Lecture [1] "Preliminaries" Review: مراجعة

في هذه المحاضرة سنقدم مراجعة سريعة لأهم
التعريفات والنظريات الأساسية في الكالكولس
وهي أساسية لهذه المادة ولأغلب مواد الهندسة

Def^n: (تعريف): We say that f is continuous at $x = a$ iff $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

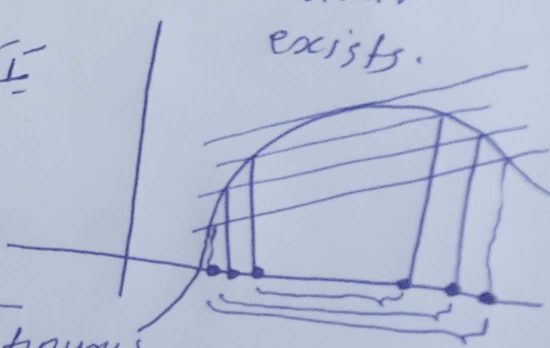
Def^n: We say that f is differentiable at $x = a$ iff

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

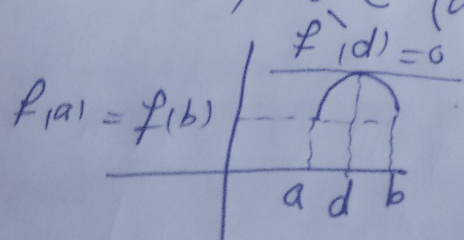
where the limit exists.

يكتب تعريف المشتقة بطريقة ثانية

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$



Roll's Theorem: if ① $f \in C[a,b]$ (f اقتران متصل على $[a,b]$) (continuous)
② $f(a) = f(b)$ ③ f is differentiable on (a,b)
$\Rightarrow \exists$ (there exists) (يوجد) $d \in (a,b)$ s.t. (such that) $f'(d) = 0$

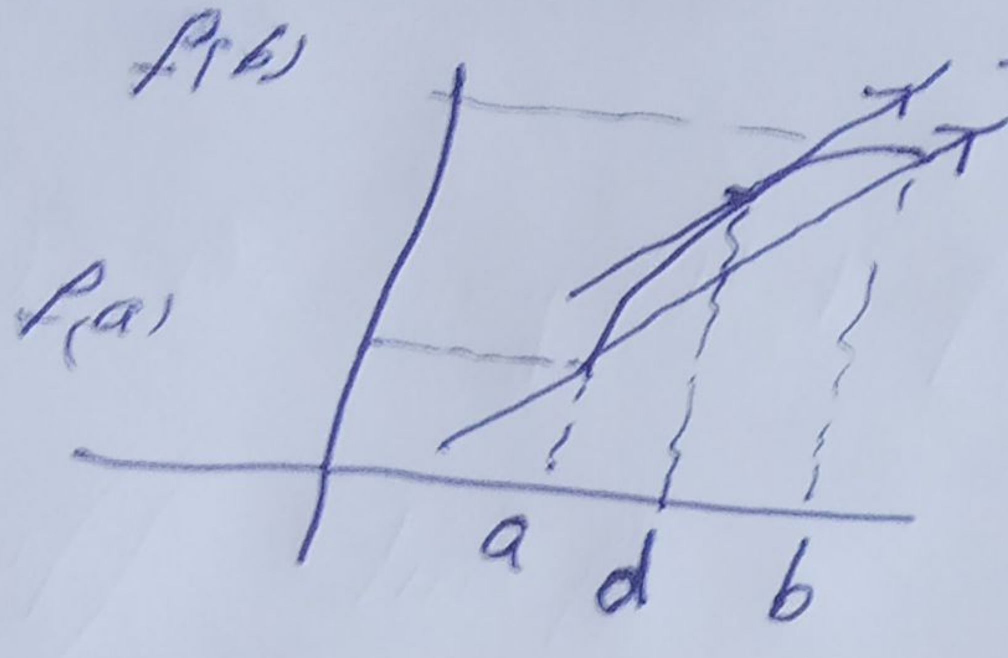


(2)

Mean value Thm:

If ① $f \in C[a,b]$ ② f is differentiable on (a,b)

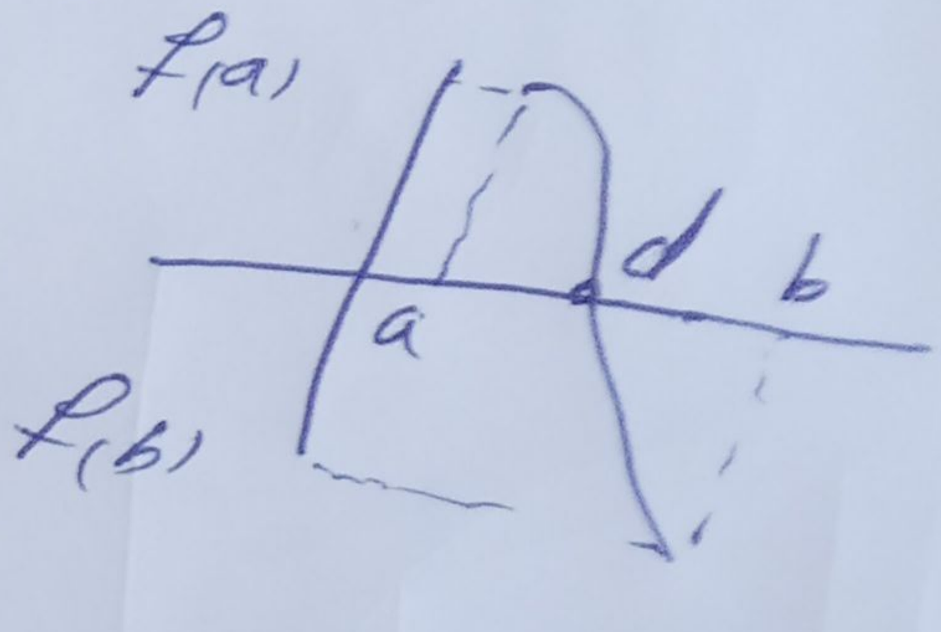
$\Rightarrow \exists\, d \in (a,b)$ s.t. $f'(d) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$



Bolzano Thm:

If ① $f \in C[a,b]$ ② $f(a)\, f(b) < 0$

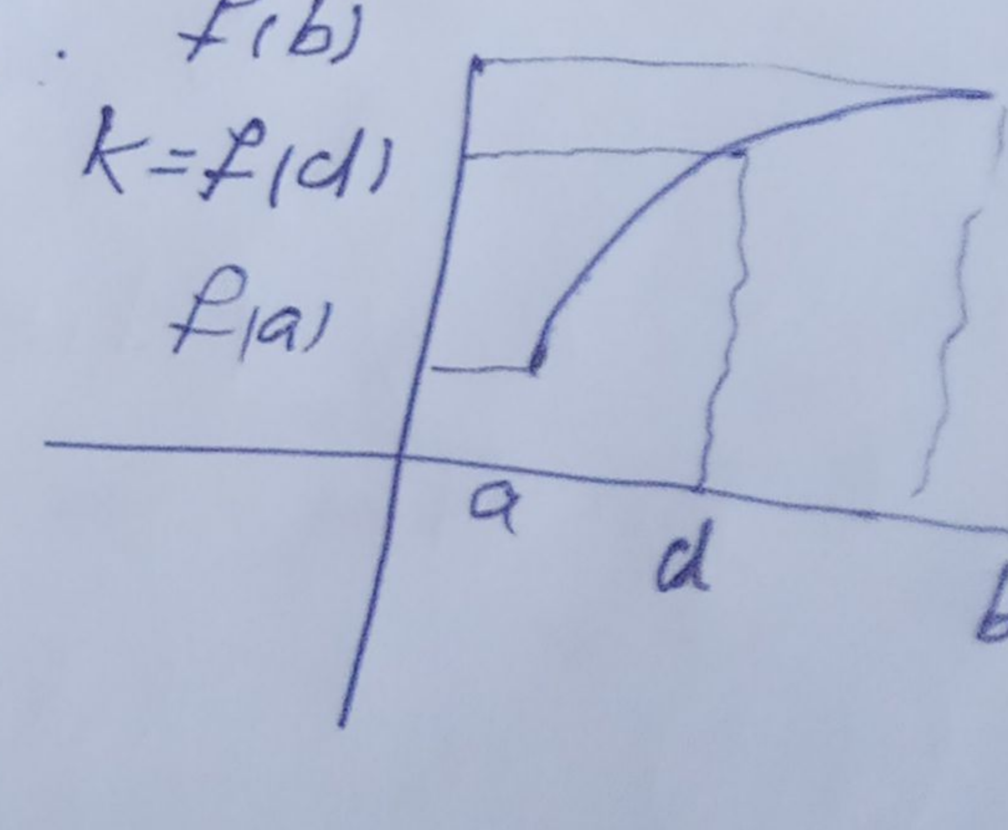
$\Rightarrow \exists\, d \in [a,b]$ s.t. $f(d) = 0$.



Intermediate value Thm:

If ① $f \in C[a,b]$ ② $K \in (f(a), f(b))$

$\Rightarrow \exists\, d \in [a,b]$ s.t. $f(d) = K$.



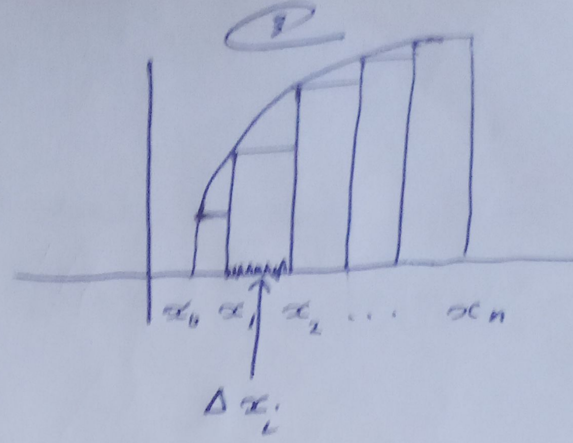
Def^n: Riemann Integration

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

where $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

حيث أن التكامل هو المساحة تحت المنحنى
لذلك نقسم المنطقة إلى مستطيلات.



$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \text{عرض المستطيل}$$

$$\Rightarrow x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

بحيث شكل مستطيل

$x_3 = ?$

Ex: Let $f(x) = x \Rightarrow$ determine that $f(x)$ is Riemann integrable on $[0,1]$.

$\left(c_i = x_i \;,\; \Delta x_i = \frac{b-a}{n}\right)$.

Sol:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

هذا الحل بالقانون، احسب التكامل مباشرة فإنك تحصل على نفس النتيجة.

Weight mean value Thm:

If ① $f \in C[a,b]$ ② g is Riemannian integrable on $[a,b]$
③ g doe Not change sign on $[a,b]$ g لا يتغير اشارته

$\Rightarrow \exists\, d \in [a,b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(d) \int_a^b g(x)\, dx$$

If $g(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = f(d) \int_a^b 1\, dx$

$$= f(d)\,(b-a) \Rightarrow f(d) = \boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx}$$

This is called the Average value of f.

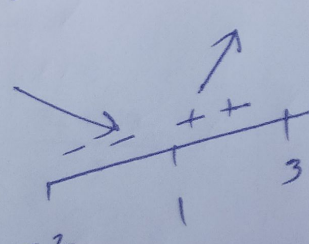
Extreme value Thm:

If $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, C_1, C_2 \in [a,b]$ s.t.

$$f(C_1) \leq f(x) \leq f(C_2) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Ex: Find the extreme values for $f(x) = x^2 - 2x + 1$ on $[-2, 3]$

الحل: (اتوجيهي) نشتقه ونساوي بالصفر
ونجد القيم القصوى والنقاط الحرجة.
وهي
$-2, 1, 3$



بسيط زلال

Taylor Thm : هذه النظرية مهمة جدا

Let $f \in C^n[a,b]$ and $f^{(n+1)}$ exists on (a,b)

suppose $x_0 \in (a,b)$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists d \in (x_0, x)$

or $d \in (x, x_0)$ s.t. $f(x) = P(x) + R(x)$.

where
$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

and
$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

التوضيح: إذا حقق الاقتران f الشروط في نص النظرية

فإنه يمكن تقريبه على شكل كثير حدود $P(x)$

وهناك error وهو $R(x)$.

مهم جدا للفهم

تفسير الرموز

C^n: المشتقات من 1 إلى n موجودة ومتصلة.

$f^{(n)}$: المشتقة رقم n للاقتران.

Ex: Use Taylor Thm about $x_0 = 0$ for $f(x) = \sin x$ (write Taylor expansion for $\sin x$) | صيغة أخرى للسؤال

Sol: $f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1.$

لابد قراءة هذا الحل لـ Sin
اعمل لـ Taylor لـ
$\cos$
e^x
$\frac{1}{1+x}$
عند الصفر

$$\Rightarrow P(x) = 0 + 1(x-0) + 0 + \frac{-1(x-0)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \text{ when}$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)}(x-0)^{n+1} \quad \text{s.t. } |x-0| < 1$$

when $n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(x) = 0 \Rightarrow$

$$f(x) \simeq P(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$