصة كل مصنع في فترة التوازن، من خلال المتجه الاحتمالي الصفي ($\underline{S}^*$)، حيث إن:

$$\text{Share } (F_1) = 0.301$$
$$\text{Share } (F_2) = 0.330$$
$$\text{Share } (F_3) = 0.369$$

من أعلاه يتضح بأن نسب الحصص السوقية للمصانع الثلاثة في فترة التوازن هي:

$$\text{Share } (F_1) = 30.1\%$$
$$\text{Share } (F_2) = 33.0\%$$
$$\text{Share } (F_3) = 36.9\%$$

3- تحديد عدد الزبائن لكل مصنع في فترة التوازن:

يمكن إيجاد عدد الزبائن للمصانع الثلاثة في فترة التوازن، باستخدام الصيغ الآتية:

عدد زبائن المصنع ($F_1$) في فترة التوازن = مجموع الزبائن الكلي * نسبة الحصة السوقية للمصنع ($F_1$) في فترة التوازن.

= 7000 (%30.1)

= 2107 زبون

عدد زبائن المصنع الثاني ($F_2$) في فترة التوازن = 7000 (%33)

= 2310 زبون

عدد زبائن المصنع الثالث ($F_3$) في فترة التوازن = 7000 (%36.9)

= 2583 زبون





مثال (4):

إستخدم المعلومات التالية، التي تمثل مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P) التي تبين الحصص السوقية للمصنعين ($F_2$, $F_1$)، ولشهري (آب، أيلول) لسنة (2007)، علماً بان قيمة المبيعات الكلية للمصنعين بلغت (3) ثلاثة ملايين دينار.

$$P = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- تحديد شروط حالة توازن السوق.

2- تحديد نسبة الحصة السوقية لكل مصنع في فترة التوازن.

3- تحديد قيمة المبيعات لكل مصنع في فترة التوازن

الحل:

1- تحديد شروط حالة توازن السوق:

للوصول إلى شروط حالة توازن السوق، نقوم باستخدام العلاقات الآتية:

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$$

وبتبسيط العلاقتين أعلاه، نحصل على المعادلات الآتية:

$$S_1 + S_2 = 1 \quad \text{............(1)}$$
$$0.65\, S_1 + 0.45\, S_2 = S_1 \quad \text{............(2)}$$
$$0.35\, S_1 + 0.55\, S_2 = S_2 \quad \text{............(3)}$$

يتضح من العلاقات (3, 2, 1) بأن عدد المعادلات بلغ (3) معادلات وهي أكثر من عدد المجاهيل البالغة (2) مجهولين، وحل منظومة المعادلات السابقة ينبغي حذف إحدى المعادلات ولتكن المعادلة (3).

وبحل المعادلتين (1) و (2) باستخدام طريقة التعويض، حصلنا على قيمة المجهولين $(S_2, S_1)$ كالآتي:

$$S_1 + S_2 = 1 \qquad \text{............ (4)}$$

$$0.65\ S_1 + 0.45\ S_2 = S_1 \qquad \text{............ (5)}$$

وبتبسيط المعادلتين أعلاه، حصلنا على ما يأتي:

$$S_1 = 1 - S_2 \qquad \text{............ (6)}$$

$$(0.65 - 1)\ S_1 + 0.45\ S_2 = 0$$

$$-0.35\ S_1 + 0.45\ S_2 = 0 \qquad \text{............ (7)}$$

تقوم بتعويض العلاقة (6) في العلاقة (7) ينتج:

$$-0.35\ [1-S_2] + 0.45\ S_2 = 0$$

$$-0.35 + 0.35\ S_2 + 0.45\ S_2 = 0$$

$$0.80\ S_2 = 0.35$$

$$\therefore S_2 = \frac{0.35}{0.80} = 0.4375 \qquad \text{............ (8)}$$

نقوم بتعويض ناتج العلاقة (8) في العلاقة (6)، نحصل على:

$$\therefore S_1 = 1 - 0.4375$$

$$= 0.5625$$

عليه ستكون قيم المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$)، كالآتي:

$$\underline{S}^* = [0.5625 \quad 0.4375] \qquad \text{............ (9)}$$

إن المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$) الوارد بالعلاقة (9)، يمثل شروط حالة توازن السوق.

وللتحقق من ذلك نقوم بإجراء العملية الآتية:





$$\underline{S}^*P = [0.5625 \quad 0.4375]\begin{bmatrix}0.65 & 0.35\\ 0.45 & 0.55\end{bmatrix}$$

$$= [0.5625 \quad 0.4375]$$

من النتيجة السابقة يتضح إستقرار قيم المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$) وثبوتها، وهذا يدل على إن المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$) يمثل شروط حالة توازن السوق.

2- تحديد نسبة الحصة السوقية لكل مصنع في فترة التوازن:

يمكن الحصول على نسب الحصص السوقية للمصنعين $(F_2, F_1)$ في فترة التوازن من خلال نتائج المتجه الاحتمالي ($\underline{S}^*$)، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Share } (F_1) = 56.25\%$$

$$\text{Share } (F_2) = 43.75\%$$

3- تحديد قيمة المبيعات لكل مصنع في فترة التوازن:

يمكن تحديد قيمة المبيعات لكل مصنع في فترة التوازن، كالآتي:

قيمة مبيعات المصنع $(F_1)$ في فترة التوازن = قيمة المبيعات الكلية * نسبة الحصة السوقية للمصنع في فترة التوازن

= 3000000 (56.25 %)

= 1687500 دينار

قيمة مبيعات المصنع الثاني $(F_2)$ في فترة التوازن = 3000000 (43.75%)

= 1312500 دينار

# أسئلة حول الفصل العاشر

س1: وضح مفهوم التحليل الماركوفي، شارحاً أهم استخداماته في منظمات الأعمال.

س2: ما المقصود بالعمليات التصادفية العشوائية؟ ذاكراً أهمية هذا النوع من العمليات في التحليل الماركوفي.

س3: وضح إفتراضات تحليل ماركوف، شارحاً أهميتها في بناء مصفوفة الاحتمالات الانتقالية.

س4: إشرح بالتفصيل آلية بناء مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، موضحاً أهميتها في التحليل الماركوفي.

س5: وضح الصيغ الرياضية المستخدمة في بناء مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، وشروط حالة توازن السوق.

س6: تتنافس أربع شركات إنتاجية متخصصة في صناعة الأدوية، ومن خلال دراسة السوق لشهر (نيسان/ 2007)، تبين إن عدد الزبائن في بداية الفترة موضح بالجدول الآتي:

| الشركات المتنافسة | عدد الزبائن ($V_i$) |
|---|---|
| $F_1$ | 6000 |
| $F_2$ | 4000 |
| $F_3$ | 7000 |
| $F_4$ | 3000 |
| المجموع | 20000 |

وكانت مصفوفة الكسب والخسارة، موضحة كالآتي:





| $F_i$ \ $F_j$ | | خسارة ($L_i$) → $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| كسب ($W_i$) ↓ | $F_1$ | 0 | 16 | 10 | 4 |
| | $F_2$ | 19 | 0 | 33 | 12 |
| | $F_3$ | 10 | 8 | 0 | 6 |
| | $F_4$ | 16 | 21 | 2 | 0 |

المطلوب:

1- حساب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P).

2- تحديد الحصص السوقية للشركات، وللأشهر (نيسان، مايس، حزيران) لسنة (2007).

س7: تتقاسم ثلاث شركات سوق المستهلكين لثلاث علامات تجارية في إحدى المدن الأردنية، وكانت حصة كل شركة خلال شهر (تموز) لسنة (2006)، على النحو الآتي:

[ حصة العلامة الأولى = 0.2، حصة العلامة الثانية = 0.5، حصة العلامة الثالثة = 0.3 ]، وكانت مصفوفة الاحتمالات الانتقالية موضحة كالآتي:

$$P = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.11 & 0.06 \\ 0.04 & 0.91 & 0.05 \\ 0.07 & 0.12 & 0.81 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- نسب الاحتفاظ بكل علامة للشركات الثلاث.

2- إحتمال خسارة العلامة الأولى إلى الثانية.

3- إحتمال كسب العلامة الثانية من الثالثة.

4- تحديد حصة كل علامة لشهر (آب).

س8: إستخدم المعلومات التالية، التي تمثل مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P) التي تبين الحصص السوقية للمصنعين ($F_1$) و ($F_2$)، وللأشهر (شباط، آذار) لسنة (2007)، إذا علمت بأن قيمة المبيعات الكلية للمصنعين بلغت (8) ثمانية ملايين دينار.

$$P = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.71 & 0.29 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- نسبة الاحتفاظ لكل مصنع.

2- تحديد شروط حالة توازن السوق.

3- تحديد نسبة الحصة السوقية لكل مصنع في فترة التوازن.

4- تحديد قيمة المبيعات لكل مصنع في فترة التوازن.

س9: لديك مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P)، تمثل الحصص السوقية للشركتين ($C_2$, $C_1$)، لشهري (أيلول، ت$_1$) لسنة (2007)، علماً بأن قيمة المبيعات الكلية للشركتين بلغت (5) خمسة ملايين دينار.

$$P = \begin{bmatrix} ? & 0.21 \\ 0.37 & ? \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- نسبة الاحتفاظ لكل شركة.

2- تحديد شروط حالة توازن السوق.

3- تحديد قيمة المبيعات لكل شركة في فترة التوازن.



# 11

## الفصل الحادي عشر

# المعولية

# Reliability