Chp $\boxed{1}$ Section $\boxed{1.2}$ Lecture 2

(1)

Roundoff Errors and computer Arithmetic

عندما نتعامل مع الكمبيوتر في التحليل العددي فإن هناك

3 أنواع من الايرور.

Types of errors:

(1) Truncation error: occures when changing infinite series to finite ones.

يحدث عندما نحول المتسلسلات غير المنتهية إلى منتهية وهذا يضطرنا لحذف جزء من المتسلسلة

(2) Roundoff error: occures when computers perform real numbers.

يحدث عندما يتعامل الكمبيوتر مع الأعداد الحقيقية. لأن الأعداد الحقيقية فيها اعداد غير نسبية مثل $\sqrt{2}$ وهذه غير منتهية، والكمبيوتر وحداته محدودة لذلك نضطر للوقوف عند خانة معينة.

(3) Mistakes: errors in input or out put

وهذا يحدث بخطأ شخصي في الادخال أو طلب النتيجة.

موضوعنا هو (2) (Roundoff error): هناك فرق بين علم حساباتنا في الواقع وحسابات الكمبيوتر، لأنه الـ bits في ذاكرة الكمبيوتر محدودة وبالتالي نحتاج للتقريب لأن الكمبيوتر يتعامل مع Binary ثنائي و Decimal عشري

الآن وكما ذكرنا بسبب أن ذاكرة الكمبيوتر محدودة اجتمعت شركات الكمبيوتر وبعد دراسة وجدوا معادلة لتخزين الرقم العشري فيها طبعا على شكل ثنائي، والمعادلة هي

$$(-1)^{s}\, 2^{c-1023}\,(1+f)\ ,\ \text{where}$$

هذه المعادلة تخزنها 64 خانة فقط

s: first number (sign indicator).

c: bit exponent (characteristic).

f: fraction part (mantissa).

أول رقم	11 رقم	الباقي
s	bit exponent	fraction part
يعطينا موجب أو سالب	الصحيح	العشري

مثال:

Ex: Consider the machine number ~~1000 00~~

1 10000000011 10111001001

Find s, c and f, then find the decimal number $(-1)^{s}\, 2^{c-1023}\,(1+f)$.

Sol: machine number 1 10000000011 10111001001

نبدأ من هنا

$s=1 \Rightarrow (-1)^{s} = -1$ (negative).

$c = 2^{0} + 2^{1} + 2^{10} = 1 + 2 + 1024 = 1027$

3

$$f = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 0.72290$$

$\Rightarrow$ the decimal number is

$$(-1)^s \, 2^{c-1023} (1+f) = (-1) \, 2^{1027-1023} (1 + 0.72290)$$

$$= -2^4 (1 + 0.7229)$$

$$= \boxed{-27.56640625}$$

ملاحظة مهمة: The standard form for decimal numbers is:

$$y = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$$

where

$1 \le d_1 \le 9$

$0 \le d_2 \le 9$

$0 \le d_3 \le 9$

$\vdots$

$0 \le d_k \le 9$

$0 \le d_{k+1} \le 9$

$\vdots$

$\Rightarrow$ and n is an integer. عدد صحيح

Ex: write the following numbers into standard form

① $0.0234 \times 10^2 = 0.234 \times 10^1$

② $2.3456 = 0.23456 \times 10^1$

Now, There are two ways to approximate the decimal number $y = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$

① K-digit chopping ② K-digit rounding.

Two

① K-digit chopping : we chopp of $(d_{k+1}\, d_{k+2} \cdots)$ يعني ④

$\Rightarrow$ floating point of $y = fl(y) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^{n}$

القيمة بعد التقريب

Ex: use 5-digit chopping to approximate

$y = 2.356789 \times 10^{3}$

s/: ① standard form نحولها $\Rightarrow y = 0.2356789 \times 10^{4}$

$\Rightarrow fl(y) = 0.23567 \times 10^{4} = \boxed{2356.7}$

② K-digit rounding :

case(1): if $d_{k+1} < 5 \Rightarrow$ we use k-digit chopping

Ex: use 4-digit rounding to approximate

$y = 0.2345378 \times 10^{3}$

s/: $fl(y) = 0.2345 \times 10^{3}$

case(2): If $d_{k+1} \geq 5 \Rightarrow fl(y) = (0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_k \times 10^{n} + \overbrace{0.000\cdots0}^{(k-1)}1 \times 10^{n})$

$= (0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_k \times 10^{n} + 1 \times 10^{n-k})$

فسر ذلك!

Ex: use 4-digit rounding for 0.2345678×10^{3}

s/: $fl(y) = 0.2346 \times 10^{3}$ #

Two rules for errors:

Def^n: If p^* is an approximation to $p \Rightarrow$ we define:

① absolute error $= |p - p^*|$ ② relative error $= \dfrac{|p - p^*|}{|p|}$.

Ex: Let $p = 0.321571$ and $p^* = fl(p)$ is 5-digit round for p. Find ① $|p - p^*|$ ② $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$.

S/.

$p^* = 0.32157$

① $|p - p^*| = |0.321571 - 0.32157| = \boxed{0.000001}$

② $\dfrac{|p - p^*|}{|p|} = \dfrac{0.000001}{0.321571} = \dfrac{1}{321571} = \boxed{0.0000031097}$

Ex: In K-digit chopping, show that $\dfrac{|y - fl(y)|}{|y|} \le 10^{-k+1}$.

S/:

$$\frac{|0.\overbrace{d_1 d_2 \dots d_k}^{} d_{k+1} \dots \times 10^n - 0.\overbrace{d_1 d_2 \dots d_k}^{} \times 10^n|}{|0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n|} = \frac{|y - fl(y)|}{|y|}$$

$$= \frac{|0.\overbrace{00\dots0}^{k\text{-times}} d_{k+1} \dots \times \cancel{10^n}|}{|0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times \cancel{10^n}|} = \frac{|0.d_{k+1} \dots \times 10^{-k}|}{|0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots|}$$

الآن لجعل الكسر أكبر ما يمكن نجعل البسط أكبر ما يمكن والمقام أصغر ما يمكن

$$\Rightarrow \; = \frac{0.999\dots \times 10^{-k}}{0.100\dots0\dots} = \frac{1 \times 10^{-k}}{0.1} = \boxed{10^{-k+1}} \quad \#$$

6

Ex: In K-digit rounding, show that $\frac{|y-fl(y)|}{|y|} \le 0.5 \times 10^{-k+1}$ H.W

H.W

Operations of $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$:

$x \oplus y = fl(fl(x) \oplus fl(y))$, ~~$x \otimes y = fl(fl \otimes$~~ قوانين

$x \ominus y = fl(fl(x) \ominus fl(y))$,

$x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$,

$x \oslash y = fl(fl(x) \div fl(y))$

Ex: Let $x = 2.351767$

$y = 1.571235$

use 4-digit rounding

to find: ① $x \oplus y$

② $3x \oslash y$:

Sl: $x = 0.2351767 \times 10^1$

$y = 0.1571235 \times 10^1$ $fl(x) = 0.2352 \times 10^1$

$fl(y) = 0.1571 \times 10^1 \Rightarrow x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$

$= fl(0.2352 \times 10^1 + 0.1571 \times 10^1) = fl(3.923)$

$= fl(0.3923) = 0.3923 \times 10 = \boxed{3.923}$

② $3x = 0.7055301 \times 10^1 \Rightarrow fl(3x) = 0.7055 \times 10^1$

$\Rightarrow 3x \oslash y = fl(fl(3x) \div fl(y))$

$= fl(7.055 \div 1.571) =$

$= fl(4.49077021) = fl(0.449077021 \times 10^1)$

$= \boxed{4.491}$

#