الوحدة الأولى: (الاقترانات)

العلاقة: هي أي مجموعة من الازواج المرتبة .

تسمى مجموعة المساقط الاولى للأزواج المرتبة في العلاقة مجال العلاقة،

تسمى مجموعة المساقط الثانية للأزواج المرتبة في العلاقة مدى العلاقة.

مثال (١): لتكن العلاقة ع = { (١،٢)، (٣،٥)، (٤،٨)،(٥، ١٠) }

المجال = { ١، ٣، ٤، ٥ }

المدى = { ، ، ، }

الاقتران: هو علاقة بين عناصر مجموعتين، بحيث يرتبط فيه كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

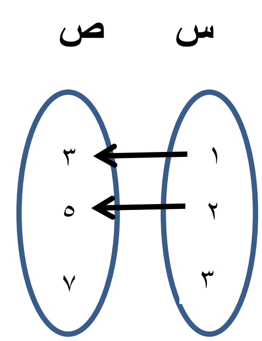
***المجموعة الأولى تسمى المجال (Domain) والمتغير فيها يسمى المتغير المستقل**

***المجموعة الثانية تسمى المدى (Range) والمتغير فيها يسمى المتغير التابع**

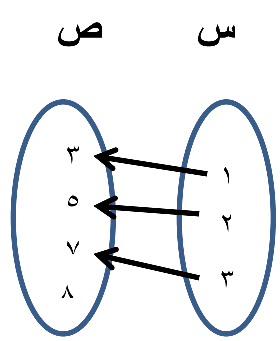
وقد يعرَف الاقتران من أ ⟵ ب (حيث أ، ب مجموعتان)

تسمى المجموعة أ المجال، والمجموعة ب المجال المقابل ، وتكون صور العناصر تحت تأثير الاقتران تسمى المدى. أي أن المدى ⊆ المجال المقابل.

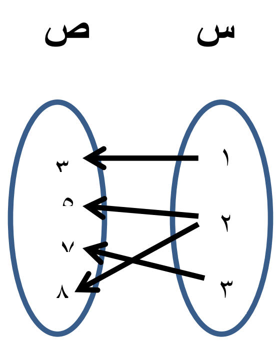
مثال (٢): ألاحظ العلاقات الآتية الممثلة، وحدد أي منها تمثل اقتراناً:



الشكل (١)



الشكل (٢)



الشكل (٣)

<u>الحل :</u>

العلاقة في الشكل (١) : ليست اقترانا لأن ---------------

العلاقة في الشكل (٢) : اقترانا لأن ----------------------

العلاقة في الشكل (٣) :

<u>مثال (٣):</u>

إذا كانت أ ={٠، ١، ٢، ٣ }،   ،   ب = {٠، ١، ٢ ، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

وكانت ق : أ ⟵ ب   بحيث ق(س) = ٢س + ١

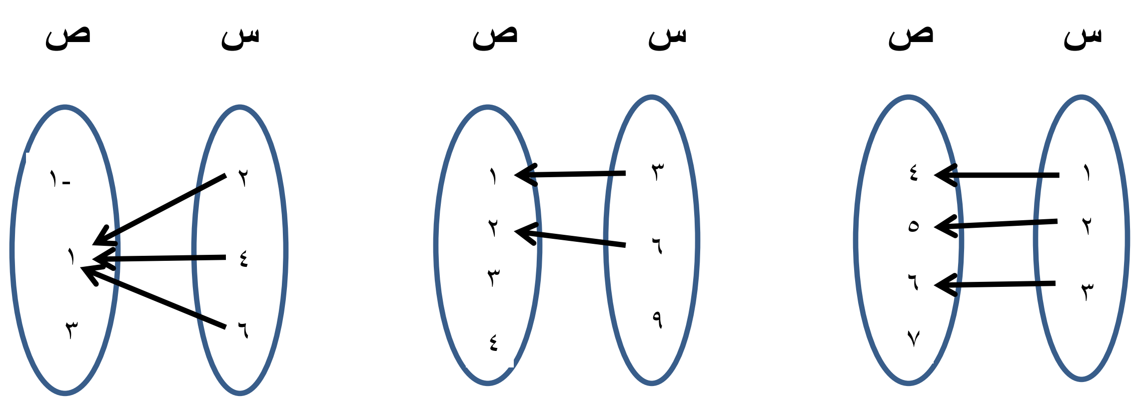
حدد كل مما يلي : مجال الاقتران، المجال المقابل ، المدى .

<u>الحل</u> : مجال الاقتران = {٠، ١، ٢ ، ٣}

المجال المقابل = {   ،   ،   ،   ،   ،   ،   }

المدى = {   ،   ،   ،   }

<u>سؤال</u> : أي من العلاقات الاتية تعد اقتراناً وأيها لا يعد اقتراناً وإذا كانت اقتران اكتب المجال والمجال المقابل والمدى.



أنواع الاقترانات:

١)اقترانات جبرية : كثيرات الحدود ، متعددة القاعدة، القيمة المطلقة، أكبر عدد صحيح، الاقترانات النسبية ، الاقترانات الجذرية.

٢) اقترانات غير جبرية : الدائرية (المثلثية) ، الأسية ، اللوغاريتمية .

وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض من كثيرات الحدود(الخطي والتربيعي) ، الاقترانات النسبية، والاقترانات الأسية واللوغاريتمية.

اقتران كثير الحدود :

هو اقتران معرف على ح او أي مجموعة جزئية من ح، ويتكون من حد جبري أو مجموع عدة حدود جبرية، وتكون فيه أسس المتغير اعداداً صحيحة غير سالبة، ونعبر عن كثير الحدود بالصيغة الآتية:

ق(س) = $أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_{ن-٢} س^{ن-٢} + \cdot\cdot\cdot + أ_١ س^١ + أ.$

$أ_.$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ $أ_ن$ **أعدادا حقيقية وتسمى معاملات كثير الحدود ق(س).**

ن، ن- ١ ، ن – ٢ ، ٠٠٠ ، ١ ، ٠ أعدادا صحيحة غير سالبة .

ملاحظة : درجة كثير الحدود هي أكبر أس للمتغير فيه.

مثال(٤): ميز الاقترانات كثير الحدود مما يلي :

١) ق(س) = $٢س^٥ - ٥١س + ٩$

كثير حدود من الدرجة الخامسة

٢) ق(س) = $٦س - س^{\frac{١}{٣}}$

٣) ق(س) = ٣

٤) ق(س) = $\pi س^٢ + س^{\frac{٣}{٤}} + ١$

<u>مثال (٥):</u>

لتكن ق(س) = ٩س ^{٣} – $\frac{١}{٢}$س ^{٢} – ٥س ^{٤} – ٣

جد $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$، $أ_{٢}$، $أ_{٣}$، $أ_{٤}$

$أ_{٠}$ = -٣ ، $أ_{٣}$ = ٩

$أ_{١}$ = صفر ، $أ_{٤}$ = -٥

$أ_{٢}$ = – $\frac{١}{٢}$

<u>مثال (٦)</u> : ليكن ق(س) = ٢س + ٤

اذا كان ق(س) = صفرا ، فان ٢س + ٤ = صفر

٢س = - ٤

س = - ٢

نسمي س = - ٢ صفرا للاقتران ق

<u>مثال (٧)</u> : إذا كان ر (س) = ٢س ^{٢} – ١٨ ، جد صفر الاقتران

الحل : **٢س ^{٢} – ١٨ = صفر**

٢س ^{٢} = ١٨

س ^{٢} = ٩

س = ٣ أو -٣ ،، للاقتران صفران هما : ٣ ، -٣

سؤال : جد أصفار الإقترانات الآتية:

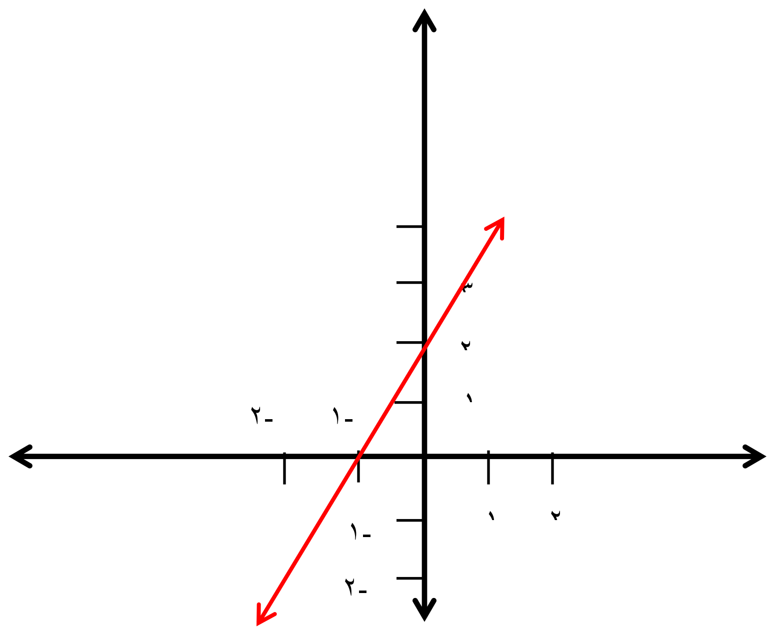
١) ق(س) = ٣ – ٧س

٢) ق(س) = س ^{٢} + ٥س – ١٤

٣) ق(س) = س ^{٢} – ٤

سؤال : بالاعتماد على التمثيل البياني للاقتران ق(س) في المستوى الديكارتي في الشكل المجاور ، جد ما يلي:

١) نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات
٢) نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات
٣) صفر الاقتران ق(س)



الحل : ١)نقطة تقاطعه مع محور الصادات هي (٠، ٢)

٢) نقطة تقاطعه مع محور السينات هي (-١، ٠)

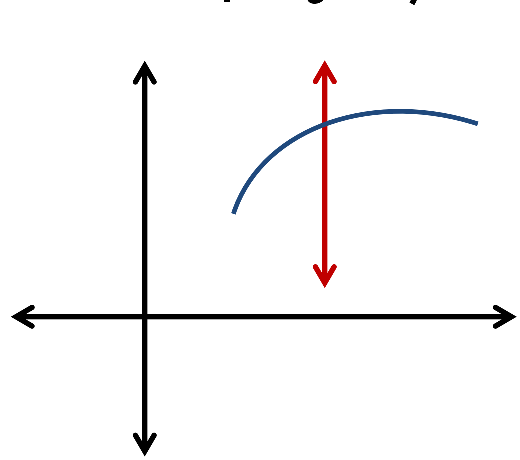
٣) صفر الاقتران = -١

مراجعة بسيطة للمحاضرة السابقة

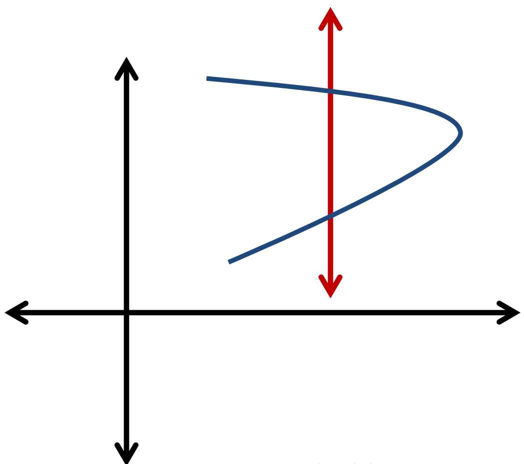
* الاقتران هو علاقة يرتبط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداه.

* اذا كان الاقتران معرف بالصورة ق(س) = ... ، فإن المجال هو قيم س والمدى هي قيم الصور لعناصر المجال.

* طريقة لاختبار العلاقة كونها اقتراناً أم لا هي اختبار الخط المستقيم (بيانياً)، بحيث نرسم خطا عموديا موازيا لمحور الصادات ويقطع منحنى العلاقة التي نريد اختبارها موضحة بالأشكال أدناه:



الشكل (١)



الشكل (٢)

في الشكل (١) بما ان خط الاختبار المرسوم موازيا لمحور الصادات (باللون الاحمر) قد قطع المنحنى في نقطة واحدة، هذا يعني ان العلاقة اقتراناً.

بينما في الشكل (٢) نرى أن خط الاختبار المرسوم موازيا لمحور الصادات قد قطع المنحنى في أكثر من نقطة، هذا يدل على أن العلاقة ليست اقتراناً.

من اقترانات كثيرات الحدود :

اولا : الاقتران الخطي (Linear Function)

تعريف : كل اقتران على الصورة ق(س) = أس + ب، بحيث أ ، ي أعداداً حقيقية ، أ $\neq$ صفر ، يسمى اقتراناً خطياً.

مثال (١): ميز الاقترانات الآتية، أيها خطي أو لا:

ق(س) = ٣س +١ ، (اقترانا خطيا ، لأنه على الصورة ق(س) = أس+ ب)

هـ(س) = ٦س ^{٢} ، (ليس اقتراناً خطياً ، لأنه ليس على الصورة أس + ب)

ع(س) = $\frac{٥}{س+٣}$ ، (   )

ك(س) = $\frac{٣س+١}{٥}$ (   )

مثال(٢) : أمثل الاقتران ق(س) = ٣س + ١ في المستوى الديكارتي.

الحل : لتمثيل الاقتران الخطي بيانياً، نعين نقطتين على الأقل تنتميان للاقتران على المستوى الديكارتي، ثم أصل بينهما بخط مستقيم.

س	-١	٠	١
ص= ق(س)	-٢	١	٤

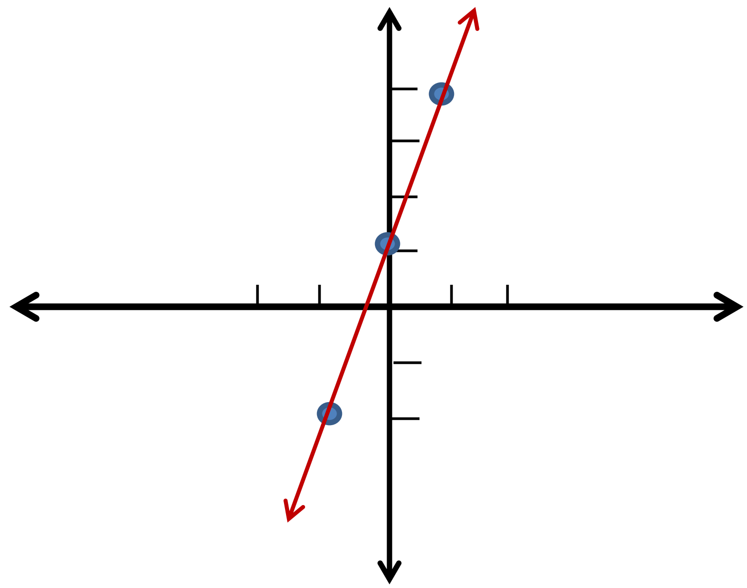
لتعبئة الصف الثاني في االجدول أعلاه، نجد صور قيم س في الصف الاول تحت تأثير الاقتران ق(س):

ق(-١) = ٣ * -١+ ١ = -٢ ، تمثل بالنقطة (-١، -٢)

ق(٠) = ٣ * ٠ + ١ = ١ ، تمثل بالنقطة (٠ ، ١)

ق(١) = ٣ * ١ + ١ = ٤ ، تمثل بالنقطة (١ ، ٤)

ثم أعين النقاط أعلاه على المستوى الديكارتي ، وأل بينها بخط مستقيم.



ملاحظة

* **(تسمى القيمة للاقتران الناتجة عن تعويض قيمة س = صفر ، بالمقطع الصادي، وهي القيمة التي يقطع عندها خط الاقتران محور الصادات .**

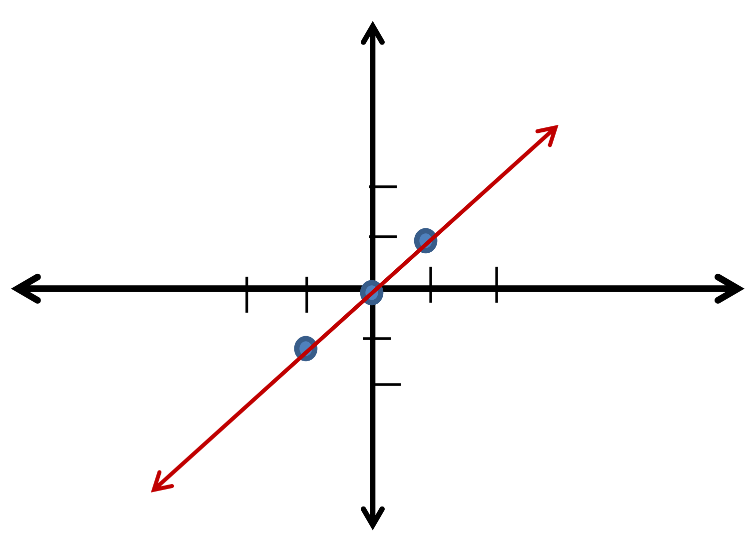
*** جميع الازواج المرتبة (س، ص) التي تحقق قاعدة الاقتران، تقع على الخط المستقيم الذي يمثل الاقتران.**

مثال(٣): أمثل الاقتران ق(س) = س بيانياً

باتباع نفس الخطوات السابقة الواردة في المثال (٢)

س	-١	٠	١
ص= ق(س)	-١	٠	١

نعين النقاط (-١، -١) ، (٠، ٠) ، (١، ١) بيانياً ونصل بينها بخط مستقيم.



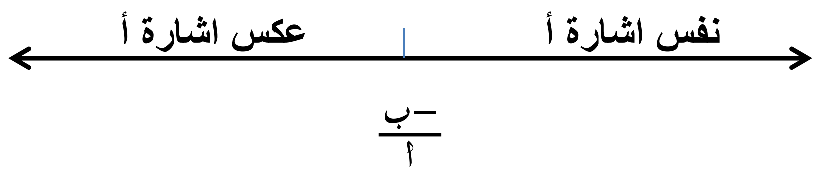
<u>تعريف</u>: ق(س) = س يسمى <u>اقترانا محايداً</u> وهو حالة خاصة من الاقتران الخطي.

تمثيله بيانيا هو خط مستقيم يمر بنقطة الاصل ويميل بزاوية ٤٥ عن محور السينات الموجب

<u>اشارة الاقتران الخطي</u>:

لتحديد اشارة الاقتران الخطي فإننا نجد جذر المعادلة اس + ب = ٠، وتكون اشارة الاقتران مشابهة لإشارة أ على يمين لجذر، وعكس اشارة أ على يسار الجذر

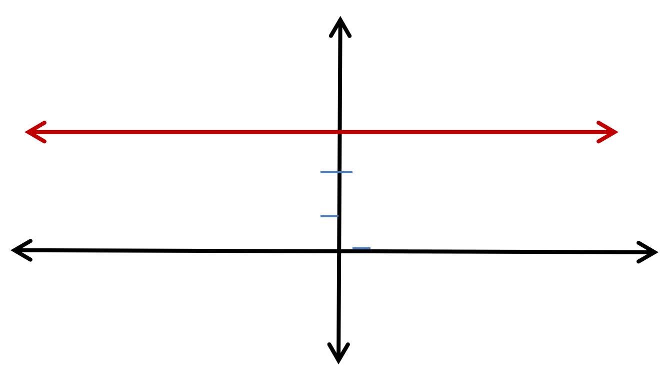
جذر الاقتران = $\frac{-ب}{أ}$



<u>تعريف</u>: يسمى الاقتران ق : ح $\longrightarrow$ ح حيث ق(س) = ب ، ب $\subset$ **ح ، اقترانا ثابتاً.**

<u>مثال (٤)</u>: اذا كان ق(س) = ٣ ، مثل ذلك الاقتران بيانياً

الحل: لتمثيل الاقتران الثابت نرسم خطا يوازي محور السينات ويبعد عنه ٣ وحدات للأعلى



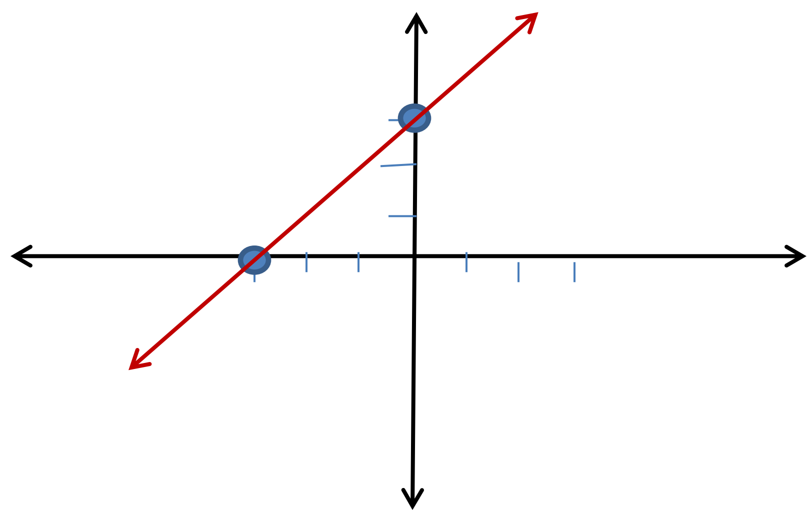
مثال (٥): مثل الاقتران ص = س + ٣ بيانياً باستخدام المقطع الصادي والسيني .

الحل: نجد المقطع الصادي بتعويض س = ٠ في الاقتران ومنه نحصل على ص = ٣

ومنه نمثل الزوج المرتب (٠، ٣) بيانيا

ثم نجد المقطع السيني بتعويض ص = ٠ في الاقتران ومنه نحصل على س = -٣ ونمثل الزوج المرتب (-٣، ٠) بيانيا

ونصل بخط مستقيم بين النقطتين



سؤال : ماذا يمثل الاقتران ق(س) = ٠ في المستوى الديكارتي؟

سؤال : أمثل الإقترانات الآتية بيانيا:

١) ق(س) = ١ – ٢س

٢) ق(س) = -٣

الاقتران التربيعي:

تعريف: يسمى كثير الحدود ق(س) = أس ^{٢} + ب س+جـ ، حيث أ، ب ، جـ أعدادا حقيقية،

أ $\neq$ ٠، اقتراناً تربيعياً.

مثال(١): ليكن ق(س) = س ^{٢} + س – ٢ ، أوجد

ق(٠)، ق(١)، ق(-١) ، ق(٢)، ق(-٢)

ملاحظة :(إذا لم يتم تحديد المجال في السؤال، يعتبر المجال مجموعة الاعداد الحقيقية ح، أما مدى الاقتران فيكون مجموعة جميع القيم لصور عناصر المجال تحت تأثير قاعدة الاقتران)

التمثيل البياني للاقتران التربيعي:

مثال (٢): لتمثيل الاقتران ق(س) =س ^{٢} ، نتبع الخطوات الآتية:

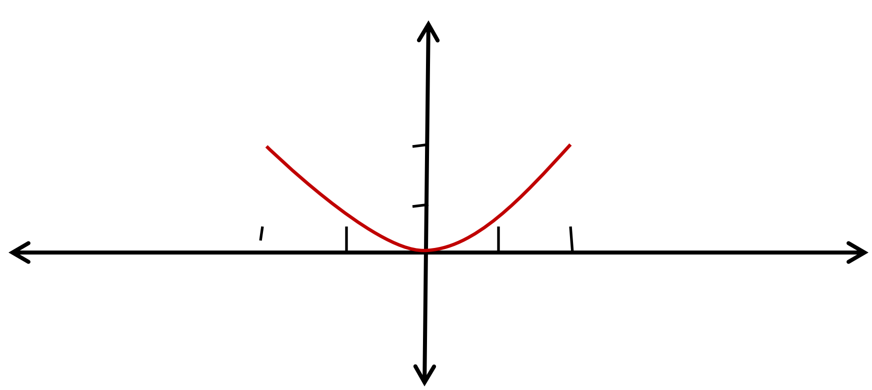
١) نأخذ قيم مختارة لـ س ونجد صورها تحت تأثير قاعدة الاقتران حسب الجدول الاتي:

س	٠	١	٢	-١	-٢
ص=ق(س)	٠	١	٤	١	٤

٢) ونحصل على الازواج المرتبة الآتية : (٠،٠)، (١،١)، (٢،٤)، (-١،١)، (-٢،٤)

٣) نقوم بتعيين الازواج المرتبة بنقاط على المستوى الديكارتي.

٤) نصل بينها بمنحنى



يسمى التمثيل البياني للاقتران ق(س) = س ^{٢} قطعاً مكافئاً.

عند ملاحظة منحنى الاقتران ق(س) =س ^{٢} ، نرى ما يلي:

١)أصغر قيمة للاقتران هي (صفر) وتسمى القيمة الصغرى للاقتران عندما س =٠ أي عند النقطة (٠،٠).

٢) الاقتران متماثل حول محور الصادات.

٣) مدى الاقتران = { ص : ص $\geq$ صفر

٤) النقطة (٠،٠) تسمى رأس القطع المكافىء ، وبشكل عام = ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق($\frac{-ب}{٢أ}$))

بيانياً <u>مثال(٢):</u> أمثل الاقتران التربيعي ق(س) =

<u>الحل</u>: ١) أجد الاحداثي السيني لراس القطع المكافىء س= $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢}$ = ١-

٢) أجد ق($\frac{-ب}{٢أ}$) = ق(-١) = -٤ ⟵ نقطة رأس القطع المكافىء هي (-١،-٤)

٣) أجد اصفار الاقتران بجعل ق(س) =٠ ⟵ س ^{٢} + ٢س − ٣ =٠

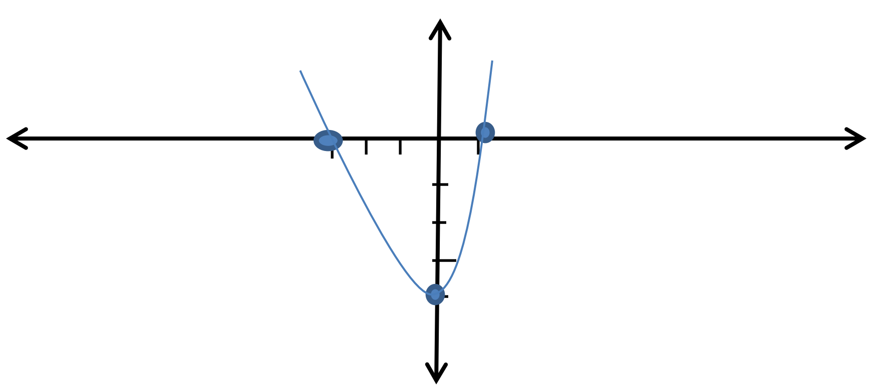
(س + ٣)(س − ١) = ٠

إما (س + ٣) = ٠ ⟵ س = -٣

أو (س − ١) = ٠ ⟵ س = ١

⟸ نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات (- ٣، ٠) ، (١ ، ٠)

٤) نعين النقاط (- ٣ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (- ١ ، - ٤)



نلاحظ ما يلي :

١) إذا كان معامل $س^٢$ موجب فان منحنى الاقتران مفتوح للأعلى، أما إذا كان

معامل $س^٢$ سالباً فان منحنى الاقتران مفتوحاً للأسفل.

٢) ق(-١) = -٤ هي القيمة الصغرى للاقتران

٣) مدى الاقتران = { ص : ص $\leq$ - ٤ }

٤) معادلة محور التماثل للقطع المكافىء هي س = - ١ (وبشكل عام س = الاحداثي السيني لراس القطع المكافىء)

مثال (٣): أمثل الاقتران ق(س) = ٣$س^٢$ – ١٢ س بيانياً.

١) أجد الاحداثي السيني لراس القطع المكافىء س= $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{١٢}{٦}$ = ٢

٢) أجد ق$(\frac{-ب}{٢أ})$ = ق٢) = -١٢ $\longleftarrow$ نقطة رأس القطع المكافىء هي (٢،-١٢)

٣) أجد اصفار الاقتران بجعل ق(س) =٠ $\longleftarrow$ ٣$س^٢$ – ١٢ س =٠

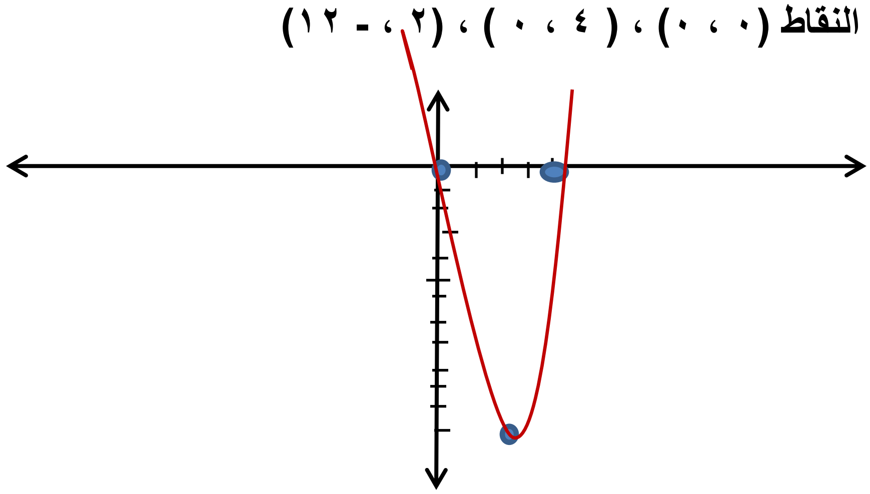
٣س (س – ٤) = ٠

إما ٣س = ٠ $\longleftarrow$ س = ٠

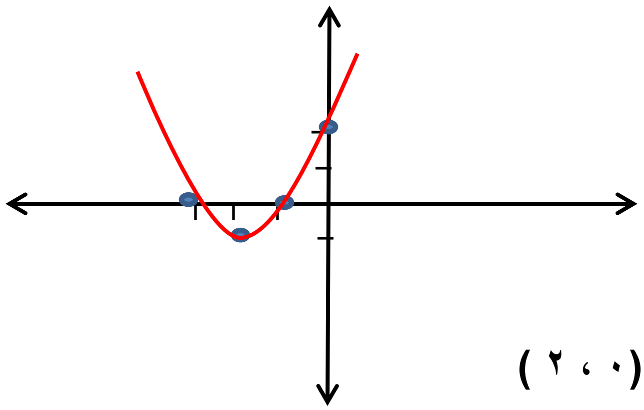
أو (س – ٤) = ٠ $\longleftarrow$ س = ٤

$\Longleftarrow$ نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات (٠، ٠) ، (٤ ، ٠)

٤) نعين النقاط (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٢ ، - ١٢)



مثال (٤): من الشكل المجاور أجد :



١)احداثيات راس القطع المكافىء : (-٢ ،-١)

٢) أصفار الاقتران : -١ ، -٣

٣) معادلة محور التماثل : س = - ٢

٤) القيمة الصغرى للاقتران : -١

٥) احداثيات نقطة تقاطعه مع محور الصادات : (٠ ، ٢)

٦) مدى الاقتران = { ص : ص $\geq$ -١}

**** تعميم : التمثيل البياني لأي اقتران تربيعي هو قطعا مكافئاً**

استخدام التحويلات الهندسية لتمثيل الاقترانات التربيعية بيانياً بالاعتماد على منحنى ق(س) = س^{٢}

مثال (٥) : مثل الاقترانات التربيعية الآتية بيانياً

١) ق(س) = س^{٢} + ٢

٢) ق(س) = س^{٢} − ١

الحل : ١) رأس القطع المكافىء ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق($\frac{-ب}{٢أ}$))

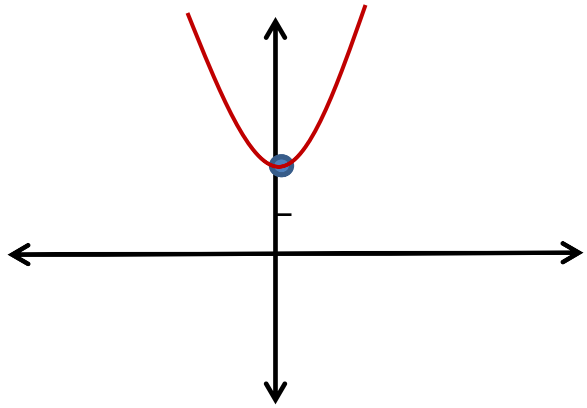
$\frac{-ب}{٢أ}$ = صفر

ق(٠) = ٢ ⟵ راس القطع المكافىء (٠ ، ٢)

٢) أصفار الاقتران :س^{٢} + ٢ = ٠ ⟵ لا يوجد جذور لهذه المعادلة في ح

لان المميز سالب ، لذلك لا يوجد نقاط تقاطع للمنحنى مع محور الصادات.

٣) الاقتران مفتوح للأعلى لان أ $\geq$ ٠



٢) ق(س) = س ^{٢} − ١

<u>الحل</u> : ١) رأس القطع المكافىء ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق($\frac{-ب}{٢أ}$))

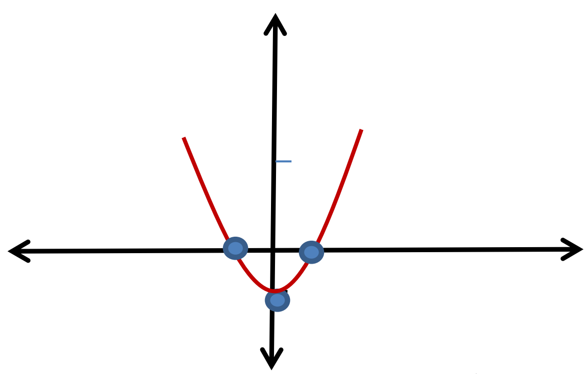
$\frac{-ب}{٢أ}$ = ٠ ⟵ ق($\frac{-ب}{٢أ}$) = -١ ⟵ رأس القطع المكافىء (٠ ، -١)

٢) اصفار الاقتران : س ^{٢} − ١ = ٠ ⟵ (س + ١)(س − ١)

أصفار الاقتران هي ١، -١ ⟵ نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

(١، ٠) ، (-١ ، ٠)

٣) منحنى الاقتران مفتوح للأعلى لأن أ ≤ ٠



<u>تعميم</u> : الاقتران التربيعي س ^{٢} + ن هو انسحاب للاقتران التربيعي ق(س) = س ^{٢}

بمقدار (ن)
وحدة باتجاه محور الصادات الموجب إذا كانت (ن) موجبة، وباتجاه محور الصادات السالب إذا كانت (ن) سالبة

مثال (٦) مثل الاقترانات الآتية بيانياً:

١) ق(س) = $(س+٢)^٢$

٢) ق(س) = $(س-١)^٢$

<u>الحل :</u> ق(س) = $(س+٢)^٢ = س^٢ + ٤س + ٤$

<u>الحل</u> : ١) رأس القطع المكافىء ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق($\frac{-ب}{٢أ}$))

$\frac{-ب}{٢أ}$ = -٢ ⟵ ق($\frac{-ب}{٢أ}$) = ٠ ⟵ رأس القطع المكافىء (-٢ ، ٠)

٢) اصفار الاقتران : $س^٢ + ٤س + ٤$ = ٠ ⟵ (س + ٢)(س + ٢)

أصفار الاقتران هو صفر واحد = -٢ ⟵ نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات

(-٢، ٠)

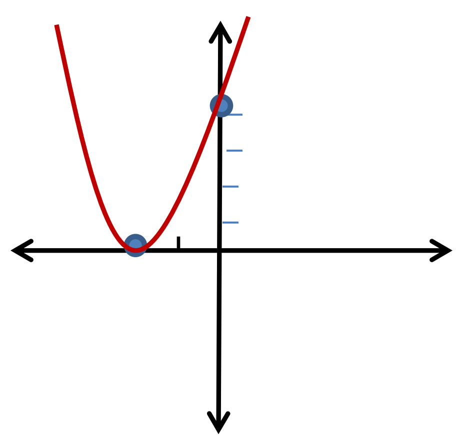
٣) منحنى الاقتران مفتوح للأعلى لأن أ ≤ ٠

٤) نقطة تقاطع النحنى مع محور الصادات ، نجعل س = ٠ ⟵ ص = $(٠+٢)^٢$ = ٠

⟵ (٠ ، ٤) نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات

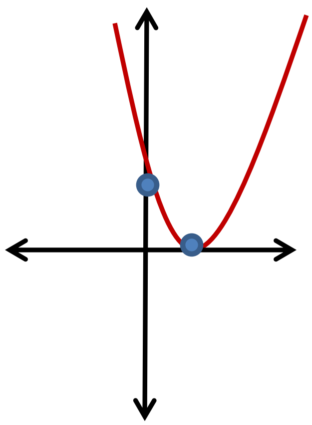
٥) مدى الاقتران = { ص : ص ≤ ٠ }

٦) محور التماثل س = -٢



٢) ق(س) = $(س - ١)^٢$

بإعادة نفس الخطوات السابقة بالفرع الاول نجد ما يلي :



١) إحداثيات نقطة رأس القطع المكافىء هي (١، ٠)
٢) نقاط تقاطعه مع محور السينات (١ ، ٠)
٣) منحنى الاقتران مفتوح للأعلى لأن أ $\leq$ ٠
٤) نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات (٠ ، ١)
٥) مدى الاقتران = { ص : ص $\leq$ ٠ }

<u>تعميم</u> : الاقتران ق(س) = $(س - م)^٢$ هو انسحاب للاقتران ن(س) = $س^٢$ بمقدار (م) وحدة باتجاه محور السينات الموجب إذا كانت (م) سالبة ، وباتجاه محور السينات السالب إذا كانت (م) موجبة .

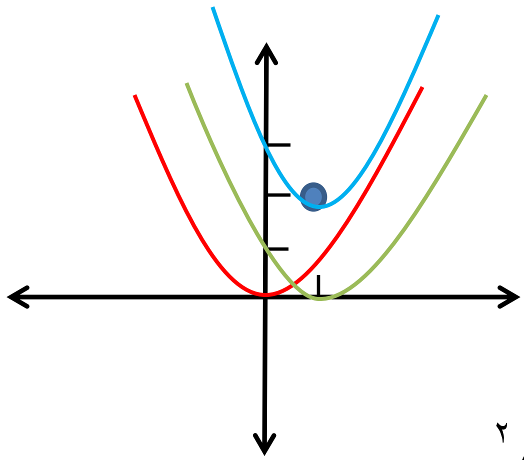
<u>مثال (٧)</u> : مثل الاقتران ق(س) = $(س - ١)^٢$ + ٢ بيانياً.

<u>الحل</u>: باعتماد التعميمين السابقين وباستخدام التحويلات الهندسية بالنسبة لمنحنى ن(س) = $س^٢$ ، نقوم بانسحاب منحنى ن(س) = $س^٢$ الى اليمين وحدة واحدة ثم انسحاب للأعلى بمقدار وحدتين.

رأس القطع المكافىء للاقتران ن(س) = $س^٢$ (٠،٠) $\xrightarrow{\text{انسحاب لليمين (١) وحدة}}$ (١، ٠)

$\xrightarrow{\text{انسحاب للأعلى وحدتين}}$ (١ ، ٢) نقطة رأس القطع المكافىء للاقتران المعطى

نقطة تقاطعه مع محور الصادات ، نعوض س = ٠ في قاعدة الاقتران $(٠ - ١)^٢ + ٢ = ٠$
،
= ١ + ٢ = ٣ $\longleftarrow$ نقطة تقاطعه مع محور الصادات (٠ ، ٣)



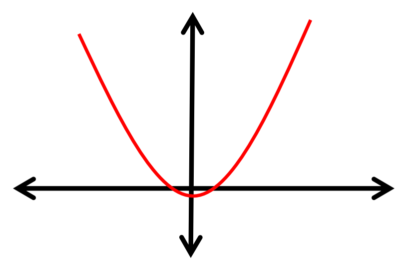
اللون الاحمر ق(س) = س^{٢}

اللون الاخضر ق(س) = (س − ١)^{٢}

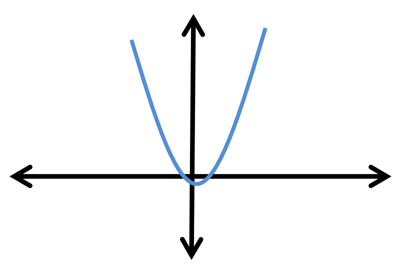
اللون الازرق ق(س) = (س − ١)^{٢} +٢

<u>مثال (٨):</u> مثل الاقترانات الآتية بيانيا

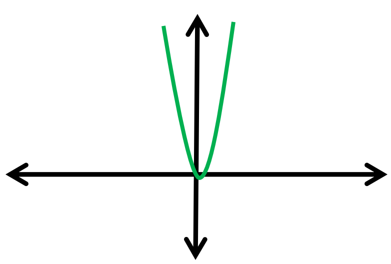
ق(س) = س^{٢}



ق(س)=٢س^{٢}



ق(س)=٣س^{٢}



نلاحظ أن المنحنى يكون متسعا اكثر كلما كانت (أ) أصغر

<u>سؤال :</u> حدد مدى كل من الاقترانات الاتية مستخدما التمثيل البياني :

١) ق(س) = س^{٢} + ٥

٢) ق(س) = ٤ − س^{٢}

الاقتران النسبى:

تعريف: يسمى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)}$ اقترانا نسبية ، بحيث هـ(س)، ل(س) اقترانا كثيرا حدود ، مجاله هو (ح) ما عدا أصفار الاقتران المقام (ل (س)).

مثال(١) : أميز الاقترانات النسبية من الآتية:

١) ق(س) = $\frac{٣س+٤}{س^{٢}-٥}$ ، س $\neq$ ٥ ، -٥ (اقتران نسبي لان كل من البسط والمقام كثيرا حدود)

٢) ق(س) = $\frac{\sqrt{س}+٢}{س-٢}$ ، س $\neq$ ٢ (   )

٣) ق(س) = $\frac{٥}{س-١}$ ، س $\neq$ ١ (   )

مثال (٢): ما مجال كل من الاقترانات النسبية الآتية:

١)ق(س) = $\frac{٣س^{٢}-٤}{٢س+٦}$ ٢) ق(س) = $\frac{س+٣}{س^{٢}-٥س+٦}$

الحل: ١) لايجاد مجال الاقتران ق(س) نجد أصفار المقام أولا

لايجاد أصفار المقام نجعل المقام يساوي صفرا

٢س + ٦ = ٠ ⟵ ٢س = -٦ ⟵ س = -٣

مجال الاقتران ق(س) هو ح – أصفار المقام ⟵ المجال = ح – { -٣ }

٢)ق(س) = $\frac{س+٣}{س^{٢}-٥س+٦}$

نجد أصفار المقام ⟵ $س^{٢}-٥س+٦$ = ٠ ⟵ (س-٣)(س-٢)=٠

إما (س-٣) = ٠ ⟵ س=٣   أو   (س-٢) = ٠ ⟵ س =٢

مجال الاقتران = ح – { ٢، ٣ }

أصفار الاقتران النسبي : أصفار الاقتران النسبي هي تلك القيم التي تجعل قيمة البسط = صفر،

ولا يكون المقام مساويا صفرا عندها.

مثال (٢): جد أصفار الاقترانات النسبية الآتية:

١)ق(س) = $\frac{س+٣}{س^٢-٣س-٤}$ ، س $\neq$ -٤، ١

٢) ق(س) = $\frac{س^٢-٤س-١٢}{س^٣-٢٧}$ ، س $\neq$ ٣

الحل: ١) ق(س) = $\frac{س+٣}{س^٢-٣س-٤}$ ، س $\neq$ -٤، ١

لايجاد
أصفار الاقتران النسبي، نجعل البسط يساوي صفر

س + ٣ = ٠ ⟵ س = -٣ ⟵ صفر الاقتران هو -٣

٢) ق(س) = $\frac{س^٢-٤س-١٢}{س^٣-٢٧}$ ، س $\neq$ -٤ ، ١

س ^{٢} – ٤س – ١٢ = صفر ⟵ (س – ٦) (س + ٢) = ٠

إما س – ٦ = ٠ ⟵ س = ٦ أو س + ٢ = ٠ ⟵ س = -٢

⟸ أصفار الاقتران هي : ٦ ، -٢

سؤال : جد أصفار الاقتران ق(س) = $\frac{٣}{س^٢-٥}$

اختصار الاقترانات النسبية :

مثال (١): أكتب الاقترانات الآتية بأبسط صورة :

١)ق(س) = $\frac{س^٢+س-٦}{س^٢+٨س+١٥}$

الحل: نحلل البسط ونحلل المقام ونقوم باختصار العوامل المشتركة بينهما

$$ق(س) = \frac{\cancel{(س+٣)}(س-٢)}{\cancel{(س+٣)}(س+٥)} = \frac{(س-٢)}{(س+٥)}$$ **وهذه أبسط صورة**

٢) ل(س) = $$\frac{٢س^{٣}+٣س^{٢}-٢س-٣}{س^{٢}-١}$$

<u>الحل</u> : نحلل المقدار الاسهل وهنا هو المقام (س – ١) (س + ١)

نحاول ايجاد احد عوامل البسط من خلال عوامل المقام ونجرب مثلا العامل (س - ١)

نعوض س = ١ في البسط : يكون الناتج ٢ + ٣ – ٢ – ٣ = ٠

هذا يعني ان (س – ١) عامل من عوامل البسط ، حتى نجد العامل الاخر نقوم بعملية القسمة التركيبية

$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت	
٢	٣	٢-	٣-	
	٢	٥	٣	$\boxed{١}$
٢	٥	٣	٠	

وبذلك يكون العامل الثاني للبسط هو($٢س^{٢}+٥س+٣$)

ل(س) = $$\frac{\cancel{(س-١)}(٢س^{٢}+٥س+٣)}{\cancel{(س-١)}(س+١)} = \frac{(٢س^{٢}+٥س+٣)}{(س+١)}$$

لنتأكد ان

هذه الصورة أبسط صورة نتأكد فيما إذا كان (س+١) عامل من عوامل البسط بتعويض

س = -١ في البسط ، ٢(١) + ٥(-١) + ٣ = ٢ + -٥ + ٣ = ٠ ، هذا يعني أن

(س + ١) عامل من عوامل البسط ، وبما ان البسط عبارة تربيعية نقوم بتحليلها

ل(س) = $$\frac{\cancel{(س+١)}(٢س+٣)}{\cancel{(س+١)}}$$ **= ٢س + ٣ ، وهذه هي أبسط صورة**

مثال (٣): اكتب الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٣}-٨}{\text{س}^{٢}-٢}$ بأبسط

الحل : نقوم بتحليل البسط كعبارة فرق بين مكعبين ، والمقام كعبارة فرق بين مربعين

ق(س) = $\frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$ = $\frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}{\text{س}+٢}$ (البسط هو عبارة أولية)

لذلك هكذا يكون ق(س) بأبسط صورة .

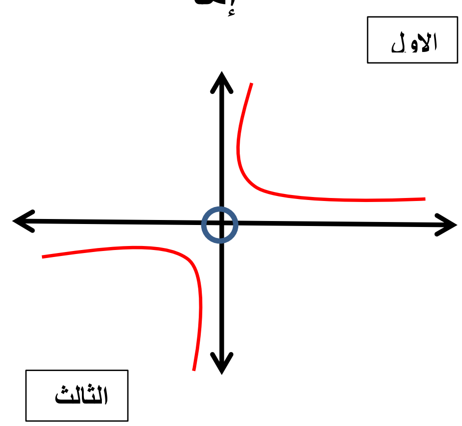
سؤال : أكتب الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}-٥\text{س}-٦}{\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٥\text{س}-٣}$ بأبسط صورة.

تمثيل الاقترانات النسبية

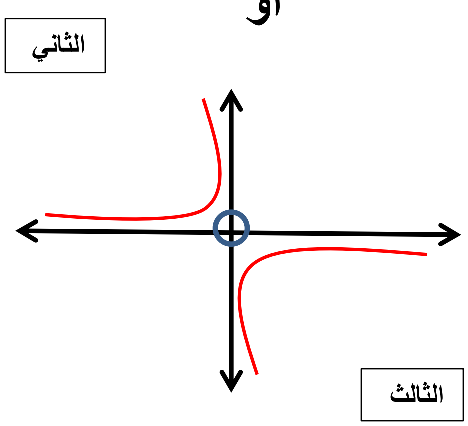
أولا : تمثيل الاقتران النسبي على صورة ق(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}+\text{جـ}$

يكون تمثيل الاقتران بهذه الصورة بيانيا بصورتين :

إما



أو



إذا كان اشارة الثابت (في البسط) * إشارة س موجبة ⟵ نعتمد الشكل الاول (اليمين)

إذا كان اشارة الثابت (في البسط) * إشارة س سالبة ⟵ نعتمد الشكل الثاني (اليسار)

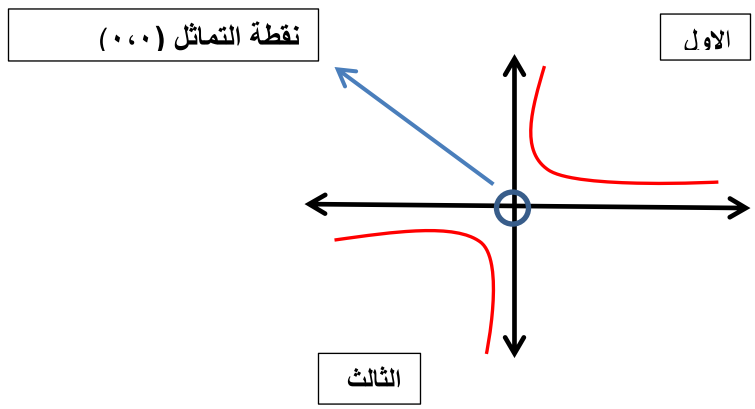
ونحدد نقطة التماثل = (صفر الاقتران الخطي، الثابت المطلق)

مثال (١) :مثل الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س}$ بيانيا ، المجال = ح – {٠}

الحل: اشارة الثابت (في البسط) * اشارة س = + * + = +

⟵ نعتمد الشكل الاول في التمثيل (في الربع الاول والثالث)

نقطة التماثل (صفر الاقتران الخطي، الثابت المطلق) = (٠ ، ٠)

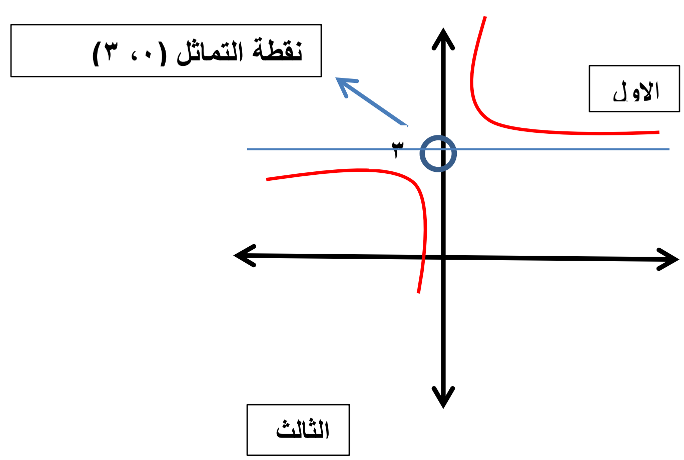


مثال (٢) : مثل الاقتران هـ(س) = $\frac{١}{س} + ٣$ بيانياً.

الحل: اشارة الثابت (في البسط) * اشارة س = + * + = +

⟵ نعتمد الشكل الاول في التمثيل (في الربع الاول والثالث)

نقطة التماثل (صفر الاقتران الخطي، الثابت المطلق) = (٠ ، ٣)

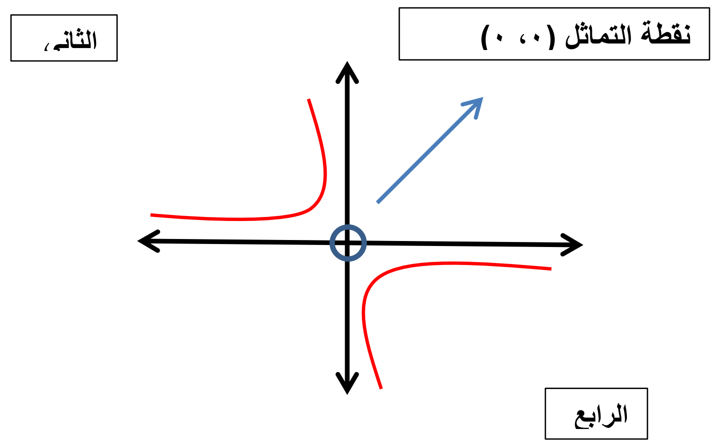


مثال (٣): مثل الاقتران ق(س) = $\frac{-٣}{س}$ بيانياً.

الحل: اشارة الثابت (في البسط) * اشارة س = - * + = -

⟵ نعتمد الشكل الثاني في التمثيل (في الربع الثاني والرابع)

نقطة التماثل (صفر الاقتران الخطي، الثابت المطلق) = (٠ ، ٠)

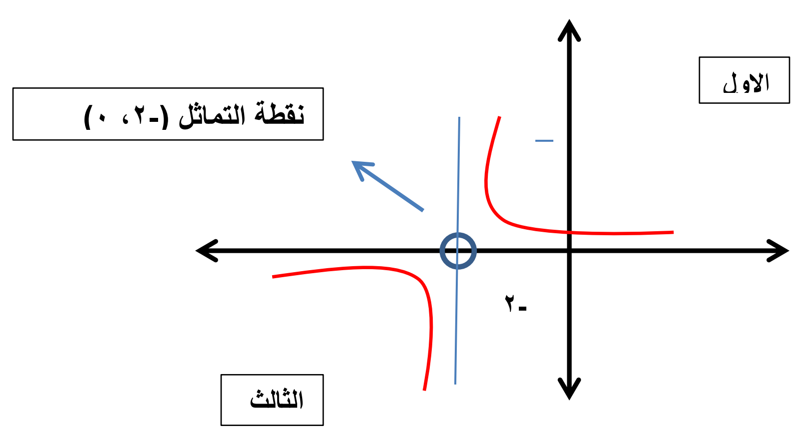


مثال (٤) : مثل الاقتران هـ(س) = $\frac{١}{س+٢}$

الحل: اشارة الثابت (في البسط) * اشارة س = + * + = +

⟵ نعتمد الشكل الاول في التمثيل (في الربع الاول والثالث)

نقطة التماثل (صفر الاقتران الخطي، الثابت المطلق) = (-٢ ، ٠)



الاقتران الأسى:

تعريف : يسمى الاقتران اقتراناً أسياً، إذا كان على الصورة :

$$ق(س) = أ\left(ب\right)^{ل(س)} + جـ \quad بحيث \quad ب \neq ١ ، \quad ب > ٠$$

ل(س) اقتران خطي ، وكل من أ ، س $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

مثال (١) : أي من الاقترانات الآتية اقتران أسي ؟

١) ق(س) = $٢^{س}$ (اقتران أسي)

٢) هـ(س) = $\left(-٣\right)^{س}$ (ليس اقترانا أسيا لان ب = -٣ > ٠)

٣) ل(س) = $س^{٢}$ (ليس أسياً لأن الأس ليس متغيراً)

٤) م(س) = $\left(\frac{١}{٦}\right)^{س}$ (اقترانا أسيا)

٥) ك(س) = $١٥^{س-١}$ (اقترانا أسياً)

٦) ق(س) = $\sqrt{س}$ (ليس اقترانا أسيا لأن $\sqrt{س}$ = $س^{\frac{١}{٢}}$ والاس ليس متغيرا)

٧) هـ(س) = $س^{٥} - ٧$ (ليس اقترانا أسيا لأن الأس ليس متغيرا)

ملاحظة : (مجال الاقتران الأسي هو مجموعة الاعداد الحقيقية ح)

تمثيل الاقترانات الأسية :

مثال (٢) : مثل الاقتران ق(س) = $٢^{س}$ بيانياً

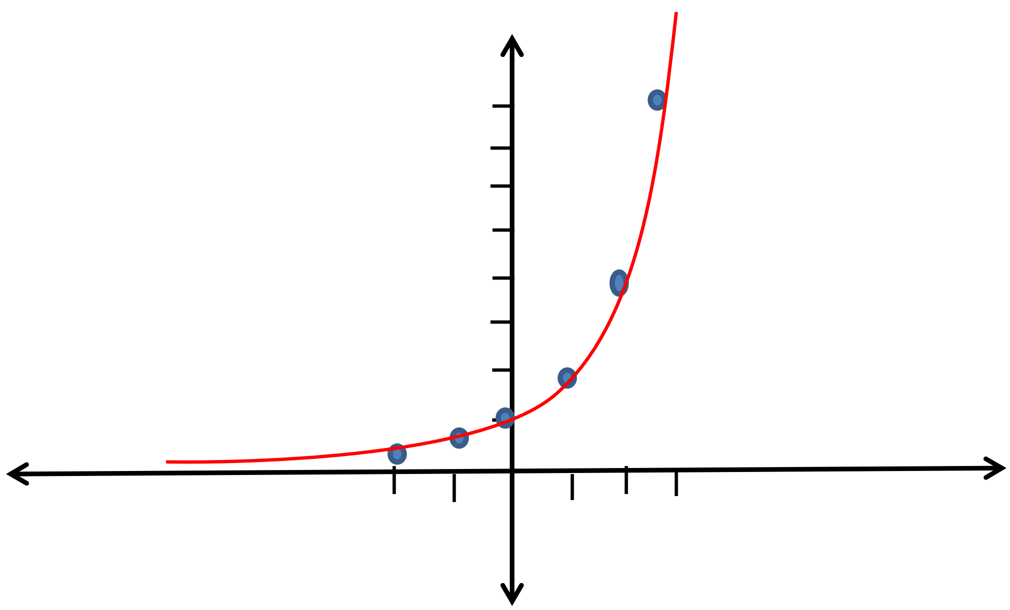
الحل: نتبع الخطوات المعتادة لرسم أي اقتران في المستوى الديكارتي، وذلك بتكوين جدول يحتوى على قيم لـ س وصورها تحت تأثير قاعدة الاقتران المعطى ق(س) وتعيينها بيانيا ورسم المنحنى بتوصيل النقاط.

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢
ص=ق(س)	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

ق(٣) = $٢^{٣}$ = ٨ ، ق(٠) = $٢^{٠}$ = ١

ق(٢) = $٢^{٢}$ = ٤ ، ق(-١) = $٢^{-١} = \frac{١}{٢^{١}} = \frac{١}{٢}$

ق(١) = $٢^{١}$ = ٢ ، ق(-٢) = $٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١}{٤}$



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران الأسي على شكل ق(س) = $ب^{س}$ ، نلاحظ ما يلي:

١) مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح+.

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلما زادت قيم س تزداد قيم ص ، أي أن الاقتران متزايد.

٤) المنحنى لا يقطع محور السينات.

مثال(٣): مثل بيانيا هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

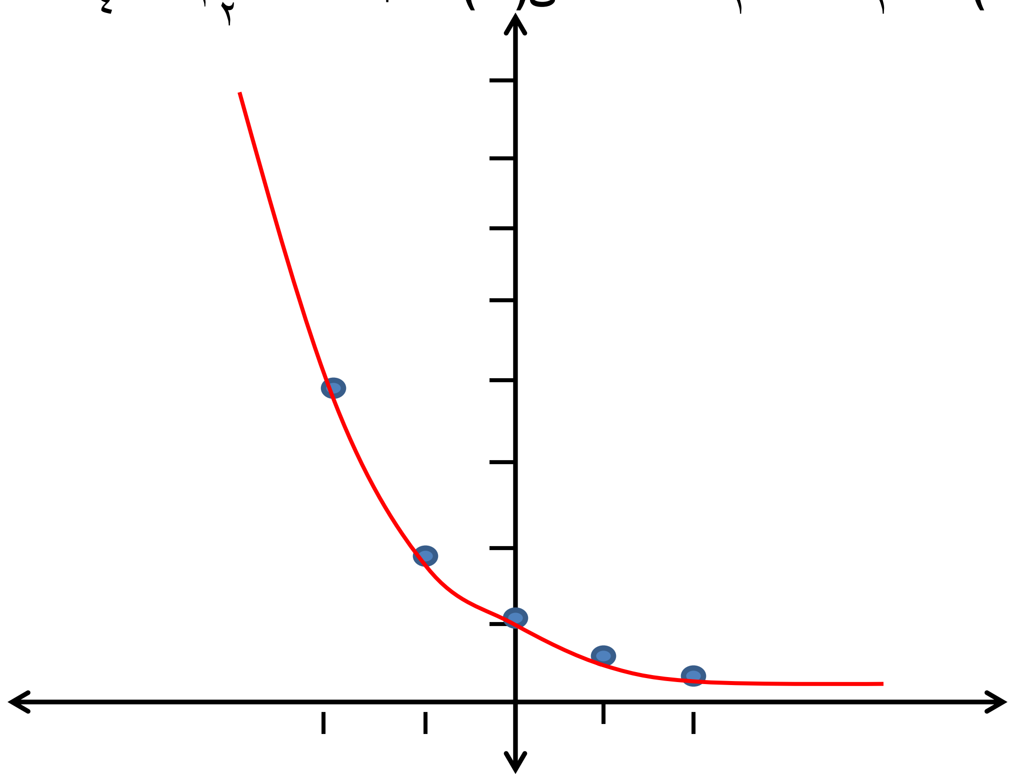
الحل: بنفس الخطوات في المثال السابق ينتج أن:

س	٢	١	٠	-١	-٢
ص=ق(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤

ق(٠) = $\frac{١}{٢}^{٠}$ = ١

ق(٢) = $\frac{١}{٢}^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ق(-١) = $\frac{١}{٢}^{-١} = \frac{١^{-١}}{٢^{-١}} = \frac{٢^{١}}{١^{١}} = ٢$

ق(١) = $\frac{١}{٢}^{١}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ق(-٢) = $٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١}{٤}$



ملاحظة : منحنى الاقتران ق(س) = $٢^{س}$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

في محور الصادات.

من التمثيل البياني للاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ عندما ٠ < ب < ١

١)مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الوجبة : ح+.

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلما زادت قيم س تقل قيم ص ، أي أن الاقتران متناقص.

٤) المنحنى لا يقطع محور السينات.

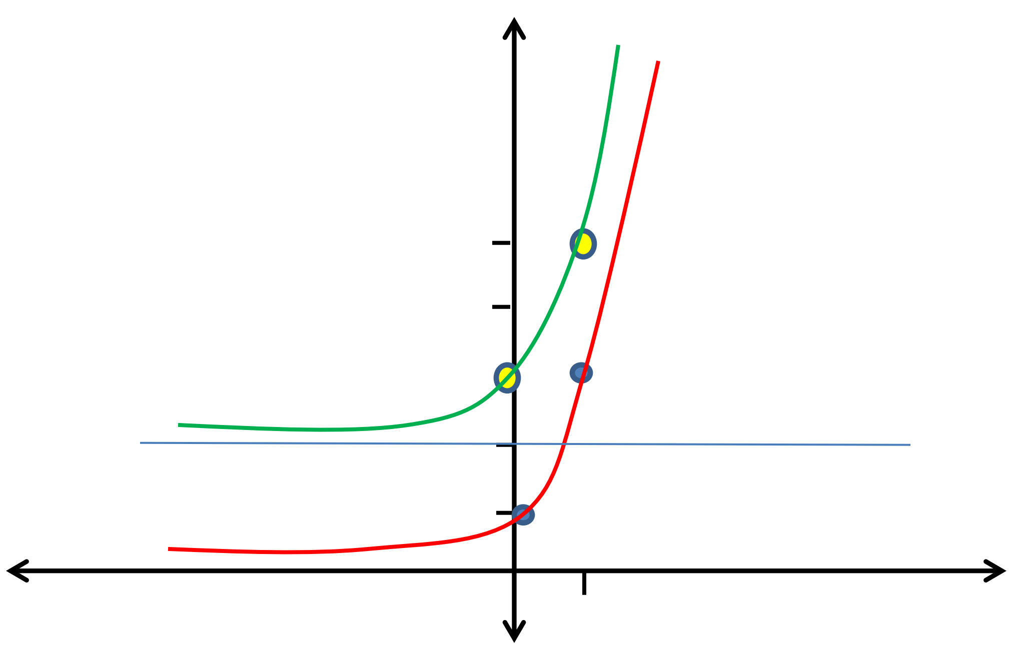
ملاحظة :(يمكن تطبيق جميع التحويلات الهندسية على الاقتران الأسي عند الرسم) .

مثال (٤) : أمثل الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢ بيانياً

الحل: حسب التحويلات الهندسية ، نرى أن الاقتران ق(س) هو انسحاب للاقتران $٣^{س}$

وحدتين للأعلى

لذلك نرسم منحنى الاقتران $٣^{س}$ ومنه نقوم بانسحاب للمنحنى وحدتين الى الاعلى



هل يقطع الاقتران السابق محور السيينات ؟ الجواب لا

ملاحظة: لكن لو اخذنا الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ - ١

هل يوجد قيمة لـ س تجعل الاقتران يساوي صفرا ؟

الجواب نعم ، فعندما س=٠ فإن $٣^{٠} - ١ = ١ - ١ = ٠$

اذا هذا الاقتران يقطع محور السينات في النقطة (٠،٠)

المجال = ح ، المدى ح+ = (٠، ∞)

مثال: إذا كان الاقتران ق(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س} - ٣$ ، جد مدى الاقتران.

وهل يقطع المنحنى محور السينات؟

الحل: بطريقة بسيطة وسريعة وبالاعتماد على الاقتران $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

والتحويلات الهندسية، نقوم بما يلي:

١) نجد مدى الاقتران $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ وهو كما ذكر سابقاً : (٠ ، ∞) نطرح (٣)

من حدود الفترة للمدى ، يكون مدى الاقتران ق(س) المعطى في المثال هو (- ٣ ، ∞)

٢) يقطع المنحنى محور السينات عندما ص = ٠ ، وبما ان ٠ $\subset$ (-٣ ، ∞)

⟵ المنحنى يقطع محور السينات

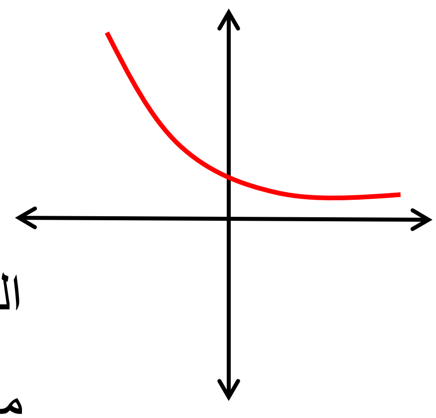
بشكل عام إذا كان ق(س) = $\pm أ \times (ب)^{ل(س)} \pm جـ$

+ أ تعني أن المنحنى فوق محور السينات

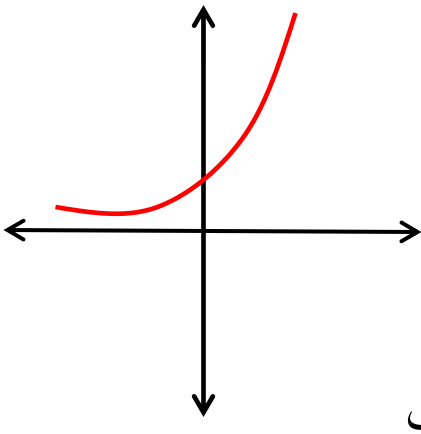
- أ تعني أن المنحنى تحت محور السينات

كما في االأشكال الآتية

+ أ



أو



المنحنى فوق

محور السينات

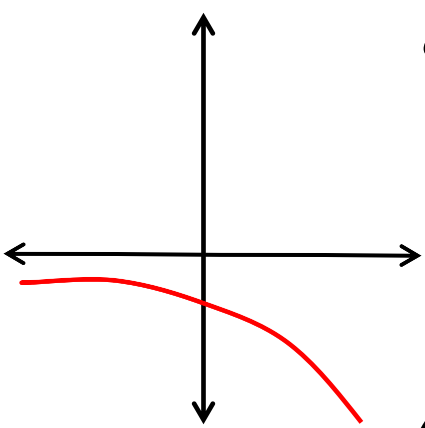
المدى: ح + = (٠ ، ∞)

أما إذا كانت

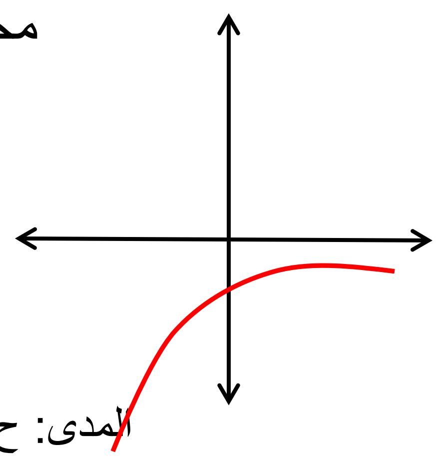
— أ

المنحنى تحت

محور السينات



أو



المدى: ح - =(-∞،٠)

أما إذا كان + جـ : يعني نرفع المنحنى للأعلى

إذاكان - جـ : يعني ننزل المنحنى للاسفل.

مثال : جد مدى الاقترانات الآتية وهل تقطع محور السينات :

١) ق(س) = $٢\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (فوق محور السينات، المدى = ح+ ، ولا يقطع محور السينات)

٢) هـ(س) = $-٢\left(٢\right)^{س-١}$ (تحت محور السينات، المدى ح- ، ولا يقطع محور السينات)

٣) ع(س) = $\left(٢\right)^{س+٢} + ٤$ (فوق محور السينات، المدى (٠، ∞) + ٤ :(٤، ∞)

أي انه لا يقطع محور السينات)

٤) ك(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+١} - ٣$ (   )

الاقترانات اللوغاريتمية:

**** مراجعة اللوغاريتمات وعلاقتها بالأسس:**

مثال(١): أكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة للصورة الأسية الآتية:

الأس   الأس

١) $\left(٧\right)^{٣} = ٣٤٣$ $\longrightarrow$ $لـو_{٧}\left(٣٤٣\right) = ٣$

الأساس   الناتج   الأساس   الناتج

(الصيغة الأسية)   (الصيغة اللوغاريتمية)

٢) $\left(٣\right)^{-٥} = \frac{١}{٢٤٣}$ $\longrightarrow$ $لـو_{٣}\left(\frac{١}{٢٤٣}\right) = -٥$

٣) $ب^{و} = ع$ $\longrightarrow$ $لـو_{ب}\left(ع\right) = و$

٤) $س^{٠} = ١$ $\longrightarrow$ $لـو_{س}\left(١\right) = ٠$

٥) $س^{١} = س$ $\longrightarrow$ $لـو_{س}\left(س\right) = ١$

ملاحظة :(في المثال السابق رقم (٤) + رقم (٥) يمكن تعميمها لتصبح قاعدة)

سؤال : حول الى الصيغة الأسية:

١) $لـو_{٣}(٢٧) = ٣$

٢) $لـو_{٩}(٣) = \frac{١}{٢}$

٣) $لـو_{٣}(\frac{١}{٨١}) = -٤$

تعميم: ($لـو_{م}(س^{ن}) = ن\,لـو_{م}(س)$)

مثال (٢): جد ناتج ما يلي:

١) $لـو_{٣}(٨١)$

الحل: $لـو_{٣}(٨١) = لـو_{٣}(٣^{٤}) = ٤\,لـو_{٣}(٣) = ٤ \times ١ = ٤$

٢) $لـو_{٢}(٠,٥)$

الحل: $لـو_{٢}(٠,٥) = لـو_{٢}(\frac{١}{٢}) = لـو_{٢}(٢)^{-١} = -١\,لـو_{٢}(٢) = -١ \times ١ = -١$

٣) $لـو_{٣}(٧٢٩)$

٤) $لـو_{٤}(٢٥٦)$

طريقة أخرى لايجاد قيمة لوغاريتم:

١) $لـو_{٣}(٨١)$ ، نفرض أنها = س ⟵ $لـو_{٣}(٨١) = س$ ، نحولها

للصيغة الأسية فتصبح ⟵ $٣^{س} = ٨١$ ⟵ $٣^{س} = ٣^{٤}$ ⟵ س= ٤

الاقتران اللوغاريتمي:

تعريف: الاقتران على الصورة ق(س) = لـو$_{أ}$(س) ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١، س > ٠

يسمى اقترانا أسياً .

مجاله : ح+ ، الا اذا تم تحديده بمجموعة جزئية من ح+

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي :

مثال(٣): ارسم منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{٣}$(س)، س ∈ [١ ، ٩]

الحل : عند اختيار قيم س من المجال المعرف عليه الاقتران وهو[١ ، ٩]

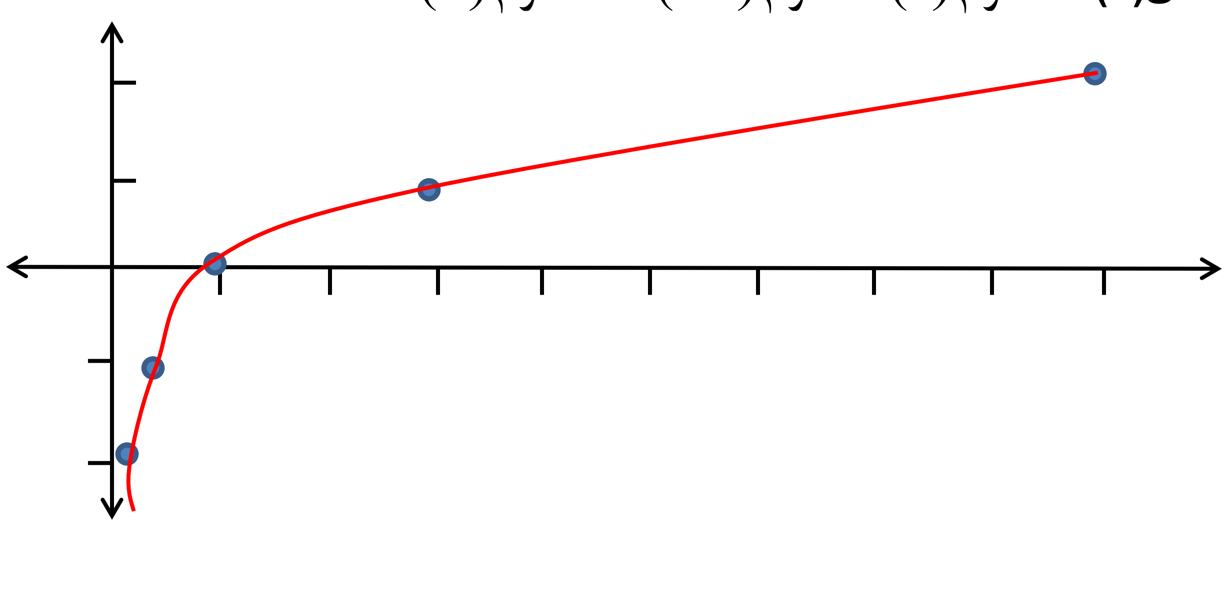
نختار الارقام التي يسهل ايجاد اللوغاريتم عندها

س	١	٣	٩	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
ق(س)	٠	١	٢	-١	-٢

ق(١) = لـو$_{٣}$(١) = ٠ ، ق($\frac{١}{٣}$) = لـو$_{٣}$($\frac{١}{٣}$) = لـو$_{٣}$(٣$^{-١}$) = -١ × ١ = -١

ق(٣) = لـو$_{٣}$(٣) = ١ ، ق($\frac{١}{٩}$) = لـو$_{٣}$($\frac{١}{٩}$) = لـو$_{٣}$($\frac{١}{٣^{٢}}$) = لـو$_{٣}$(٣$^{-٢}$) = -٢ × ١ = -٢

ق(٩) = لـو$_{٣}$(٩) = لـو$_{٣}$(٣^{٢}) = ٢لـو$_{٣}$(٣) = ٢ × ١ = ٢



ملاحظات على المنحنى :

المجال : المعطى في السؤال =

المدى : لان المجال محدد فالمدى سوف يكون محددا

أما اذا لم يكن المجال محددا ، فالمدى = ح

نقطة تقاطعه مع ممحور السينات : (١ ، ٠)

نقطة تقاطعه مع محور الصادات : لا يقطع محور الصادات

الاقتران : متزايد (لانه كلما زادت قيم س ، تزداد قيم ص)

ملاحظات عامة على خصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمى:

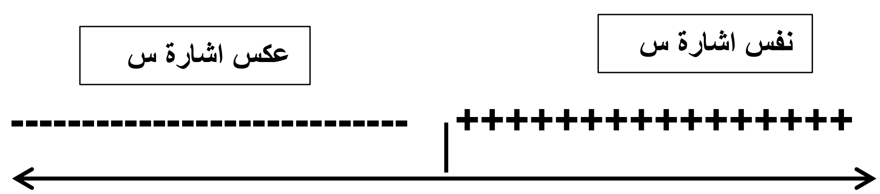
١) لايجاد مجال الاقتران اللوغاريتمي (اذا لم يكن محددا):

نحل المتباينة (ما داخل اللوغاريتم > ٠)

مثلاً في السؤال السابق :

س > ٠

س = ٠



المجال هنا (٠ ، ∞)

٢) المدى ؛ ح ، الا اذا حدد المجال في السؤال

٣) المقطع السيني للاقتران اللوغاريتمي : نجعل ق(س) = ٠

مثلا السؤال السابق : لـو٣(س) = ٠ ⟵ ٣٠ = س = ١

المقطع السيني = ١ ⟵ نقطة تقاطع المحنى مع محور السينات (١ ، ٠)

٤) لايجاد المقطع الصادي للاقتران اللوغاريتمي : نجعل س = ٠

ق(٠) = $لــو_{٣}(٠)$ ، هذا يتعارض مع تعريف الاقتران اللوغاريتمي ، لا يجوز ان يكون ما داخل اللوغاريتم = صفر

$\longleftarrow$ لا يوجد مقطع صادي.

٥) يكون الاقتران متزايدا ، اذا ازدادت قيم(ص) لازدياد قيم (س)

٦) يكون الاقتران متناقصا، اذا قلت قيم(ص) لازدياد قيم (س)

مثال (٤): ارسم منحنى الاقتران $لــو_{\frac{١}{٣}}(س)$

الحل : نختار قيم س من ضمن ح+ بحيث نستطيع ايجاد قيمة اللوغاريتم لها.

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ق(س)	٢	١	٠	-١	-٢

$$ق(\frac{١}{٩}) = لــو_{\frac{١}{٣}}(\frac{١}{٩}) = لــو_{\frac{١}{٣}}(\frac{١}{٣})^{٢} = ٢لــو_{\frac{١}{٣}}(\frac{١}{٣}) \quad ٢\times١ = ٢$$

$$ق(\frac{١}{٣}) = لــو_{\frac{١}{٣}}(\frac{١}{٣}) = ١$$

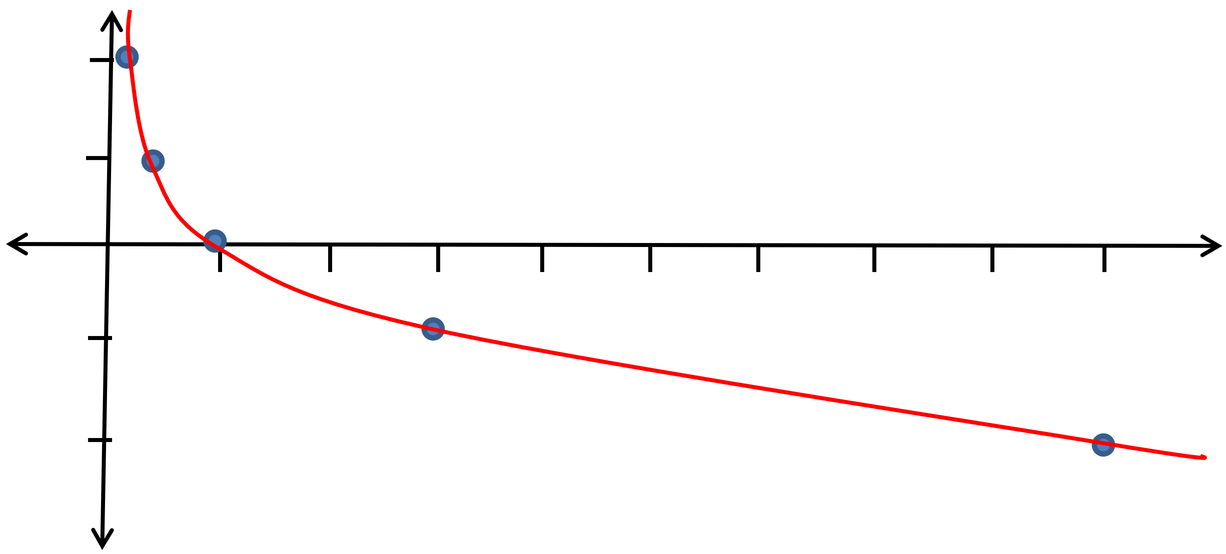
$$ق(١) = لــو_{\frac{١}{٣}}(١) = ٠$$

$$ق(٣) = لــو_{\frac{١}{٣}}(٣) \longleftarrow \text{نفرض } لــو_{\frac{١}{٣}}(٣) = س$$

$$(\frac{١}{٣})^{س} = ٣ = (\frac{١}{٣})^{-١} \longleftarrow س = -١$$

$$ق(٩) = لــو_{\frac{١}{٣}}(٩) \longleftarrow (\frac{١}{٣})^{س} = ٩ \longleftarrow (\frac{١}{٣})^{س} = (\frac{١}{٩})^{-١}$$

$$(\frac{١}{٣})^{س} = (\frac{١}{٣^{٢}})^{-١} = (\frac{١}{٣})^{-٢} \longleftarrow س = -٢$$



المجال : ح+

المدى : ح

الاقتران متناقص (   )

المقطع الصادي : لا يوجد مقطع صادي

المقطع السيني : (١،٠)

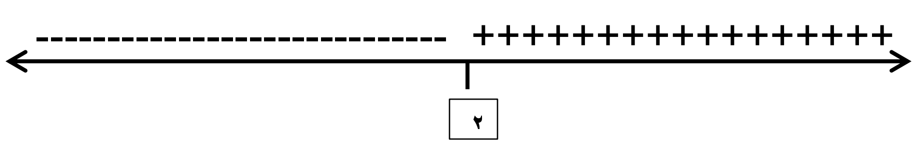
ملاحظة : ١) اذا كان أساس اللوغاريتم (أ) > ١ فان الاقتران متزايد

اذا كان أساس اللوغاريتم ٠ < (أ) < ١ فان الاقتران متناقص

٢) منحنى لـــو$_{٣}$(س) انعكاس لمنحنى لـــو$_{\frac{١}{٣}}$(س) حول محور السينات.

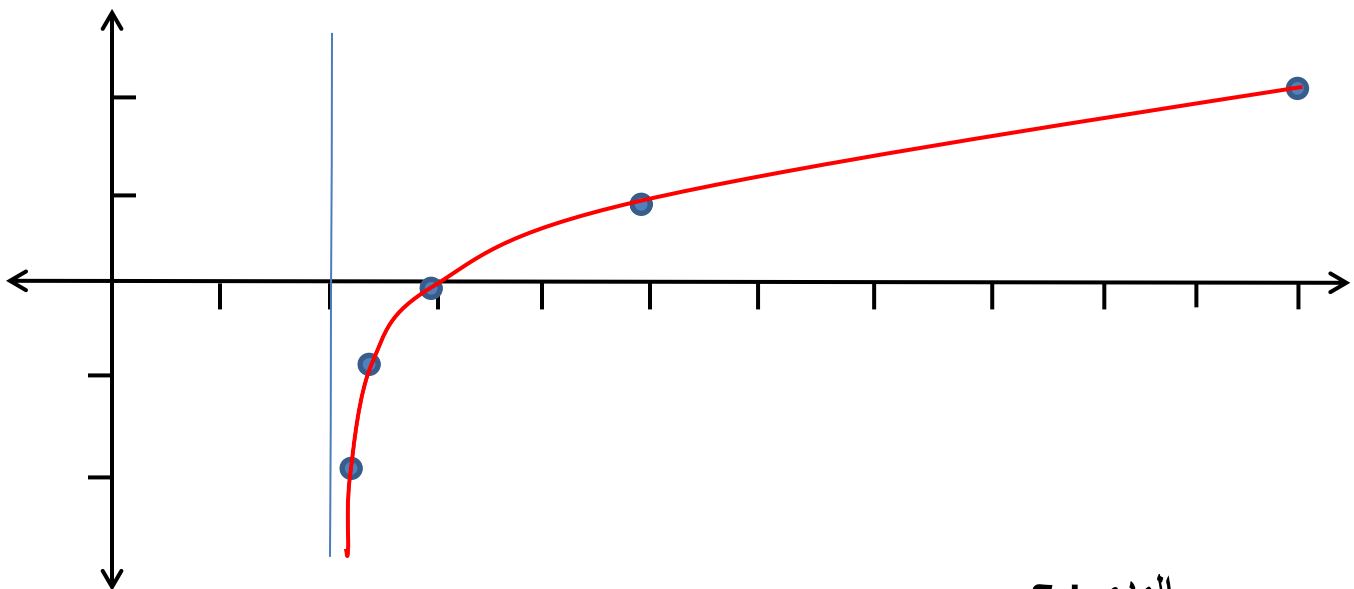
مثال(   ): ارسم ق(س) = لـــو$_{٣}$(س _ ٢) ، وحدد المجال .

لتحديد المجال : س-٢ > ٠ ⟵ س – ٢ = ٠ ⟵ س = ٢



المجال (٢ ، ∞)

س	٣	٥	١١	$٢\frac{١}{٣}$	$٢\frac{١}{٩}$
ق(س)	٠	١	٢	-١	-٢



المدى : ح

الاقتران متزايد

المقطع السيني : (٣،٠)

المقطع الصادي : لا يوجد

<u>مثال ( ) :</u> **حدد المجال والمدى للاقترانات اللوغاريتمية الاتية:**

ق(س) = لـــو$_{ع}$ (س^{٢} + ١١)

الحل : لايجاد المجال : س^{٢} + ١١ > ٠ ومنها نجعل س^{٢} + ١١ = ٠

عبارة مكونة من مجموع مربعين : لا تحلل ، أي لا يوجد لها جذور حقيقية

نفس اشارة س^{٢}

+++

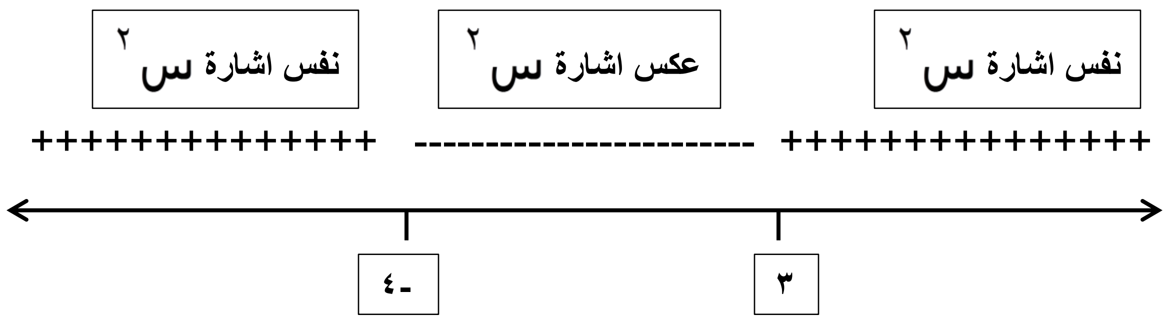
المجال : ح

المدى : ح

٢) ل(س) = لــو$_{٧}$(س^{٢}+س – ١٢)

س^{٢}+ س – ١٢ > ٠

س^{٢}+ س – ١٢ = ٠ = (س + ٤) (س – ٣) ⟵ س = -٤ أو س = ٣

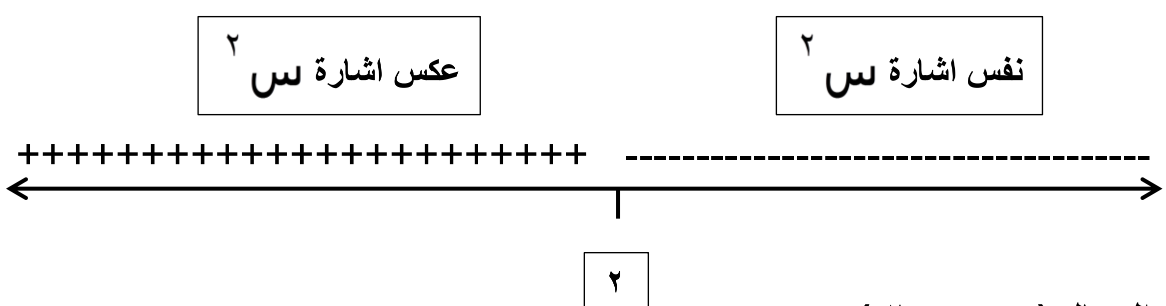


المجال : (٣، ∞) ⋃ (- ∞ ، -٤)

المدى : ح

٣) م(س) = ١ + لــو$_{٤}$(٢–س)

الحل : ٢ – س > ٠ ⟵ ٢ – س = ٠ ⟵ س = ٢



المجال (- ∞ ، ٢)

المدى : ح

الاقترانات المثلثية :

*** الدائرة التي مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة تسمى (دائرة الوحدة)**

تعريف: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية هـ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة (س،ص) فانه يمكن تعريف الاقترانات المثلثية :

جا هـ = ص ، جتا هـ = س ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

وتسمى الاقترانات المثلثية الأساسية للزاوية هـ .

ملاحظة : بما أن النقطة (س،ص) تقع على دائرة الوحدة

-١ ≤ س ≤ ١ ، -١ ≤ ص ≤ ١

-١ ≤ جتا هـ ≤ ١ ، -١ ≤ جتا هـ ≤ ١

مثال (١): أجد قيمة الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية الآتية :

٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠

الحل : ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١ ، ٠)، وينتج : جا ٠ = ٠ ، جتا ٠ = ١ ، ظا ٠ = ٠

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠ ، ١)،

وينتج : جا ٩٠ = ١ ، جتا ٩٠ = ٠ ، ظا ٩٠ قيمة غير معرفة

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ١٨٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (-١ ، ٠)،

وينتج : جا ١٨٠ = ٠ ، جتا ١٨٠ = -١ ، ظا ١٨٠ = ٠

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠ ، -١)،

وينتج : جا ٢٧٠ = -١ ، جتا ٢٧٠ = ٠ ، ظا ٢٧٠ قيمة غير معرفة

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٣٦٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١ ، ٠)،

وينتج : جا ٣٦٠ = ٠ ، جتا ٣٦٠ = ١ ، ظا ٣٦٠ = ٠

مثال(٢): اذا قطع ضلع الانتهاء الزاوية التي قياسها هـ دائرة الوحدة في النقطة أ $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ فان:

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ (لأن جا هـ = الاحداثي الصادي للنقطة أ)

جتا هـ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لأن جتا هـ = الاحداثي السيني للنقطة أ)

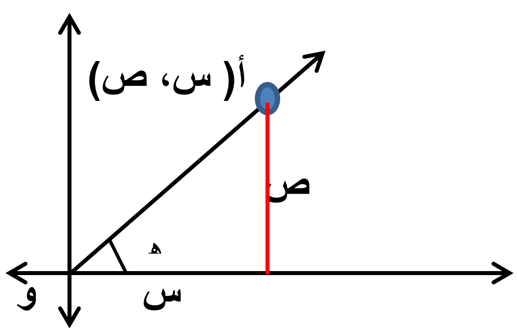
ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١}{٢} \div -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{-٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

ملاحظة : تتحدد اشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه

* تكون اشارة (س) موجبة اذا وقعت النقطة أ في الربع الأول او الربع الرابع من المستوى.

* تكن اشارة (ص) موجبة اذا وقعت النقطة أ في الربع الأول او الربع الثاني من المستوى.

وبشكل عام اذا كانت هـ زاوية في الوع القياسي، وكانت النقطة أ (س، ص) تقع على ضلع انتهائها ، وكان بعد النقطة أ (س ، ص) عن نقطة الأصل = ر ، فان :



جا هـ = $\frac{ص}{ر}$

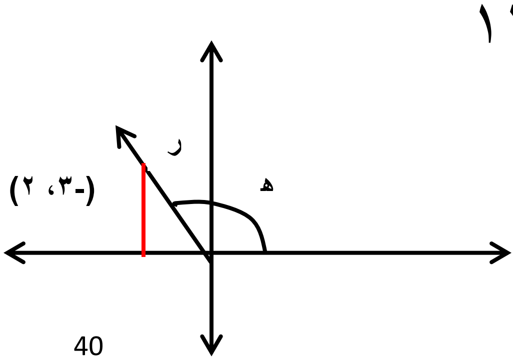
جتا هـ = $\frac{س}{ر}$

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ ٠

مثال (٣): في الشكل المجاور أجد قيم الاقترانات المثلثية جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ

الحل: ر = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$

جا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ ، جتا هـ = $\frac{-٣}{\sqrt{١٣}}$ ، ظا هـ = $\frac{٢}{-٣}$



بعض القوانين للتذكير

جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ

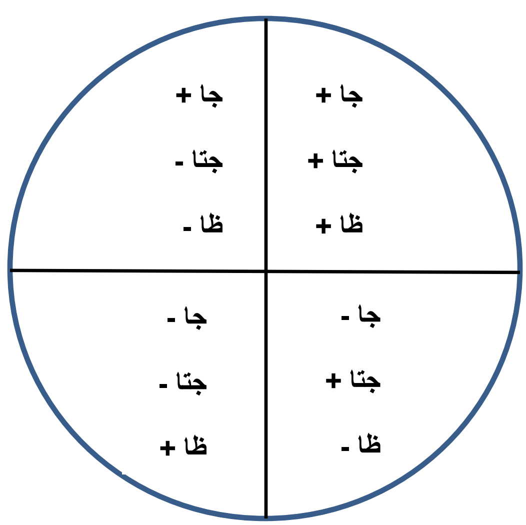
جتا ٢أ = جتا^{٢}أ − جا^{٢}أ = ٢جتا^{٢}أ − ١ = ١ − ٢جا^{٢}أ

جا^{٢}أ + جتا^{٢}أ = ١

ملاحظة : * زاوية اسناد الزاوية (هـ) : هي الزاوية الحادة الناتجة عن اتحاد ضلع انتهاء الزاوية ومحور السينات

*** قيم الاقترانات المثلثية لزاوية الاسناد هي ذاتها قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الأساسية، بينما تتحدد اشارة تلك القيم حسب موقع ضلع انتهاء الزاوية (أي ربع من المستوى الديكارتي).**

قياس الزاوية	جا س	جتا س	ظا س
٣٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$



مثال (٤) : **جد قيمة ما يلي :**

١) جا (١٢٠)

الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠ تقع في الربع الثاني

اشارة جا ١٢٠ موجبة

زاوية الاسناد = ١٨٠ – ١٢٠ = ٦٠

جا ١٢٠ = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) جتا ٢٤٠

الحل: **الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ٢٤٠ تقع في الربع الثالث**

اشارة جتا ٢٤٠ سالبة

زاوية الاسناد = ٢٤٠ – ١٨٠ = ٦٠

جتا ٢٤٠ = - جتا ٦٠ = - $\frac{١}{٢}$

٣) جا -٣٠

الحل : الزاوية -٣٠ = ٣٣٠

الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ٣٣٠ تقع في الربع الرابع

اشارة جا - = جا ٣٣٠ سالبة

زاوية الاسناد = ٣٦٠ – ٣٣٠ = ٣٠

جا -٣٠ = - جا ٣٠ = - $\frac{١}{٢}$

ملاحظة : بشكل عام   جا – هـ = - جا هـ

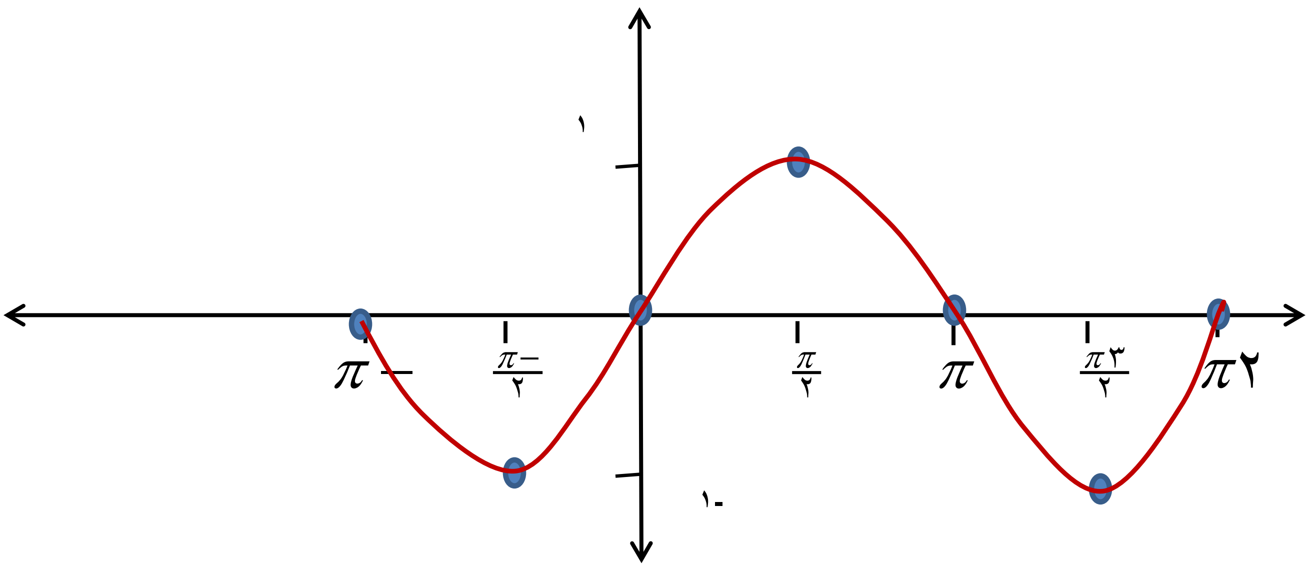
جتا – هـ = جتا هـ

تمثيل الاقترانات المثلثية :

مثال (٥): مثل الاقتران ق(س) = جا س بيانيا

الحل:

س	$-\pi$	$\frac{-\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س)	٠	-١	٠	١	٠	-١	٠



خصائص منحنى الاقتران ق(س) = جا س :

١) منحنى الاقتران ق(س) = جا س يكرر نفسه في فترات متساوية طول كل منها ٢π

ولذلك تسمى هذه الاقترانات اقترانات دورية ، ومقدار دورة هذا الاقتران ٢π

٢) مجاله : ح ، والمدى -١ ≤ ص ≤ ١

٣) أكبر قيمة للاقتران هي ١ ، أصغر قيمة هي -١

٤) سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له - أصغر قيمة له}}{٢}$

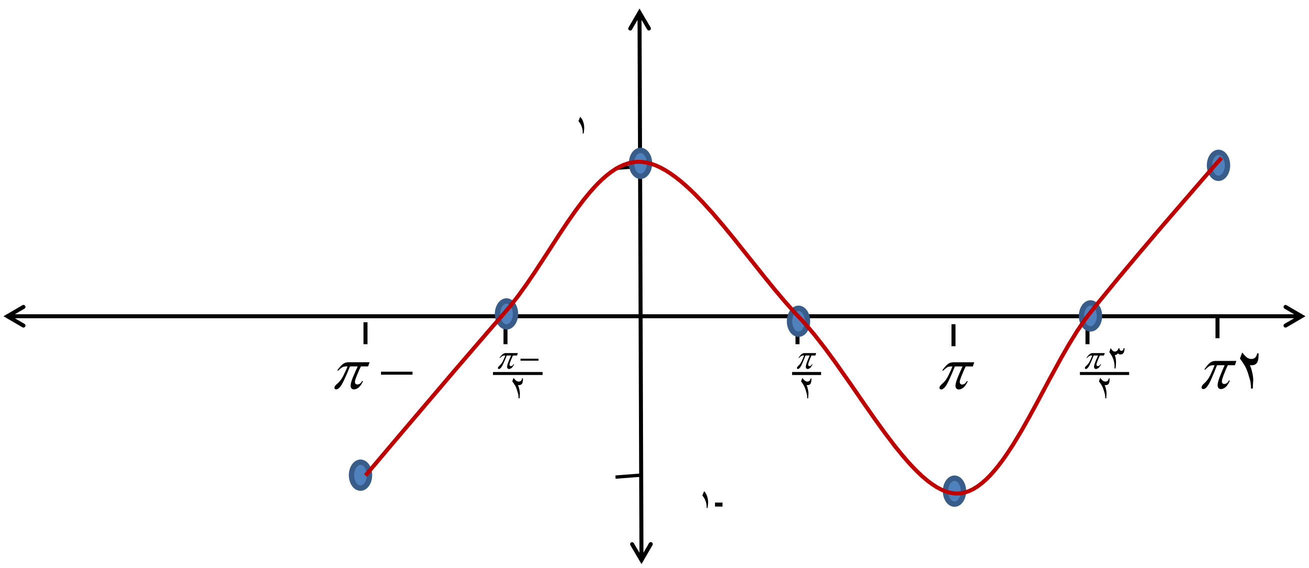
← سعة الاقتران جا س = $\frac{١--١}{٢}$ = ١

٥) منحنى الاقتران ق(س) = جا س متماثل حول نقطة الأصل .

مثال (٦): أمثل الاقتران ق(س) = جتا س بيانياً.

الحل:

س	$-\pi$	$\frac{-\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س)	١-	٠	١	٠	١-	٠	١



خصائص منحنى الاقتران ق(س) = جتا س :

١) منحنى الاقتران ق(س) = جتا س يكرر نفسه في فترات متساوية طول كل منها ٢π

ولذلك تسمى هذه الاقترانات اقترانات دورية ، ومقدار دورة هذا الاقتران ٢π

٢) مجاله : ح ، والمدى ١- > ص > ١

٣) أكبر قيمة للاقتران هي ١ ، أصغر قيمة هي ١-

٤) سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له - أصغر قيمة له}}{٢}$

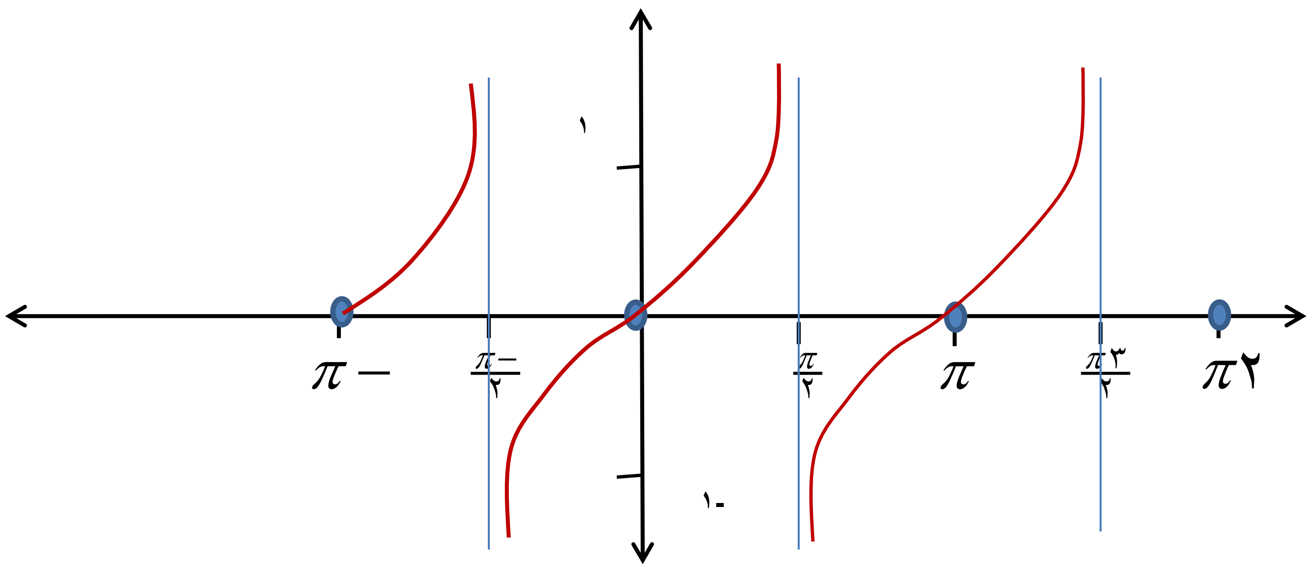
⟵ سعة الاقتران جا س = $\frac{١--١}{٢}$ = ١

٥) منحنى الاقتران ق(س) = جتا س متماثل حول محور الصادات .

مثال (٧): مثل الاقتران ق(س) = ظا س بيانياً.

الحل:

س	$-\pi$	$\frac{-\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س)	٠	قيمة غير معرفة	٠	قيمة غير معرفة	٠	قيمة غير معرفة	٠



خصائص منحنى الاقتران ق(س) = ظا س :

١) مجاله : ح – { $\frac{ن\pi}{٢}$ ، حيث ن ∋ ص } ، والمدى ح

٢) منحنى الاقتران ق(س) = جتا س متماثل حول نقطة الاصل .

الوحدة الثانية: النهايات

** مفهوم النهاية والبحث فيها عند نقطة :

لنأخذ المثال التالي حتى يتضح لنا مفهوم نهاية اقتران عند نقطة معينة

مثال (١): ماذا يحدث لقيم الاقتران ق(س) = { س + ٢ ، س $\neq$ ٢
٥ ، س = ٢

عندما تقترب قيم س من العدد ٢.

الحل : عندما تقترب قيم س من العدد ٢، هذا يعني أن س $\neq$ ٢ وانما س عدد أصغر

من العدد ٢ بمقدار صغير جداً، أو عدد أكبر من العدد ٢ بمقدار صغير جداً.

لذلك : إذا كانت س < ٢ وأخذت قيم س تزداد لتقترب من العدد ٢ ⟵ أن س تقترب من العدد ٢ من جهة اليسار .

واذا كانت س > ٢ وأخذت قيم س تقل لتقترب من العدد ٢ ⟵ أن س تقترب من العدد ٢ من جهة اليمين .

⟵ لنحدد قيما لـ (س) على يمين العدد ٢ وعلى يساره ونرى قيم الاقتران عندها كما في الجدول:

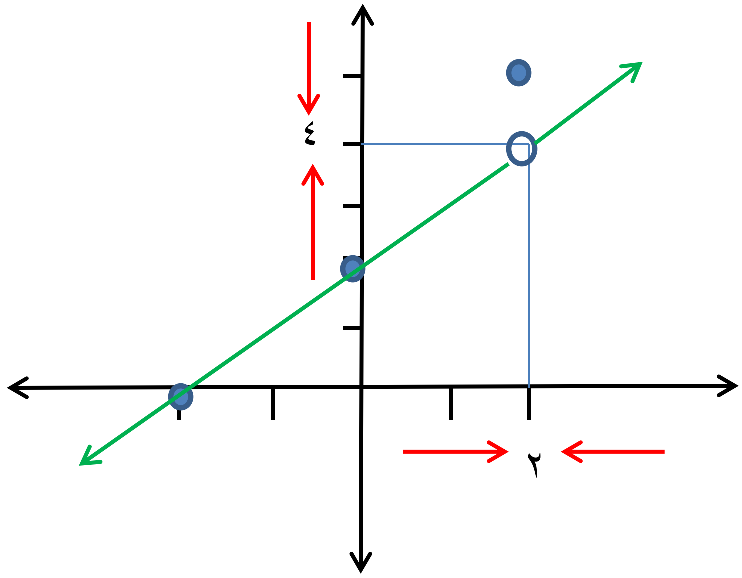
س	٢.٠١	٢.٠٠١	٢.٠٠٠١	---	٢	---	١.٩٩٩٩	١.٩٩٩	١.٩٩
ق(س)	٤.٠١	٤.٠٠١	٤.٠٠٠١		٥		٣.٩٩٩٩	٣.٩٩٩	٣.٩٩

⟶ $\boxed{٤}$ ⟵

إذا قمنا بتمثيل هذا الاقتران بيانياً :

س+٢ اقتران خطي المقطع السيني لمنحناه: س= -٢ (بجعل ق(س) = ٠)

المقطع الادي لمنحناه : س = ٢ (نجعل س = ٠)



نلاحظ أنه كلما اقتربت قيم (س) من العدد (٢) من جهة اليسار تقترب قيمة ق(س) من العدد (٤)، وكلما اقتربت قيم (س) من العدد (٢) من اليمين تقترب قيم ق(س) من العدد (٤)

تعريف: **إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً بجوار العدد (أ)، وكانت قيم ق(س) تقترب من العدد (ل) كلما اقتربت قيم (س) من العدد (أ) من جهة اليسار ومن جهة اليمين، فإن نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب (س) من العدد (أ) تساوي (ل) ويعبر عن ذلك رياضياً :**

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ل$$

تعميم : **١) إذا كان س عددا أقل من العدد أ بمقدار صغير جدا ، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليسار وتكتب رياضياً على النحو :** $\underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

اما إذا كان س عدداُ أكبر من العدد أ بمقدار صغير جدا ، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليمين وتكتب رياضيا على النحو : $\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

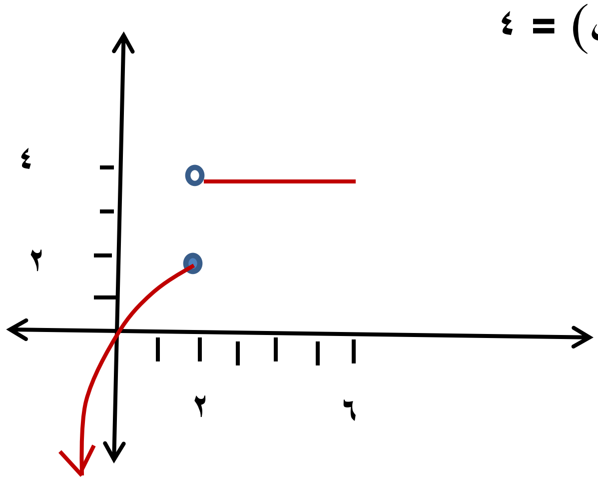
٢) حتى تكون $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ **موجودة ، يجب أن تكون :**

$$\underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$$

٣) لايجاد $\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س)$ ليس من الضروري أن يكون ق(س) معرفا عند س = أ ،

وانما يجب أن يكون ق(س) معرفاً بجوار العدد أ

مثال(٢) : بالاعتماد على الشكل المجاور ، أجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$



الحل : $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) = ٢$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+} ق(س) = ٤$

بما أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) \neq \lim\limits_{س \leftarrow ٢^+} ق(س)$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ غير موجودة.

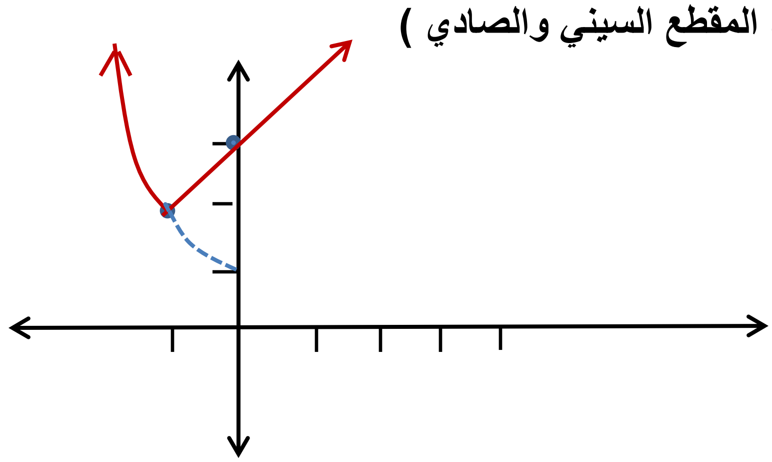
مثال (٣) : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq -١ \\ س + ٣ & ، س > -١ \end{cases}$

أمثل ق(س) بيانياً ثم أجد $\lim\limits_{س \leftarrow -١} ق(س)$

الحل: منحنى $س^٢ + ١$ هو انسحاب لمنحنى $س^٢$ الى الأعلى بمقدار وحدة واحدة.

منحنى س + ٣ يمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين (٠، ٣) ، (-٣ ، ٠)

(بايجاد المقطع السيني والصادي)



من الرسم يظهر أن :

$$\underset{\text{س}\leftarrow -١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow -١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$$

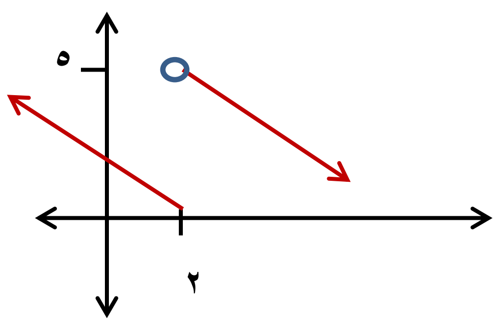
هذا يعني أن $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

مثال (٤): **معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران (ل) المعرف على ح**

جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$

الحل : **من خلال الرسم نجد** $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)} = ٥$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)} = ٠$$



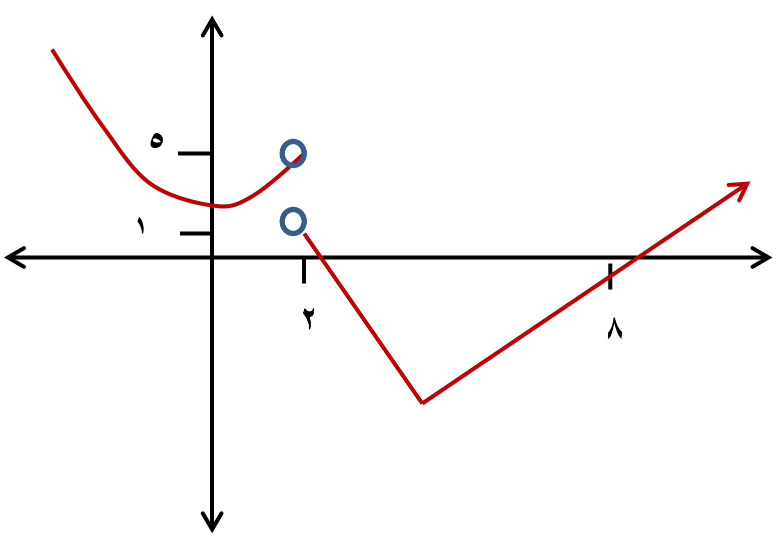
$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$ **غير موجودة**

مثال (٥): **معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران (ل) جد كل مما يأتي**

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$

الحل: $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)} = ١$

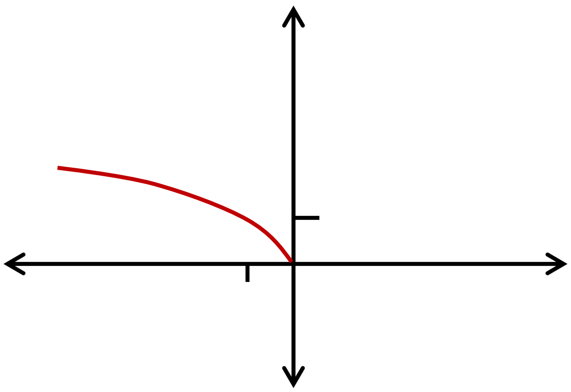
$$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)} = ٥$$



$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$ **غير موجودة**

مثال (٦) : معتمدا على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) = $\sqrt{-س}$ ،

جد ما يلي :



١) $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) غير موجودة (لماذا)

٢) $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = ٠

٣) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة (لماذا)

٥) $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ١

الحل : بداية لا بد من تحديد المجال لان الاقتران جذر تربيعي ولا بد ان يكون

ما تحت الجذر ≤ صفر ← - س ≤ صفر ← س ≥ صفر

نظريات النهايات (١):

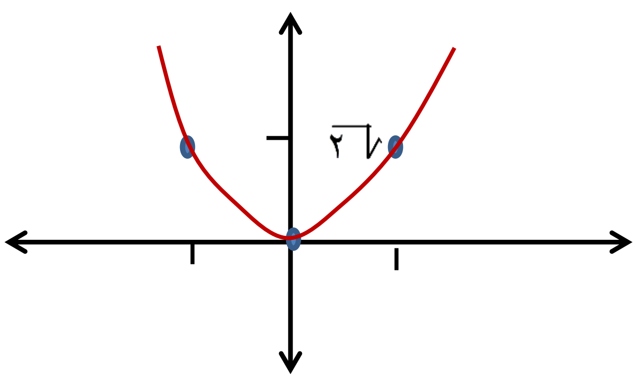
مثال : إذا كان ق(س) = $س^{٤} + س^{٢}$ ، جد $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}} \sqrt{ق(س)}$

الحل : عندما يكون الاقتران جذر : نجد مجال الاقتران :

$$س^{٤} + س^{٢} \geq ٠ \longrightarrow س \in ح$$

لنعتمد بداية ايجاد النهاية عن طريق الرسم ومن ثم ننتقل لكيفية ايجاد النهاية جبريا .

نرسم $\sqrt{ق(س)}$



ق(٠) = ٠

ق(١) = $\sqrt{٢}$

ق(-١) = $\sqrt{٢}$

$\underset{س\to -١}{\text{نهـا}} \sqrt{ق(س)} = \sqrt{٢}$

نلاحظ اننا اذا قمنا بالتعويض المباشر لقيمة س = ١ في $\sqrt{ق(س)} = \sqrt{٢}$

وهي تساوي قيمة النهاية عند س =١

نظرية (١):

١) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين وكان ق(س) = ب لكل س $\in$ ح ، فان : $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}} ق(س) = ب$

٢) اذا كان أ $\in$ ح ، ن عدد صحيح موجب وكان ق(س) = $س^{ن}$ فإن :

$$\underset{س\to أ}{\text{نهـا}} ق(س) = أ^{ن}$$

تفسير النظرية :

١)إذا اقتربنا من العدد س = أ من اليمين فان قيمة الاقتران تقترب من العدد ب ، وكذلك من اليسار .

٢) أي أن النهاية هي نتيجة التعويض المباشر لـ س = أ في قاعدة الاقتران.

لماذا ن عدد صحيح موجب ؟

المشكلة عندما أ = ٠

اذا كانت أ = ٠ ، ن = ٠ $\longrightarrow$ $أ^{ن} = ٠^{٠}$ **وهذه كمية غير معرفة**

وأيضا اذا كانت أ = ٠ ، ون عدد سالب $\longrightarrow$ $أ^{ن} = ٠^{-١} = \frac{١}{٠} = \infty$

وهذه كمية غير معرفة

لذلك نطبق النظرية فقط عندما ن عدد صحيح موجب.

نظرية (٢) : إذا كان ق ، هـ اقترانيين ، بحيث أ ، ب ، ج ، م أعدادا حقيقية ، وكان :

$\underset{س\leftarrow أ}{نهـا} ق(س) = ب$ ، $\underset{س\leftarrow أ}{نهـا} ق(س) = جـ$ **فإن :**

١) $\underset{س\leftarrow أ}{نهـا} (ق(س) + هـ(س)) = \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} ق(س) + \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = ب + جـ$

٢) $\underset{س\leftarrow أ}{نهـا} (ق(س) - هـ(س)) = \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} ق(س) - \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = ب - جـ$

٣) $\underset{س\leftarrow أ}{نهـا} م ق(س) = م \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} ق(س) = م \times ب$

٤) $\underset{س\leftarrow أ}{نهـا} (ق(س) \times هـ(س)) = \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} ق(س) \times \underset{س\leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = ب \times جـ$

٥) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right) = \frac{\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})}{\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ، جـ $\neq$ صفر

٦) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$

(بشرط ب $\geq$ صفر عندما ن عددا زوجيا)

مثال (١) : اذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٥ ، جد كلا مما يلي :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ **٢) ق(٢)**

الحل : ١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ **=** $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥)$ **= ٨ + ٤ + ٥ = ١٧**

٢) ق(٢) = ٨ + ٤ + ٥ = ١٧

تعميم : اذا كان ق اقتران كثير حدود ، فان : $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$

مثال (٢): جد كلا من النهايات الآية :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٢}$

الحل : نجد مجال الاقتران : ما تحت الجذر يجب ان يكون $\geq$ ٠

س – ٢ > ٠

س = ٠

-------------------- | +++++++++++++

مجال الاقتران هو $[٢ ، \infty)$

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهــا} ق(س) = \sqrt{٢ - ٢} = ٠$ ، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهــا} ق(س)$ غير موجودة

لان الاقتران غير معرف عندما س < ٢

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} ق(س)$ غير موجودة

٢) $$\underset{س \leftarrow -١}{نهــا} \frac{س^{٢}+٥}{س^{٤}+١} = \frac{\underset{س \leftarrow -١}{نهــا} س^{٢}+٥}{\underset{س \leftarrow -١}{نهــا} س^{٤}+١} = \frac{-١^{٢}+٥}{-١^{٤}+١} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

ملاحظة : (قبل تنفيذ النظرية نتأكد من أنه عند تعويض قيمة أ في المقام لا يساوي صفرا)

٣) $$\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} (س+١)(\sqrt{س^{٢}+٢١}) = \underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} (س+١) \times \underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} \sqrt{س^{٢}+٢١} = ٣ \times ٥ = ١٥$$

ملاحظة : (نتأكد قبل تنفيذ النظريات أنه عند تعويض قيمة أ في كلا من الاقترانات يكون الناتج عدد حقيقي))

مثال (٣) : اذا كان ق(س) = ٢س ، هـ (س) = س ^{٣} + س ، جد كلا مما يلي :

١) $$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \left(ق(س) + هـ(س) \times س\right)$$

الحل : ق(س) = ٢س ، هـ (س) = س ^{٣} + س

$$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \left(ق(س) + هـ(س) \times س\right) = \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} ق(س) + \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} هـ(س) \times \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} س$$

$$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} ٢س + \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} (س^{٣} + س) \times \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} س$$

$$= ٢(-٢) + \left((-٨ + -٢) \; (-٢) \right) = -٤ + (-١٠)(-٢) = -٤ + ٢٠ = ١٦$$

٢) $$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ٢س}{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} س^{٣} + س} = \frac{٢ \times ١}{(١)^{٣} + ١} = \frac{٢}{٢} = ١$$

٣) $$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{ق(س)} + ٣\sqrt{هـ(س)} + ١٥ \right)$$

الحل : $$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{ق(س)} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ٣\sqrt{هـ(س)} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ١٥$$

$$= \sqrt{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ق(س)} + ٣\sqrt{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} هـ(س)} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ١٥$$

$$= \sqrt{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ٢س} + ٣\sqrt{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} س^{٣} + س} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ١٥$$

$$= \sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ١٥ = ٤\sqrt{٢} + ١٥$$

ملاحظة : تقسم النقاط تنتمي الى مجال ق(س) في [أ،ب] الى قسمين :

١) نقاط طرفية ، وفي هذه الحالة تكون النهاية موجودة من جهة واحدة .

٢) نقاط داخلية وتقسم الى قسمين :

أ) نقاط تحول : وهي النقاط التي تتغير قاعدة الاقتران في جوارها وفي هذه الحالة نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

ب) ليست نقاط تحول ، وهي النقاط التي لا تتغير قاعدة الاقتران في جوارها وفي هذه الحالة بحث النهاية في جوار النقطة .

مثال (٤): جد كلا مما يلي :

١) $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} \frac{|س-٣|}{س-٣}$

الحل :

نعيد تعريف الاقتران :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{-(س-٣)}{(س-٣)} & ، س < ٣ \\ \frac{(س-٣)}{(س-٣)} & ، س > ٣ \end{cases} = \begin{cases} -١ & ، س < ٣ \\ ١ & ، س > ٣ \end{cases}$$

بما ان الاقتران يغير قاعدته عند س = ٣ ، سوف نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$$\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} ق(س) = -١ \quad ، \quad \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} ق(س) = ١$$

بما أن $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} ق(س) \neq \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} ق(س) \longleftarrow \underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} \frac{|س-٣|}{س-٣}$ غير موجودة

٢) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــا}} |س^{٢} - ٤|$

<u>الحل :</u> نعيد تعريف $|س^{٢} - ٤|$ ⟵ **نبحث في اشارته**

$$س^{٢} - ٤ = (س - ٢)(س + ٢) = ٠$$

⟵ **س = ٢ ، -٢**

+++++++++++++ ------------------ +++++++++++++

$س^{٢} - ٤$ **-٢** $٤ - س^{٢}$ **٢** $س^{٢} - ٤$

عندما س ⟵ -٣ فان القاعدة هي $س^{٢} - ٤$ **وهو اقتران كثير حدود**

لذلك $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهــا}} (س^{٢} - ٤) = ٩ - ٤ = ٥$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} |س^{٢} - ٤|$ **، عندما أ = ٢ وهي نقطة تحول يغير عندها الاقتران قاعدته**

لذلك نبحث النهاية من اليمين واليسار

$$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}} (س^{٢} - ٤) = ٤ - ٤ = ٠$$

$$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}} (٤ - س^{٢}) = ٤ - ٤ = ٠$$

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} |س^{٢} - ٤|$ **= صفر**

نظريات في النهايات(٢) :

مثال (١): جد $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} [٥و٠ س]$.

الحل : نعيد تعريف اقتران أكبر عدد صحيح بالخطوات الاتية :

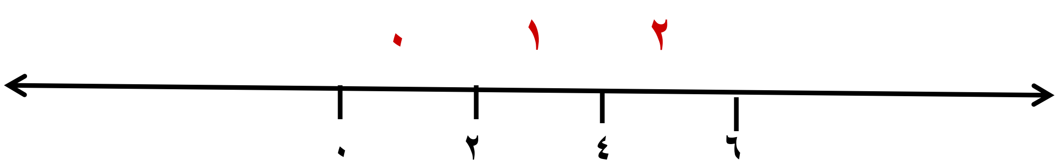
١- طول الفترة = $\frac{١}{|٥و٠|} = \frac{١}{٥و٠} = ٢$

٢- نختار نقطة اسناد تتلاءم مع ما هو مطلوب في السؤال ايجاد اكبر عدد صحيح عندها

ولتكن = صفر

٣- ملاحظة :

(اذا كانت اشارة معامل س موجبة فان صورة الاعداد الصحيحة تكون ايضا للفترة التي بعدها . أما اذا كانت اشارة معامل س سالبة فان صورة الاعداد الصحيحة تكون للفترة التي قبلها)



$$\underset{س \leftarrow ٤^+}{نهـا} [٥و٠ س] = \underset{س \leftarrow ٤^+}{نهـا} ٢ = ٢$$

$$\underset{س \leftarrow ٤^-}{نهـا} [٥و٠ س] = \underset{س \leftarrow ٤^-}{نهـا} ١ = ١$$

بما ان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار عندما س $\leftarrow$ ٤ ،

$\leftarrow$ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} [٥و٠ س]$ **غير موجودة**

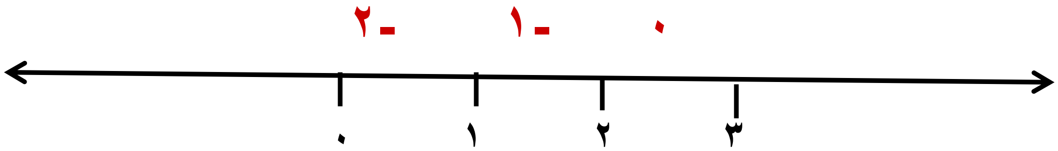
ملاحظة: * اذا كان التعويض المباشر في اقتران أكبر عدد صحيح يعطي ناتجا عدد صحيح فالنهاية غير موجودة.

* اذا كان التعويض المباشر في اقتران أكبر عدد صحيح يعطي ناتجا عدد غير صحيح فالنهاية موجودة.

مثال (٢): جد كلا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢]$

الحل : اعادة التعريف : طول الفترة = $\frac{١}{|١|} = \frac{١}{١} = ١$



$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] = \underset{\text{س}\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} -١ = -١$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] = \underset{\text{س}\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} -٢ = -٢$$

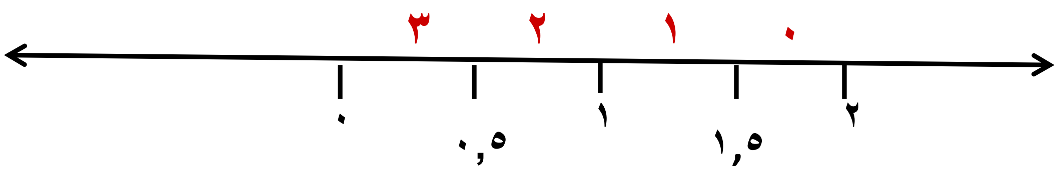
بما ان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار عندما س ← ١ ،

← $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢]$ غير موجودة

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ١,٥}{\text{نهـا}} [٤ - ٢\text{س}]$

الحل : نقوم باعادة التعريف لاقتران أكبر عدد صحيح

طول الفترة = $\frac{\text{١}}{|\text{-٢}|} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$



بما ان معامل س عدد سالب ، فان الاقتران متناقص

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{١,٥}^{+}}{\text{نهـا}} [\text{٤} - \text{٢س}] = \underset{\text{س} \leftarrow \text{١,٥}^{+}}{\text{نهـا}} \text{٠} = \text{٠}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{١,٥}^{-}}{\text{نهـا}} [\text{٤} - \text{٢س}] = \underset{\text{س} \leftarrow \text{١,٥}^{-}}{\text{نهـا}} \text{١} = \text{١}$$

بما ان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار عندما س ⟵ ١,٥ ،

⟵ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١,٥}}{\text{نهـا}} [\text{٤} - \text{٢س}]$ غير موجودة

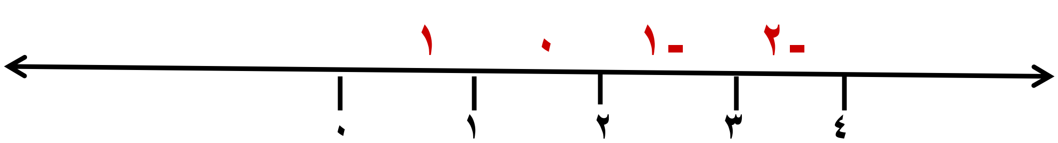
مثال (٣) : اذا كان ق(س) = $[\text{٢} - \text{س}]$ ، أجب عن كل مما يلي :

١) جد قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{جـ}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \text{-١}$

الحل :

طول الفترة = $\frac{\text{١}}{|\text{-١}|} = \frac{\text{١}}{\text{١}} = \text{١}$



١) تكون $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ غير موجودة عند حدود الفترات ، أي عندما $أ \in ص$

٢) تكون $\lim\limits_{س \to جـ} ق(س) = -١$ عندما $أ \in (٢،٣)$

مثال (٤): جد $\lim\limits_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$

الحل : نجد المجال : $س - ٤ \geq ٠ \longrightarrow س \geq ٤$

$\lim\limits_{س \to ٤^+} \sqrt{س - ٤} = ٠$ ، $\lim\limits_{س \to ٤^-} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة (لان االاقتران غير معرف للقيم اصغر من ٤)

$\longrightarrow \lim\limits_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة

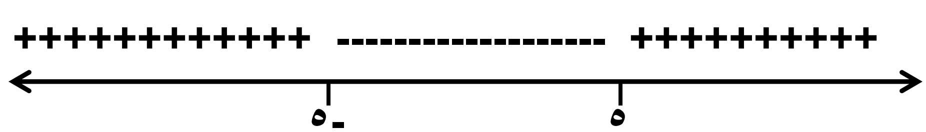
مثال (٥): جد كلا من النهايات الآتية:

١) $\lim\limits_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

الحل : نجد المجال : $\longrightarrow$

$(س - ٥)(س + ٥) = ٠ \geq ٠ \longrightarrow س \quad س^٢ - ٢٥ = ٠$

الاقتران معرف فقط عندما اشارة ق(س) موجبة



$\lim\limits_{س \to ٥^+} \sqrt{س^٢ - ٢٥} = ٠$ **(بالتعويض المباشر)** ،

$\underset{س \to ٥^-}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ غير موجودة (لانها لا تنتمي للمجال)

$\longleftarrow$ $\underset{س \to ٥}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ غير موجودة

٢) $\underset{س \to -٧}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

$-٧ \in$ المجال وليست نقطة تحول لذلك نجد النهاية عندها بالتعويض المباشر

$$\underset{س \to -٧}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٢٥} = \sqrt{٤٩ - ٢٥} = \sqrt{٢٤} = ٢\sqrt{٦}$$

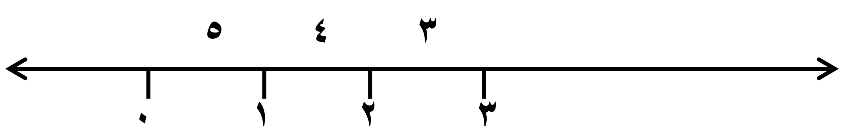
مثال (٥): اذا كان ق(س) = $\begin{cases} |س - ٢| & ، س \geq ٢ \\ [٦ - س] & ، س < ٢ \end{cases}$

جد $\underset{س \to ٢}{نهـا} ق(س)$

الحل:

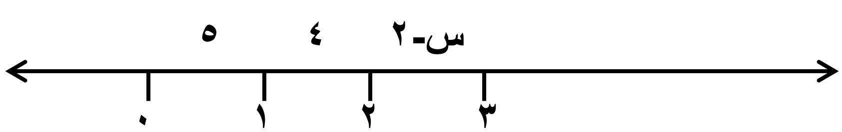
نعيد تعريف الاقتران $[٦ - س]$

طول الفترة = $\frac{١}{|-١|} = ١$



نعيد تعريف الاقتران $|س - ٢|$ = $\begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & س < ٢ \end{cases}$

ق(س) =



$$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا} ق(س) = ٢ - ٢ = ٠$$

$\longleftarrow$ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س)$ غير موجودة

$$\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا} ق(س) = ٤$$

مثال (٦): أجد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \left(|س^{٢} - ٩| + |س - ٣|\right)$

الحل : نعيد تعريف الاقتران ق(س)

١) $|س^{٢} - ٩|$: $س^{٢} - ٩ = ٠$ $\longleftarrow$ (س-٣)(س+٣)=٠

$س^{٢} - ٩$ ‏ | ‏ $٩ - س^{٢}$ ‏ | ‏ $س^{٢} - ٩$

-٣ ‏ ‏ ٣

٢) $|س - ٣|$: $س - ٣ = ٠$ $\longleftarrow$ س = -٣

- س + ٣ ‏ | ‏ - س + ٣ ‏ | ‏ س − ٣

-٣ ‏ ‏ ٣

٣) $|س^{٢} - ٩| + |س - ٣|$

$س^{٢} + س - ٦$ ‏ | ‏ $س^{٢} - س + ١٢$ ‏ | ‏ $س^{٢} + س - ١٢$

-٣ ‏ ‏ ٣

$$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} \left(|س^{٢} - ٩| + |س - ٣|\right) = \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} س^{٢} + س - ١٢ = ٠$$

$\longleftarrow$ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} = ٠$

$$\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} \left(|س^{٢} - ٩| + |س - ٣|\right) = \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} - س^{٢} - س + ١٢ = ٠$$

النهايات والصورة غير المعينة (١) :

سوف نتطرق في هذا الدرس لحساب النهايات للاقترانات الكسرية ، وبشكل عام :

اذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ ، فانه يمكن حساب نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من أ (حيث أ عدد حقيقي) من خلال التعويض المباشر وتكن النتيجة احدى الحالات الآتية:

١) عدد حقيقي ، ويكون هذا العدد هو قيمة النهاية المطلوبة ، وهذه القسم تناولناه في الدروس السابقة.

٢) $\frac{أ}{٠}$ ، أ $\neq$ ٠ ، وهنا نعتمد على النظرية الاتية :

اذا كانت $\lim\limits_{س \to أ}$ ك(س) = ل ، حيث ل عدد حقيقي ، ل $\neq$ صفر

وكانت $\lim\limits_{س \to أ}$ هـ(س) = ٠ فان $\lim\limits_{س \to أ} \frac{ك(س)}{هـ(س)}$ غير موجودة

٣) $\frac{٠}{٠}$ ، كمية غير معينة، وفي هذه الحالة نبحث عن قيمة النهاية بإحدى الطرق الاتية

١)التحليل الى العوامل ٢) الضرب بالمرافق ٣) توحيد المقامات للكسور

٤) الفرض و الاستبدال

ملاحظة : لماذا يعتبر المقدار $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة ؟

الجواب : لانه لو كانت $\frac{٠}{٠}$ كمية معينة او محددة يمكن معرفتها ولنفرض انها = ٥ مثلا

هذا يتضمن ان $\frac{٠}{٠}$ = $\frac{٥}{١}$ بالضرب التبادلي يكون ٠ = ٠

وكذلك لو فرضنا ان $\frac{٠}{٠}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، بالضرب التبادلي يكون ٠ = ٠

هكذا فانه يمكننا فرض انها تساوي أي قيمة ولذلك فهي قيمة غير معينة.

مثال (١) : جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{س - ١}$

الحل : بالتعويض المباشر لقيمة س = ١ في الاقتران نجد ان النتيجة : $\frac{١}{٠}$

$\longleftarrow \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{س - ١}$ **غير موجودة**

مثال (٢): جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$

الحل: بالتعويض المباشر لقيمة س = ٣ في الاقتران نجد ان النتيجة = $\frac{١٠}{٠}$

$\longleftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$ **غير موجودة**

مثال (٣): جد $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣س-١٠}{س+٥}$

الحل : بالتعويض المباشر نحصل على نتيجة $\frac{٠}{٠}$ لذلك نحاول معالجة المقدار بإحدى الطرق وهنا سوف تكون التحليل الى العوامل لكل من البسط والمقام

$$\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣س-١٠}{س+٥} = \underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{(س+٥)(س-٢)}{س+٥} = \underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} س - ٢ = -٧$$

مثال (٤) : جد $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-٤}{س+٢}$

الحل : بالتعويض المباشر نحصل على نتيجة $\frac{٠}{٠}$ لذلك نحاول معالجة المقدار بإحدى الطرق وهنا سوف تكون التحليل الى العوامل لكل من البسط والمقام

$$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-٤}{س+٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)(س-٢)}{س+٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} س - ٢ = -٤$$

مثال (٥): جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\longleftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س(س - ٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} س = ٣$$

مثال (٦): جد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{٢س^٢ - ٨}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{٢س^٢ - ٨} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٢(س^٢ - ٤)} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٢(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{٢(س + ٢)} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢(٤)} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

مثال (٧): جد $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^٤ - أ^٤}{س - أ}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^٤ - أ^٤}{س - أ} = \lim_{س \to أ} \frac{(س^٢ - أ^٢)(س^٢ + أ^٢)}{س - أ} = \lim_{س \to أ} \frac{(س - أ)(س + أ)(س^٢ + أ^٢)}{(س - أ)}$$

$$= \lim_{س \to أ} (س + أ)(س^٢ + أ^٢) = (أ + أ)(أ^٢ + أ^٢) = ٢أ \times ٢أ^٢ = ٤أ^٣$$

استنتاج: $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\,أ^{ن-١}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب

مثال (٨): جد :

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ ، بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س - ٢} = ٥(٢)^{٤} = ٥ \times ١٦ = ٨٠$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ١}{س^{٤} - ١}$ (بقسمة كل من البسط والمقام على س – ١)

الحل : = $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ١}{س - ١} \div \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١}{س - ١}$

= $٥(١)^{٤} \div ٤(١)^{٣} = ٥ \div ٤ = \frac{٥}{٤}$

مثال (٩): جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٦س}{س - ٣}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ ، نحلل العوامل للبسط باستخدام القسمة التركيبية

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	الثابت
	١	-٥	٦	٠
٣	٠	٣	-٦	٠
	١	-٢	٠	

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٦س}{س - ٣} = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)(س^{٢} - ٢س)}{س - ٣} = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} س^{٢} - ٢س = ٩ - ٦ = ٣$

مثال (١٠): $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٤ - ٢\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٣ - ١}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ لذلك نقم بتحليل كل من البسط والمقام

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٣+\text{س}^٢-\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}$$

$$= \frac{١+١-١-١}{١+١+١} = \frac{٠}{١} = ٠$$

	س⁴	س³	س²	س	الثابت
	١	٠	٢-	٠	١
$\boxed{١}$	٠	١	١	١-	١-
	١	١	١-	١-	٠

مثال (١٠): أجد $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٢} - ٣}{\text{س} - ٧}$

الحل : التعويض المباشر يعطي نتيجة $\frac{٠}{٠}$ ، لذلك نبحث عن النهاية من خلال الضرب بالمرافق

$$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}+٢}-٣}{\text{س}-٧} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٢}+٣}{\sqrt{\text{س}+٢}+٣} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٢-٩}{(\text{س}-٧)(\sqrt{\text{س}+٢}+٣)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \frac{\text{س}-٧}{(\text{س}-٧)\ \sqrt{\text{س}+٢}+٣} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \frac{١}{(\sqrt{\text{س}+٢}+٣)} = \frac{١}{\sqrt{٩}+٣} = \frac{١}{٦}$$

مثال (١١): جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٢} - ٢}{\text{س} - ١}$

الحل : التعويض المباشر يعطي نتيجة $\frac{٠}{٠}$ ، لذلك نبحث عن النهاية من خلال الضرب بالمرافق

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢\text{س}+٢}-٢}{\text{س}-١} \times \frac{\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢}{\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}+٢-٤}{(\text{س}-١)(\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}-٢}{(\text{س}-١)\ \sqrt{٢\text{س}+٢}+٢} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٢(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٢}{\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢} = \frac{٢}{\sqrt{٤}+٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

مثال (١٢): جد $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ ولذلك نقوم بالضرب بالمرافق

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦} \times \frac{\sqrt{س+٣٤}+٦}{\sqrt{س+٣٤}+٦} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤}+٦)}{س+٣٤-٣٦}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(\sqrt{س+٣٤}+٦)}{(س-٢)} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س+٣٤}+٦ = \sqrt{٣٦}+٦ = ١٢$$

النهايات والقيمة غير المعينة (٢)

مثال(١): جد $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{س+٢}-\frac{١}{٥}}{س-٣}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$

لذلك نتبع طريقة لمعالجة المقدار ، ونلاحظ ان البسط عبارة عن طرح كسرين لذلك نقوم نجد ناتج البسط بتوحيد المقامات للكسور في البسط

$$\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٥-(س+٢)}{٥(س+٢)}}{س-٣} = \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٥-س-٢}{٥(س+٢)(س-٣)} = \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٣-س}{٥(س+٢)(س-٣)} = \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{-١(س-٣)}{٥(س+٢)(س-٣)}$$

$$\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{-١}{٥(س+٢)} = \frac{-١}{٢٥}$$

مثال (٢): جد $\lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س}\right)\left(\frac{١}{(س+١)^{٢}} - ١\right)$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$

$$= \lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س}\right)\left(\frac{١-(س+١)^{٢}}{(س+١)^{٢}}\right) = \lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س}\right)\left(\frac{١-(س^{٢}+٢س+١)}{(س+١)^{٢}}\right) = \lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س}\right)\left(\frac{١-س^{٢}-٢س-١}{(س+١)^{٢}}\right)$$

$$= \lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س}\right)\left(\frac{-(س^{٢}+٢س)}{(س+١)^{٢}}\right) = \lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س}\right)\left(\frac{-س(س+٢)}{(س+١)^{٢}}\right) = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{-(س+٢)}{(س+١)^{٢}} = -٢$$

مثال (٣): جد $\lim\limits_{س\to ٥} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢}-٢٥}\right)$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$

$$= \lim\limits_{س\to ٠} \left(\frac{٥-س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س-٥)(س+٥)}\right) = \lim\limits_{س\to ٥} \left(\frac{-(س-٥)}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س-٥)(س+٥)}\right) = \lim\limits_{س\to ٥} \left(\frac{-١}{٥س(س+٥)}\right) = \frac{-١}{٢٥٠}$$

مثال(٤): جد $\lim\limits_{س\to ٠} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{-٤+س}}{س}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$

$$= \lim\limits_{س\to ٠} \frac{\frac{-٤+س+٤}{٤(-٤+س)}}{س} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{س}{٤س(-٤+س)} = \lim\limits_{س\to ٠} \frac{١}{٤(-٤+س)} = \frac{-١}{١٦}$$

مثال (٥): جد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{١}}{(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}-\frac{\text{١}}{\text{٤}}\right)$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{٤}-(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٤}(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}\right)=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{٤}-(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٤س}(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}\right)=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{(\text{٢}-(\text{س}+\text{٢}))(\text{٢}+(\text{س}+\text{٢}))}{\text{٤س}(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{-\text{س}(\text{٤}+\text{س})}{\text{٤س}(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{-(\text{٤}+\text{س})}{\text{٤}(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}=\frac{-\text{٤}}{\text{١٦}}=\frac{-\text{١}}{\text{٤}}$$

مثال (٦): جد $\underset{\text{س}\to\text{٧}}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}+\text{١}}-\text{٢}}{\text{س}-\text{٧}}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

نفرض أن $\text{ص}=\sqrt[\text{٣}]{\text{س}+\text{١}}$

$$\text{ص}^{\text{٣}}=\text{س}+\text{١}\longleftarrow\text{س}=\text{ص}^{\text{٣}}-\text{١}$$

عندما س $\longrightarrow$ ٧ ⟸ ص $\longrightarrow$ ٢

$$=\underset{\text{ص}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ص}-\text{٢}}{\text{ص}^{\text{٣}}-\text{١}-\text{٧}}=\underset{\text{ص}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ص}-\text{٢}}{\text{ص}^{\text{٣}}-\text{٨}}=\underset{\text{ص}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ص}-\text{٢}}{(\text{ص}-\text{٢})(\text{ص}^{\text{٢}}+\text{٢ص}+\text{٤})}$$

$$=\underset{\text{ص}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\frac{\text{١}}{(\text{ص}^{\text{٢}}+\text{٢ص}+\text{٤})}=\frac{\text{١}}{\text{١٢}}$$

مثال (٧): جد $\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$

نفرض أن $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$

$$\text{ص}^{٣} = \text{س}$$

عندما س $\longrightarrow ٨$ ⟸ ص $\longrightarrow ٢$

$$= \underset{\text{ص} \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ص} - ٢}{\text{ص}^{٣} - ٨} = \underset{\text{ص} \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ص} - ٢}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} + ٤)}$$

$$= \underset{\text{ص} \to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{(\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} + ٤)} = \frac{١}{١٢}$$

مثال (٨): جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٦٤)^{\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$

نفرض أن $\text{ص} = ٨^{\text{س}}$

عندما س $\longrightarrow ٠$ ⟸ ص $\longrightarrow ١$

$$= \underset{\text{ص} \to ١}{\text{نها}} \frac{(٨^{٢})^{\text{س}} - \text{ص}}{١ - \text{ص}} = \underset{\text{ص} \to ١}{\text{نها}} \frac{(٨^{\text{س}})^{٢} - \text{ص}}{١ - \text{ص}} = \underset{\text{ص} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ص}^{٢} - \text{ص}}{١ - \text{ص}}$$

$$= \underset{\text{ص} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ص}(\text{ص} - ١)}{١ - \text{ص}} = \underset{\text{ص} \to ١}{\text{نها}} \frac{-\text{ص}(١ - \text{ص})}{١ - \text{ص}} = \underset{\text{ص} \to ١}{\text{نها}} - \text{ص} = -١$$

مثال (٩) : اذا كان ل(س) =

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{س^٣-٢٧}{٢س^٢+٦س+١٨} ، & س \leq ع \\ س+٥ ، & س > ع \end{array}\right.$$

جد قيم (ع) التي تجعل $\lim_{س \to ع} ل(س)$ **موجودة.**

الحل : **بما ان النهاية من موجودة ، هذا يعني ان النهاية ن اليمين = النهاية من اليسار**

$$\lim_{س \to ع^+} ل(س) = \lim_{س \to ع^+} \frac{س^٣-٢٧}{٢س^٢+٦س+١٨} = \lim_{س \to ع^+} \frac{(س-٣)(س^٢+٣س+٩)}{٢(س^٢+٣س+٩)} = \lim_{س \to ع^+} \frac{(س-٣)}{٢} = \frac{ع-٣}{٢}$$

$$\lim_{س \to ع^-} ل(س) = \lim_{س \to ع^-} س+٥ = ع+٥$$

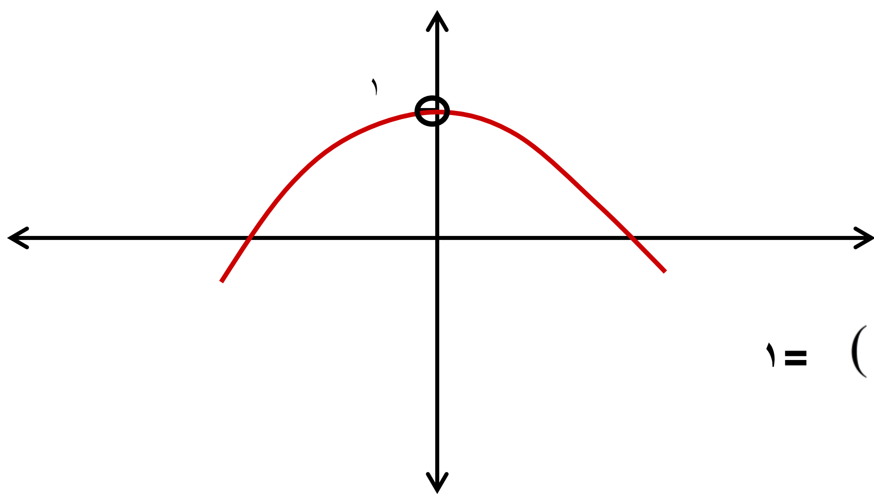
بما ان النهاية من اليمين = النهاية من اليسار $\longleftarrow$ $\frac{ع-٣}{٢} = ع+٥$

$٢ع+١٠ = ع-٣$ $\longleftarrow$ **ع = -١٣**

نهايات الاقترانات المثلثية (١):

معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{\text{جاس}}{س}$

احسب $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س)$



نلاحظ أن $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ١$

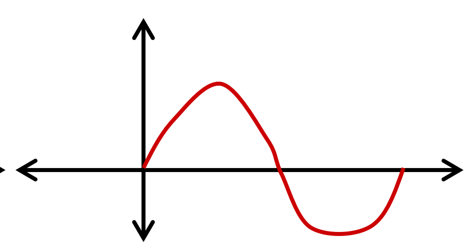
$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ١$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ١$

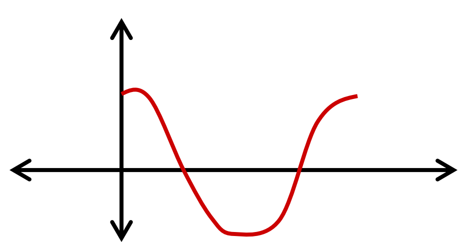
نظرية: $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جاس}}{س} = ١$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري .

وايضاً $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{س}{\text{جاس}} = ١$

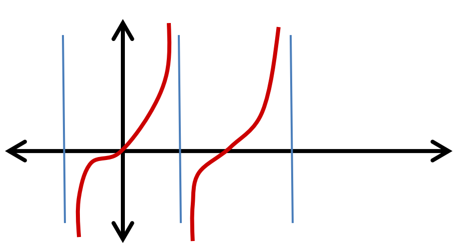
وبالاعتماد على الاشكال ادناه :



$ق(س) = \text{جاس}$



$ل(س) = \text{جتاس}$



$م(س) = \text{ظاس}$

من الرسم نلاحظ أن :

$$\underset{س \leftarrow \pi}{نهــا} جا\, س = ٠ \quad ، \quad جا\, \pi = ٠$$

$$\underset{س \leftarrow \pi}{نهــا} جتا\, س = -١ \quad ، \quad جتا\, \pi = -١$$

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} ظا\, س = ٠ \quad ، \quad ظا٠ = ٠$$

تعميم :

١) $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا} جا\, س = جاأ$

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا} جتا\, س = جتاأ$

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا} ظا\, س = ظاأ ،\ أ \notin \left(\frac{ن}{٢}\pi ،\ ن \in \right.$ الاعداد الصحيحة الفردية)

مثال (١) : جد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} (جا\, س + جتا\, س)$

الحل: بما أن التعويض المباشر يعطي اعدادا حقيقية وحسب النظريات السابقة يمكننا التوزيع للنهاية على الجميع

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} (جا\, س + جتا\, س) = جا\, ٠ + جتا\, ٠ = ٠ + ١ = ١$$

مثال (٢) : جد كل من النهايات الآتية :

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا\, ٣\, س}{٥\, س}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ **لذلك نحتاج لمعالجة المقدار**

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٥\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٥\text{س}} \times \frac{٣\text{س}}{٣\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٣\text{س}} \times \frac{٣\text{س}}{٥\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٣\text{س}} \times \frac{٣}{٥}$$

$$= ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

٢) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

<u>الحل</u> : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ ولذلك نحتاج لمعالجة المقدار

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س جتاس}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتاس}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١}{\text{جتاس}} = ١ \times ١ = ١$$

<u>وبشكل عام</u>: ١) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاأس}}{\text{بس}}$ بالتعويض المباشر النتيجة $\frac{٠}{٠}$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاأس}}{\text{بس}} \times \frac{\text{أس}}{\text{أس}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاأس}}{\text{أس}} \times \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{أس}}{\text{بس}} = ١ \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

٢) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظا أس}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا أس}}{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١}{\frac{\text{ظا أس}}{\text{س}}} = \frac{١}{\text{أ}}$

<u>نتيجة</u> :

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاأس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad ، \quad \text{ب} \neq ٠$$

مثال (٣): جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣ س}{\text{جا } س}$

$$= ٣ \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جا } س} = ٣ \times ١ = ٣$$

مثال (٤): جد قيمة كلا مما يلي :

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٧ س}{٣ س} = \frac{٧}{٣}$

٢) $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا }(س - \pi)}{(س - \pi)}$

الحل : نفرض أن $ص = س - \pi$

عندما س $\longrightarrow \pi$ فان ص $\longrightarrow ٠$

$$\underset{ص \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ص}{ص} = ١$$

مثال (٥): جد قيمة كلا مما يلي :

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٩ س}{\text{ظا } س} = ٩ \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{ظا } س} = ٩$ (بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$)

٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جا س} - \text{ظا } ٥ س}{\text{جا } ٤ س - ٢ س}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ لذلك نحتاج لمعالجة المقدار

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا س}{س} - \frac{ظا ٥س}{س}}{\frac{جا٤س}{س} - \frac{٢س}{س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{\lim_{س \to ٠} جا س - ٥ \lim_{س \to ٠} ظا س}{\lim_{س \to ٠} \frac{جا٤س}{س} - \lim_{س \to ٠} ٢} = \frac{٠-٠}{٤-٢} = ٠$$

ملاحظة :(نستطيع توزيع النهاية على البسط والمقام لان التعويض في المقام $\neq$ ٠)

مثال (٦): جد $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جا٣س + ظا٥س}{٣س - ظا^٢ س}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ لذلك نحتاج لمعالجة المقدار

بقسمة كل من البسط والمقام على (س)

$$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{س}{س} - \frac{جا٣س}{س} + \frac{ظا٥س}{س}}{\frac{٣س}{س} - \frac{ظا^٢ س}{س}}$$

، وبما ان نهاية المقام بالتعويض المباشر $\neq$ ٠

يعني بامكاننا توزيع النهاية على البسط والمقام

$$= \frac{\lim_{س \to ٠} \frac{س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٥س}{س}}{\lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{ظا^٢ س}{س}} = \frac{١-٣+٥}{٣ - \lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} \times \lim_{س \to ٠} ظا س}$$

$$= \frac{٣}{٣-(١\times ٠)} = \frac{٣}{٣}$$

نـهايات الاقترانات المثلثية (٢):

مراجعة لبعض المتطابقات المثلثية التي يمكن استخدامها لمعالجة بعض المقادير ليمكن ايجاد بعض النـهايات المثلثية .

$$\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$$

$$\text{جا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{جاس} = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$$

$$\text{جتاس} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$$

$$\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$$

$$= ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١$$

$$= ١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{جا٢س} = ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$$

$$\text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتا}(\text{س})$$

$$\text{جا}(-\text{س}) = -\text{جا}(\text{س})$$

$$\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}\right)$$

مثال (١): جد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جتا ٦ س} - \text{جتا ٤ س}}{\text{س}^{٢}}$ **(بالتعويض المباشر النتيجة** $\frac{٠}{٠}$ **)**

الحل :

$$\text{جتا٦س} - \text{جتا٤س} = -٢\left(\text{جا}\frac{\text{٦س}+\text{٤س}}{٢}\ \ \text{جا}\frac{\text{٦س}-\text{٤س}}{٢}\right)$$

$$= -٢\left(\text{جا ٥ س}\ \ \text{جا س}\right)$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتا٦س} - \text{جتا٤س}}{\text{س}^{٢}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{-٢\,\text{جا٥س}\ \ \text{جاس}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= -٢ \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \ \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}} \quad ٢ \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا٥س}}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \quad)$$

$$= -٢ \times ٥ \times ١ = -١٠$$

الحل : نقوم بمعالجة المقدار عن طريق الضرب بالمرافق

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١-جتاس}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{١+جتاس}}{\text{١+جتاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١-جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}\text{(١+جتاس)}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}\text{(١+جتاس)}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{(١+جتاس)}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{(١+جتاس)}}$$

$$= ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

مثال(٣): جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا٨س+جا٤س}}{\text{س}}$ ((التعويض المباشر يعطي نتيجة $\frac{٠}{٠}$))

الحل : نقوم بمعالجة المقدار

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا٨س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا٨س}}{\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}} = ٨ + ٤ = ١٢$$

مثال(٤): جد $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}-\text{جتاس}}{\text{س}-\frac{\pi}{٤}}$ ((التعويض المباشر يعطي نتيجة $\frac{٠}{٠}$))

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}-\text{جتاس}}{\text{س}-\frac{\pi}{٤}} \times \frac{\text{جاس+جتاس}}{\text{جاس+جتاس}} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}-\text{جتا}^{٢}\text{س}}{(\text{س}-\frac{\pi}{٤})(\text{جاس+جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{-\text{جتا٢س}}{(\text{س}-\frac{\pi}{٤})(\text{جاس+جتاس})} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{-\text{جا}(\frac{\pi}{٢}-\text{٢س})}{(\text{س}-\frac{\pi}{٤})(\text{جاس+جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{-\text{جا}((٢)(\frac{\pi}{٤}-\text{س}))}{(\text{س}-\frac{\pi}{٤})(\text{جاس+جتاس})} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}((٢)(\text{س}-\frac{\pi}{٤}))}{(\text{س}-\frac{\pi}{٤})(\text{جاس+جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(2\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{\left(\text{جاس}+\text{جتاس}\right)} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(2\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)} \times \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{1}{\left(\text{جاس}+\text{جتاس}\right)}$$

$$\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\text{س}-\frac{\pi}{4}\right)} \times \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{1}{\left(\text{جاس}+\text{جتاس}\right)} = 2 \times 1 \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \times \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

مثال(٥): جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{2\text{س}-\pi}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{1}{-\pi}$

مثال (٦): جد $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{\text{س}-\frac{\pi}{2}}$ **(التعويض المباشر ينتج** $\frac{0}{0}$ **)**

الحل : $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{\text{س}-\frac{\pi}{2}} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)}{\text{س}-\frac{\pi}{2}}$

$$= -\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\text{س}-\frac{\pi}{2}\right)}{\text{س}-\frac{\pi}{2}} = -1 \times 1 = -1$$

مثال (٧): جد $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{2}\text{س}}{\text{س}-1}$ **(التعويض المباشر ينتج** $\frac{0}{0}$ **)**

الحل : $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{2}\text{س}}{\text{س}-1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\text{س}\right)}{\text{س}-1}$

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{2}\left(1-\text{س}\right)}{\text{س}-1} = -\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{2}\left(\text{س}-1\right)}{\text{س}-1} = -1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

مثال (٨): جد $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٢س - \pi}$ (التعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$)

الحل : $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٢س - \pi} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(س - \frac{\pi}{٢})}$

$= - \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{٢})}{٢(س - \frac{\pi}{٢})} = -\frac{١}{٢} \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{٢})}{س - \frac{\pi}{٢}}$

$= -\frac{١}{٢} \times ١ = \frac{-١}{٢}$

مثال (٩): جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{س}$ (التعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$)

الحل : $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس}}{س} - \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{س}$

مثال (١٠): جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢س^{٢} + س\,\text{ظا}٢س}{\text{جا}^{٢}س}$ (...يض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$)

الحل : $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢س^{٢} + س\,\text{ظا}٢س}{\text{جا}^{٢}س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{س\,\text{ظا}٢س}{س^{٢}}}{\frac{\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}}}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ + \frac{\text{ظا}٢س}{س}}{\frac{\text{جاس}}{س} \times \frac{\text{جاس}}{س}} = \frac{\lim\limits_{س \to ٠} ٢ + \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{س}}{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{س} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{س}} = \frac{٢+٢}{١\times١} = ٤$

مثال (١١): جد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جتا^{٢} س - جا^{٢} س}{س - \frac{\pi}{4}}$ (التعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$)

الحل : $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جتا^{٢} س - جا^{٢} س}{س - \frac{\pi}{4}} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جتا ٢ س}{س - \frac{\pi}{4}}$

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جا (\frac{\pi}{٢} - ٢ س)}{س - \frac{\pi}{4}} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جا ٢ (\frac{\pi}{4} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جا - ٢ (س - \frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}} = -٢ \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـــا}} \frac{جا (س - \frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}}$$

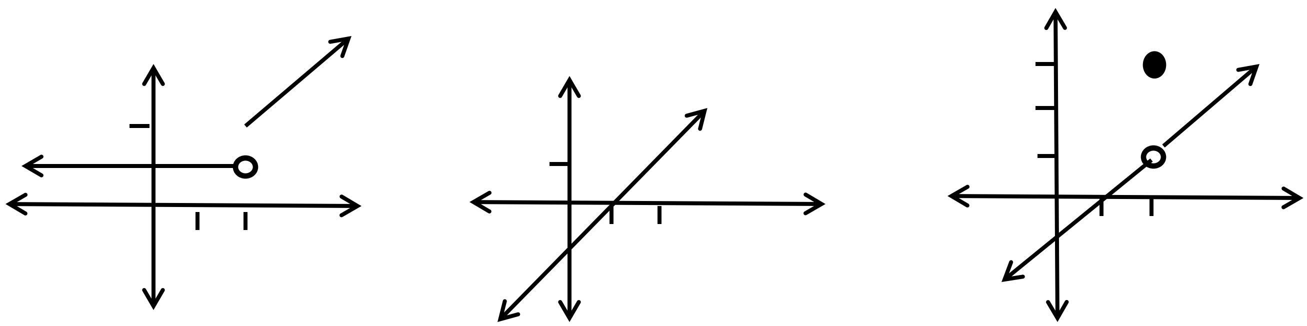
$$= -٢ \times ١ = ٢$$

الوحدة الثالثة : الاتصال

مفهوم الاتصال

من خلال الرسوم أدناه التي تمثل منحنيات اقترانات مختلفة ، ألاحظ وأجب عن الأسئلة :

ك(س)   م(س)   ق(س)



١) نهـا ك(س) (س ← ٢) = ١ ، **ك(٢) = ٣**

٢) نهـا م(س) (س ← ٢) = ١ ، **م (٢) = ١**

٣) نهـا ق(س) (س ← ٢) = **غير موجودة** ، **ق (٢) = ٢**

نلاحظ أن الاقتران م(س) له خاصية مختلفة عن ك(س) ، ق(س)

تعريف: **اذا كان ق(س) اقتراناً ، أ عددا حقيقيا ينتمي لمجال ق(س) ، فإن ق(س) متصل عند س = أ إذا كان**

١) ق(س) معرف عند س = أ

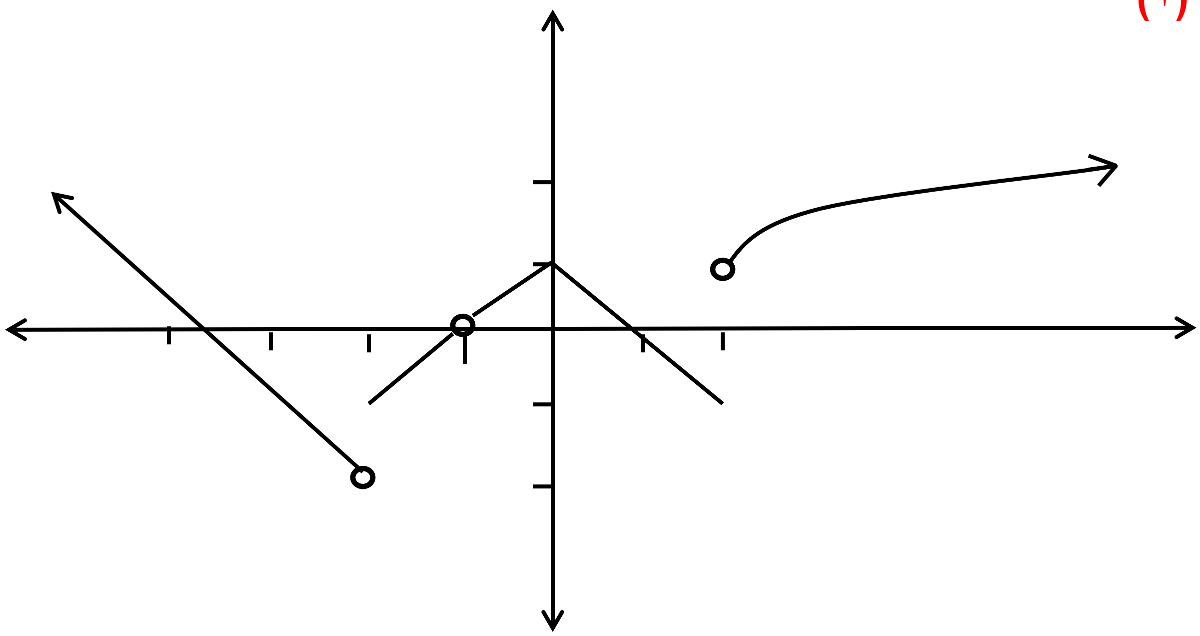
٢) نهـا ق(س) (س ← أ) موجودة كعدد حقيقي

٣) نهـا ق(س) (س ← أ) = ق (أ)

وتسمى هذه النقاط الثلاث شروط الاتصال عند نقطة ما

مثال (١): جد قيم أ حيث ق غير متصل عند س = أ في الرسومات الاتية :

(١)

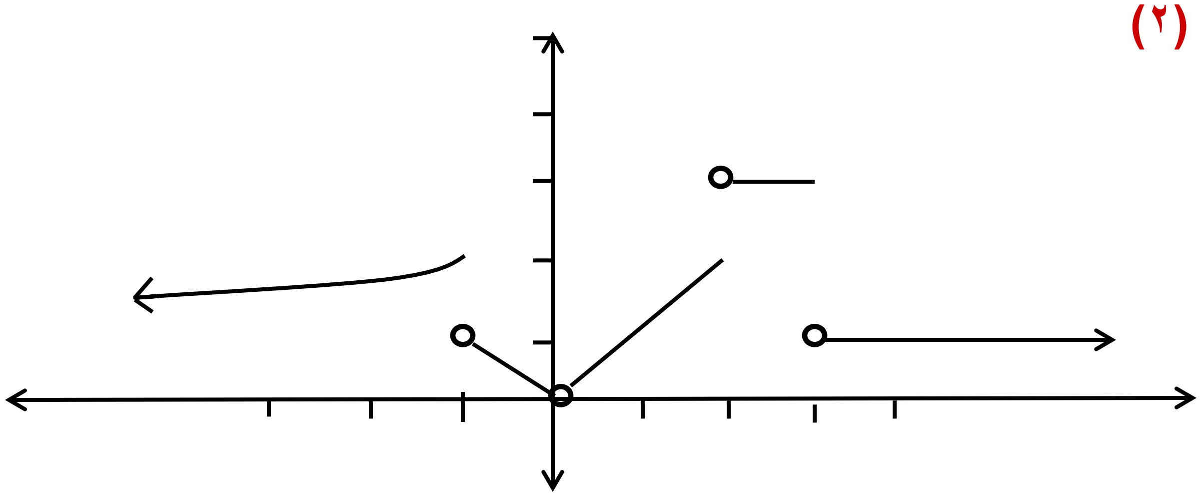


نستدل على القيم التي يكون عندها الاقتران غير متصل من خلال الرسم :

الفجوات ، القفزات ، الاطراف المقطوعة

ومنها يكون ق غير متصل عند أ = { ٢، -١ ، -٢ }

(٢)



منها يكون ق غير متصل عند أ = { ٣، ٢، ٠ ، -١ }

لبحث الاتصال لاقتران معطى عند نقطة أ

١) نجد ق(أ)

معرف ⟵ ⟶ غير معرف ⟵ **غير متصل**

↓

نكمل الحل

↓

٢) نجد $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

غير موجودة ⟵ **غير متصل**

موجودة ⟵ نقارن بين ($\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$) و ق (أ)

متساويتان ↓ **متصل**

غير متساويتان ↓ **غير متصل**

مثال (٢): اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢}+٣س-٤}{س-١}$ ، $س \neq ١$

ابحث في اتصال ق (س) عند س = ٣ ، س = ١

الحل : عندما س = ٣ : $ق(٣) = \frac{٩+٩-٤}{٣-١} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(٣) = ٧$

بما ان $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(٣)$ ⟵ الاقتران متصل عند س = ٣

عندما س = ١ : الاقتران ق (س) غير معرف عند س =١ ⟵ ق(س) غير متصل عند س = ١

مثال (٣): اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} ٢ - ٣س & ، \quad س < ٢ \\ -٣ & ، \quad س = ٢ \\ س^{٢} - ٨ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س =٢

الحل : س = ٢ (نقطة تحول)

ق (٢) = -٣

$$\lim_{س \leftarrow ٢^{+}} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^{+}} (س^{٢} - ٨) = ٤ - ٨ = -٤$$

$$\lim_{س \leftarrow ٢^{-}} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^{-}} (٢ - ٣س) = ٢ - ٦ = -٤$$

$$\Leftarrow \lim_{س \leftarrow ٢} ق(س) = -٤$$

لكن $ق(٢) \neq \lim_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ ⟵ ق(س) غير متصل عند س = ٢

مثال (٤): اذا كان ق (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} + س - ٣، & س < ١ \\ \sqrt{س^{٣} - س + ١}، & ١ \leq س \leq ٣ \\ ٥، & س > ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ١ ، ٢ ، ٣

الحل : عند س = ١ : ق(١) = $\sqrt{١^{٣} - ١ + ١} = ١$

$$\lim_{س \leftarrow ١^{+}} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ١^{+}} \sqrt{س^{٣} - س + ١} = ١$$

$$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} س^{٢} - س - ٣ = -٣$$

$\leftarrow$ $\lim_{س \to 1} ق(س)$ غير موجودة $\leftarrow$ **ق(س) غير متصل عند س = ١**

عند س = ٢ : ق (٢) = $\sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$

$$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٣} - س + ١} = \sqrt{٧}$$

بما أن $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$ $\leftarrow$ **ق(س) متصل عند س = ٢**

عند س = ٣ : **(نقطة تحول)**

ق (٣) = $\sqrt{٣^{٣} - ٣ + ١} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} ٥ = ٥$$

$$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} \sqrt{س^{٣} - س + ١} = ٥$$

$\leftarrow$ $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥$

بما أن $ق(٣) = \lim_{س \to ٣} ق(س)$ $\leftarrow$ **ق(س) متصل عند س = ٣**

أمثلة اضافية عن البحث فى اتصال اقتران عند نقطة :

مثال (٥):

اذا كان ق (س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} \text{ ، } & \text{س} \neq ٢ \\ ٣ \text{ ، } & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢

الحل: نعيد تعريف ق(س) من خلال اعادة تعريف $|\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢|$

$$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠ \longleftarrow (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠ \longleftarrow \text{الجذور هي : -١ ، ٢}$$

$$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ \qquad -(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢) \qquad \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢$$

++++++++++++++ ------------------------- ++++++++++++++

-١ ٢

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} = \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ٢} = \text{س} + ١ \text{ ، } & \text{س} > ٢ \text{ أو } \text{س} < -١ \\ \dfrac{-(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} = \dfrac{-(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ٢} = -(\text{س} + ١) \text{ ، } & -١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٣ \text{ ، } & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

عندما س = ٢

ق(٢) = ٣

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} \text{س} + ١ = ٣$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} -(\text{س} + ١) = -٣$$

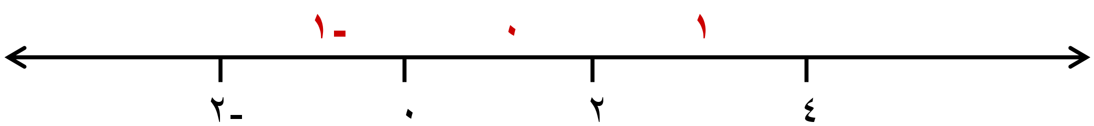
← $\underset{س \to ٢}{نهـا}$ ق(س) غير موجودة ← ق(س) غير متصل عند س = ٢

مثال (٦): اذا كان ق(س) = س + $\left[\frac{س}{٢}\right]$ ، س ∈ [-٢ ، ٤[

ابحث في اتصال ق(س) عند س = -١، ٠، ٢

الحل : نعيد تعريف الاقتران ق(س) من خلال اعادة تعريف $\left[\frac{س}{٢}\right]$

طول الدرجة = $\frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|}$ = ٢



ق(س) = { س − ١ ، −٢ ≤ س < ٠
س ، ٠ ≤ س < ٢
س + ١ ، ٢ ≤ س < ٤

عند س = -١ (ليست نقطة تحول)

ق(-١) = -٢

$\underset{س \to -١}{نهـا}$ ق(س) = -٢ ← ق(-١) = $\underset{س \to -١}{نهـا}$ ق(س)

← ق(س) متصل عند س = -١

عند س = ٠ (نقطة تحول)

ق(٠) = ٠

$\underset{س \to ٠^+}{نهـا}$ ق(س) = ٠

$\lim\limits_{س \to 0^-}$ ق(س) $= -1$ ⟵ $\lim\limits_{س \to 0}$ ق(س) غير موجودة

⟵ ق(س) غير متصل عند س = ٠

<u>عند س = ٢</u> (نقطة تحول)

ق(٢) = ١

$\lim\limits_{س \to 2^+}$ ق(س) $= 3$

$\lim\limits_{س \to 2^-}$ ق(س) $= 2$ ⟵ $\lim\limits_{س \to 2}$ ق(س) غير موجودة

⟵ **ق(س) غير متصل عند س =٢**

<u>مثال (٧):</u>

اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{|٦-٢س|}{س-٣} ، & س \neq ٣ \\ ٢ ، & س = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س =٣

<u>الحل:</u> اعادة تعريف ق(س) من خلال اعادة تعريف $|٦ - ٢س|$

٦ – ٢س = ٠ ⟵ ٦ = ٢س ⟵ س = ٣

$(٦ - ٢س)$ $\qquad$ $-(٦ - ٢س)$

++++++++++++++ -------------------------

س < ٣ $\qquad$ ٣ $\qquad$ س > ٣

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٦-٢س}{س-٣}، & س < ٣ \\ ٢ ، & س = ٣ \\ \frac{-(٦-٢س)}{س-٣}، & س > ٣ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٢(٣-س)}{س-٣}، & س < ٣ \\ ٢ ، & س = ٣ \\ \frac{-٢(٣-س)}{س-٣}، & س > ٣ \end{cases} \qquad ق(س) = \begin{cases} ٢، & س < ٣ \\ ٢ ، & س = ٣ \\ -٢، & س > ٣ \end{cases}$$

عند س = ٣ (نقطة تحول)

ق(٣) = ٢

$$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = -٢ \quad ، \quad \lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٢$$

$\longleftarrow$ $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة $\longleftarrow$ ق(س) غير متصل عند س =٣

مثال (٨):

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{جا٣س}{س}، & س \neq ٠ \\ ٣ ، & س = ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠ (نقطة تحول)

الحل : ق(٠) = ٣

$$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{س} = ٣$$

بما أن ق(٠) = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ق(س) $\longleftarrow$ ق(س) متصل عند س = ٠

مثال (٩): اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{|ظاس|}{س}، & س < ٠ \\ ١ - ٢ جتاس، & س \geq ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠ (نقطة تحول)

الحل : نعيد تعريف الاقتران $|ظاس|$، س < ٠

عندما س < ٠ يعني الزاوية في الربع الرابع ، وبالتالي (الظل) سالب

ق (س) = $\begin{cases} \frac{-ظاس}{س}، & س < ٠ \\ |ظا س|، & س > ٠ \end{cases}$

ق(٠) = ١ - ٢ جتا٠ = ١ - ٢ = -١

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}}$ (١ - ٢ جتاس) = -١

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}}$ $\frac{-ظاس}{س}$ = -١

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = -١

بما أن ق(٠) = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ق(س) $\longleftarrow$ ق(س) متصل عند س = ٠

نظريات في الاتصال :

نظرية : اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ ، فإن كلا من الاقترانات الآتية متصلة عند س = أ :

١) $(ق \pm هـ)(س)$

٢) $(ق \times هـ)(س)$

٣) $ك \times ق(س)$ ، **حيث ك عدد ثابت**

٤) $(\frac{ق}{هـ})(س)$ ، **بشرط** $هـ(أ) \neq ٠$

٥) $\sqrt[ن]{ق(س)}$ ، **بشرط** $ق(أ) > ٠$ **اذا كانت ن زوجية**

مثال (١): اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = ٣، ابحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية عند س = ٣ :

١) $(٥ق - ٣هـ)(س)$ **متصل عند س = ٣ لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين عند س = ٣ ، مضروبين بعدد ثابت.**

٢) $(ق \times ٧هـ)(س)$ **متصل عند س = ٣ لأنه حاصل ضرب اقتران متصل باقتران متصل مضروب بعدد ثابت.**

٣) $ق^{٢}(س) = ق(س) \times ق(س)$ **متصل عند س = ٣ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عند س =٣.**

نتيجة :

١) اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فان ق(س) اقتران متصل $\forall س \in ح$

٢) اذا كان ق(س) اقتران نسبي فان ق(س) اقتران متصل $\forall س \in ح$ **- { أصفار المقام}**

٣) اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً $\forall س \in ح$ **، فان** $ق^{ن}(س)$ **متصل** $\forall س \in ح$

، ن عدد صحيح موجب.

٤) اذا كان $ق(س) = جاس$ فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$س ∋ ح

٥) اذا كان $ق(س) = جتاس$ فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$س ∋ ح

٦) اذا كان $ق(س) = |هـ(س)|$ فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$س ∋ ح عندما هـ(س) متصل.

مثال (٢): ابحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية:

١) $ق(س) = س^{٢} جتاس - (\frac{س+٣}{س^{٢}+٤})$

٢) $ك(س) = ٥ + |س^{٢} - س - ١٢|$

الحل:

١) ق (س) متصل $\forall$س ∋ ح لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين حيث:

$س^{٢}$ متصل $\forall$س ∋ ح لأنه كثير حدود .

جتاس متصل $\forall$س ∋ ح $\longleftarrow$ $س^{٢}$جتاس متصل $\forall$س ∋ ح

$\frac{س+٣}{س^{٢}+٤}$ متصل $\forall$س ∋ ح لأنه اقتران نسبي المقام لا يساوي صفرا.

٢) ك(س) متصل $\forall$س ∋ ح لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين حيث:

٥ اقتران متصل $\forall$س ∋ ح لأنه اقتران ثابت.

$|س^{٢} - س - ١٢|$ اقتران متصل $\forall$س ∋ ح لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران كثير حدود متصل $\forall$س ∋ ح

مثال (٣): اذا كان ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٤ & ، س < ٢ \\ س + ٦ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

$$ع(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٢ & ، س < ٢ \\ ٣س & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال (ق + ع) (س) عند س = ٢

الحل : ١) نبحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

ق(٢) = ٢ + ٦ = ٨

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ٢ + ٦ = ٨$$

$$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = (٢)^{٢} + ٤ = ٨$$

بما أن $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

⟵ ق (س) متصل عند س = ٢ ....(١)

٢) نبحث في اتصال ع(س) عند س =٢

ع(٢) = (٣)(٢) = ٦

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ع(س) = ٣ \times ٢ = ٦$$

$$\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) = (٢)^{٣} - ٢ = ٦$$

بما أن $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ع(٢)$

⟵ ع (س) متصل عند س = ٢ .... (٢)

من (١) و (٢) ⟵ (ق + ع) (س) متصل عند س = ٢

ملاحظة : اذا كان ق(س) غير متصل و ع(س) متصل ، هذا لا يعني ان ق +ع(س) غير متصل . وعندها نجري عملية جمع الاقترانين ونبحث الاتصال على ناتج جمع الاقترانين

ق + ع(س)

مثال(٤): اذا كان ق(س) = (س − ٢)^٣ ، هـ (س) = [س + ١]

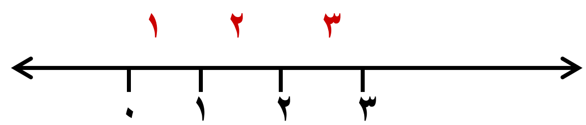
ابحث في اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٢

الحل : ١) نبحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود

٢) نبحث في اتصال هـ(س) عند س = ٢

نعيد تعريفه : طول الدرجة = ١



هـ(٢) = ٣

نهـا (س←٢+) هـ(س) = ٣

نهـا (س←٢−) هـ(س) = ٢ ⟵ نهـا (س←٢) هـ(س) غير موجودة

⟵ هـ (س) غير متصل عند س = ٢

هذا يعني اننا لا نستفيد من النظرية في بحث الاتصال

لذلك نقوم بإيجاد (ق × هـ)(س)

ع = (ق × هـ)(س) = (س − ٢)^٣ × [س + ١]

$$ع(س) = \begin{cases} ٢(س - ٢)^{٣} & ، \quad ٢ > س \geq ١ \\ ٣(س - ٢)^{٣} & ، \quad ٣ > س \geq ٢ \end{cases}$$

<u>**نبحث في اتصال ع عند س = ٢**</u>

ع(٢) = ٠

$$\lim_{س \leftarrow ٢^{+}} ع(س) = ٠ \times ٣ = ٠$$

$$\lim_{س \leftarrow ٢^{-}} ع(س) = ٠ \times ٢ = ٠ \quad \longleftarrow \quad \lim_{س \leftarrow ٢} ع(س) = ٠$$

بما ان ع(٢) = $\lim_{س \leftarrow ٢} ع(س)$

$\longleftarrow$ **ع (س) متصل عند س = ٢**

<u>**مثال (٥):**</u>

اذا كان ق(س) = $\frac{١ - س^{٢}}{س - ١}$ ، **هـ(س) =** $\sqrt{س^{٢} + ٤}$

ابحث في اتصال $ق \times هـ(س)$ **عند س = ٢**

<u>**الحل :**</u>

١) نبحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

ق(س) متصل عند س =٢ لآنه اقتران نسبي وهو متصل $\forall س \in ح$ **- { ١ }**

٢) نبحث في اتصال هـ (س) عند س = ٢

بما ان هـ (س) جذر تربيعي نقوم بما يلي :

أ) $\sqrt{س^{٢} + ٤}$ **معرف عند س =٢ لان بتعويض س = ٢ يكون ما داخل الجذر موجب =** $\sqrt{٨}$

ب) ما تحت الجذر كثير حدود $\longleftarrow$ **متصل على ح** $\longleftarrow$ **متصل عند س =٢**

$\longleftarrow$ **هـ (س) متصل عند س = ٢** $\longleftarrow$ $ق \times هـ(س)$ **متصل عند س =٢**

اتصال الاقتران على فترة:

اذا كان الاقتران ق(س) اقترانا معرفا على الفترة $[أ،ب]$ ، فان :

١) ق(س) يكون متصلا عند س = أ من جهة اليمين إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نها}}\ ق(س) = ق(أ)$

٢) ق(س) يكون متصلا عند س = ب من جهة اليسار إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نها}}\ ق(س) = ق(أ)$

٣) يكون ق(س) متصلا $\forall س \in [أ،ب]$ **، اذا كان:**

أ) ق(س) متصلا عند كل نقطة $\in\ ]أ،ب[$

ب) ق(س) متصلا عند س = أ من جهة اليمين

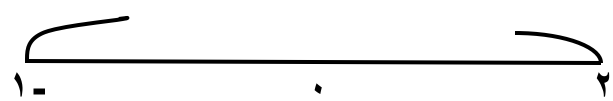
ج) ق(س) متصلا عند س = ب من جهة اليسار

مثال(١) : إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} س^٢ - ١ ، & -١ \leq س < ٠ \\ \text{جتا}(٢\pi س)، & ٠ \leq س < ٢ \\ ١٠ ، & س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة $[-١،٢]$

الحل :



نبحث في اتصال ق(س) في ٣ مواقع:

١) الاطراف : عند س = -١

ق(-١) = صفر ، $\underset{س \leftarrow -١^+}{\text{نها}}\ ق(س)$ **= صفر**

بما ان ق(-١) = $\underset{س \leftarrow -١^+}{\text{نها}}\ ق(س)$ $\longleftarrow$ **ق(س) متصلا عند س =-١ من جهة اليمين**

<u>عند س = ٢</u>

ق(٢) = ١٠ ، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـــا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـــا}$ جتا(٢π × ٢) = $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـــا}$ جتا(٤π) = ١

بما ان ق(٢) ≠ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـــا}$ ق(س) ⟵ ق(س) غير متصل عند س=٢ من جهة اليسار

٢) نقاط التحول:

<u>عند س = ٠</u>

ق(٠) = جتا(٢π × ٠) = جتا(٠) = ١

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهـــا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهـــا}$ جتا(٢π × ٠) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهـــا}$ جتا(٠) = ١

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهـــا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهـــا}$ س^{٢} − ١ = −١

بما ان $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهـــا}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهـــا}$ ق(س) ⟵ ق(س) غير متصل عند س = ٠

٣) الفترات الداخلية

في الفترة (-١ ، ٠) : ق(س) كثير حدود ⟵ ق(س) متصلا على هذه الفترة

في الفترة (٠ ، ٢) : ق(س) اقتران جتا ⟵ ق(س) متصلا على هذه الفترة

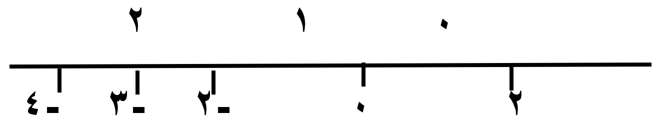
⟵ ق(س) متصل ∀ س ∈ [−١،٢] − {٠}

مثال (٢) : اذا كان ق(س) = س^{٢} × [١ − $\frac{س}{٢}$]، س ∈ [−٣،٢]

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

الحل: نعيد تعريف الاقتران من خلال اعاد تعريف $\left[١ - \frac{س}{٢}\right]$

طول الدرجة = $\frac{١}{\left|-\frac{١}{٢}\right|}$ **= ٢**



$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} ، & -٣ \le س \le -٢ \\ س^{٢} ، & -٢ < س \le ٠ \\ ٠ ، & ٠ < س \le ٢ \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق(س):

١) الاطراف : <u>**عند س = -٣**</u>

ق(-٣) = ١٨ ، $\text{نها}_{س \to -٣^{+}} ق(س) = \text{نها}_{س \to -٣^{+}} ٢س^{٢} = ١٨$

بما ان ق(-٣) $= \text{نها}_{س \to -٣^{+}} ق(س)$ ⟵ **ق(س) متصلا عند س = -٣ من جهة اليمين**

<u>**عند س = ٢**</u>

ق(٢) = ٠ ، $\text{نها}_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \text{نها}_{س \to ٢^{-}} ٠ = ٠$

بما ان ق(٢) $= \text{نها}_{س \to ٢^{-}} ق(س)$ ⟵ **ق(س) متصلا عند س=٢ من جهة اليسار**

٢) نقاط التحول: <u>**عند س = ٠**</u>

ق(٠) = ٠ ، $\text{نها}_{س \to ٠^{+}} ق(س) = \text{نها}_{س \to ٠^{+}} ٠ = ٠$

$$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \lim_{س \to 0^-} س^2 = 0$$

$$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = \lim_{س \to 0^-} ق(س) \longrightarrow \lim_{س \to 0} ق(س) = 0$$

بما ان $\lim_{س \to 0} ق(س) = ق(0)$ $\longleftarrow$ **ق(س) متصل عند س = ٠**

عند س= -٢

ق(-٢) = ٨

$$\lim_{س \to -2^+} ق(س) = \lim_{س \to -2^+} س^2 = 4 \quad ، \quad \lim_{س \to -2^-} ق(س) = \lim_{س \to -2^-} 2س^2 = 8$$

بما ان $\lim_{س \to -2^+} ق(س) \neq \lim_{س \to -2^-} ق(س)$ $\longleftarrow$ **ق(س) غير متصل عند س = -٢**

٣) الفترات الداخلية

في الفترة (-٣ ، -٢) : ق(س) كثير حدود $\longleftarrow$ ق(س) متصلا على هذه الفترة

في الفترة (-٢ ، ٠) : ق(س) كثير حدود $\longleftarrow$ ق(س) متصلا على هذه الفترة

في الفترة (٠ ، ٢) : ق(س) ثابت $\longleftarrow$ ق(س) متصلا على هذه الفترة

$\longleftarrow$ **ق(س) متصل** $\forall$ س $\in [-3، 2] -$ **{-٢}**

مثال (٣): اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 2س + 2 & ، \ -2 \leq س < 1 \\ س + 4 & ، \ 1 \leq س \leq 5 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة $[-2، 5]$

الحل : نبحث عن اتصال ق(س) عند:

١) **الاطراف**: **عند س =-٢ من اليمين**

ق(-٢) = -٢ ، $\lim\limits_{س \to -٢^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to -٢^{+}} ٢س + ٢ = -٢$

بما ان ق(-٢) = $\lim\limits_{س \to -٢^{+}} ق(س)$ $\longrightarrow$ ق(س) متصلا عند س = -٣ من جهة اليمين

عند س = ٥ من اليسار

ق(٥) = ٩ ، $\lim\limits_{س \to ٥^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٥^{-}} س + ٤ = ٩$

بما ان ق(٥) = $\lim\limits_{س \to ٥^{-}} ق(س)$ $\longrightarrow$ ق(س) متصلا عند س=٢ من جهة اليسار

٢) **نقاط التحول**: **عند س = ١**

ق(١) = ٥ ، $\lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^{+}} س + ٤ = ٥$

$\lim\limits_{س \to ١^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^{-}} ٢س + ٢ = ٤$

بما ان $\lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) \neq \lim\limits_{س \to ١^{-}} ق(س)$ $\longrightarrow$ ق(س) غير متصل عند س = ١

٣) **الفترات الداخلية**

في الفترة (-٢ ، ١) : ق(س) كثير حدود $\longrightarrow$ ق(س) متصلا على هذه الفترة

في الفترة (١ ، ٥) : ق(س) كثير حدود $\longrightarrow$ ق(س) متصلا على هذه الفترة

$\longrightarrow$ ق(س) متصل $\forall$ س $\in$ $[-٢،٥] - \{١\}$

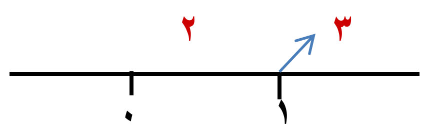
مثال (٤) : اذا كان ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢+٢س}{س} ، & -٢ \leq س < ٠ \\ ٢ ، & س = ٠ \\ [٢ + س] ، & ٠ < س \leq ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة

الحل: نعيد تعريف الاقتران من خلال اعاد تعريف $[٢ + س]$

طول الدرجة = $\frac{١}{|١|}$ **= ١**



$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢+٢س}{س} ، & -٢ \leq س < ٠ \\ ٢ ، & س = ٠ \\ ٢ ، & ٠ < س < ١ \\ ٣ ، & س = ١ \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق(س):

١) الاطراف : <u>عند س = -٢ من جهة اليمين</u>

ق(-٢) = ٠ ، $\lim\limits_{س \to -٢^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to -٢^+} \frac{س^٢+٢س}{س} = ٠$

بما ان ق(-٢) $= \lim\limits_{س \to -٢^+} ق(س)$ **⟵ ق(س) متصلا عند س = -٢ من جهة اليمين**

<u>عند س = ١</u>

ق(١) = ٣ ، $\lim\limits_{س \to ١^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^-} ٢ = ٢$

بما ان ق(١) $\neq \underset{\text{س}\leftarrow 1^-}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} \longleftarrow$ **ق(س) غير متصل عند س=١**

٢) نقاط التحول: <u>عند س = ٠</u>

ق(٠) = ٢ ، $\underset{\text{س}\leftarrow 0^+}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow 0^+}{\text{نهـــا}}\ 2 = 2$

$\underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^2+\text{س}}{\text{س}}$ **(التعويض المباشر يعطي نتيجة** $\frac{0}{0}$ **)**

$$\underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س}^2+\text{س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س(س+٢)}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نهـــا}}\ \text{س} + 2 = 2$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow 0^+}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow 0^-}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} \longleftarrow \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = 2$$

بما ان $\underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \text{ق(٠)} \longleftarrow$ **ق(س) متصل عند س = ٠**

٣) الفترات الداخلية

في الفترة (-٢ ، ٠) : ق(س) اقتران نسبي $\longleftarrow$ **ق(س) متصل على الفترة ما عدا اصفار المقام ، لكن صفر المقام س = ٠** $\notin$ **(-٢ ، ٠)** $\longleftarrow$ **ق(س) متصل على الفترة**

في الفترة (٠ ، ١) : ق(س) ثابت $\longleftarrow$ **ق(س) متصلا على هذه الفترة**

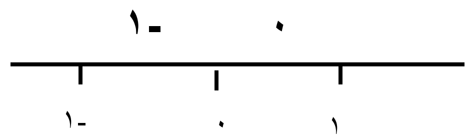
$\longleftarrow$ **ق(س) متصل** $\forall \text{س} \in [\text{٠،١})$

اتصال الاقتران على فترة (٢)

مثال (٥): اذا كان ق(س) =
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] + \text{س} & ، \ -١ \le \text{س} < ٠ \\ \sqrt{\text{س}} + \frac{٣}{٥}\text{س}^{٢} & ، \ ٠ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

<u>الحل:</u> نعيد تعريف الاقتران من خلال اعادة تعريف $[\text{س}]$

طول الدرجة = ١



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -١ + \text{س} & ، \ -١ \le \text{س} < ٠ \\ \sqrt{\text{س}} + \frac{٣}{٥}\text{س}^{٢} & ، \ ٠ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق(س):

١) الاطراف : <u>عند س = -١ من جهة اليمين</u>

ق(-١) = -٢ ، $\underset{\text{س} \to -١^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to -١^{+}}{\text{نهـا}} -١ + \text{س} = -٢$

بما ان ق(-١) $= \underset{\text{س} \to -١^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) \longrightarrow$ **ق(س) متصلا عند س = -١ من جهة اليمين**

<u>عند س = ٢ من اليسار</u>

ق(٢) = $\sqrt{٢} + \frac{١٢}{٥}$ ، $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}} + \frac{٣}{٥}\text{س}^{٢} = \sqrt{٢} + \frac{١٢}{٥}$

بما ان ق(٢) = $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) \longrightarrow$ **ق(س) غير متصل عند س=٢ من اليسار**

٢) نقاط التحول: <u>عند س = ٠</u>

ق(٠) = ٠ ، $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠ (عند البحث في مجال $\sqrt{س}$ نجد ان ٠ ∋ المجال)

$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −١

بما ان $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ⟵ **ق(س) غير متصل عند س = ٠**

٣) <u>الفترات الداخلية</u>

في الفترة (-١ ، ٠) : ق(س) كثير حدود ⟵ ق(س) متصل على الفترة

في الفترة (٠ ، ٢) : ق(س) ليس كثير حدود لكنه مجموع اقترانين متصلين:

حيث $\sqrt{س}$: ١) معرف على الفترة (٠، ٢)

٢) ما داخل الجذر متصل لانه كثير حدود

و $\frac{٣}{٥}$س^{٢} متصل لانه كثير حدود

⟵ ق(س) متصل على الفترة (٠، ٢)

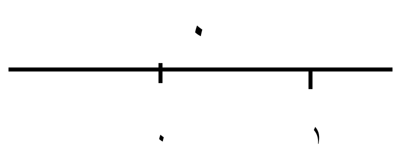
⟵ ق(س) متصل ∀س ∋ [−١، ٢] − {٠}

<u>مثال (٦)</u>: اذا كان ق(س) = { س^{٢} + $\sqrt{-س}$ ، −١ ≤ س < ٠
[س] + ٥س − ٢ ، ٠ ≤ س ≤ ١

ابحث في اتصال ق (س) على الفترة [−١، ١]

<u>الحل:</u> نعيد تعريف الاقتران من خلال اعادة تعريف [س]

طول الدرجة = ١



$$[\text{س}] = \begin{cases} ٠ \quad ، & ٠ \le \text{س} < ١ \\ ١ \quad ، & \text{س} = ١ \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \sqrt{-\text{س}} \quad ، & -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٥\text{س} - ٢ \quad ، & ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٥\text{س} - ١ \quad ، & \text{س} = ١ \end{cases}$$

نبحث في مجال $\sqrt{-\text{س}}$

+++++++++++ -------------------

معرف ٠

نبحث في اتصال ق(س):

١) الاطراف : <u>عند س = -١ من جهة اليمين</u>

ق(-١) = ٢ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow -١^{+}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow -١^{+}} ١ + \sqrt{-\text{س}} = ٢$ **(معرف عند س=-١)**

بما ان ق(-١) $= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow -١^{+}} \text{ق(س)} \longleftarrow$ **ق(س) متصلا عند س = -١ من جهة اليمين**

<u>عند س = ١ من اليسار</u>

ق(١) = ٤ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١^{-}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١^{-}} ٥\text{س} - ٢ = ٣$

بما ان ق(١) $\ne \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١^{-}} \text{ق(س)}$ $\longleftarrow$ **ق(س) غير متصل عند س=١ من اليسار**

٢) نقاط التحول: <u>عند س = ٠</u>

ق(٠) = -٢ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠^{+}} \text{ق(س)} = -٢$

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠^{-}} \text{ق(س)} = ٠$ **(عند البحث في مجال** $\sqrt{\text{س}}$ **نجد ان ٠ ∌ المجال)**

بما ان $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} ق(س)$ ⟵ ق(س) غير متصل عند س = ٠

٣) <u>الفترات الداخلية</u>

في الفترة (٠ ، ١) : ق(س) كثير حدود ⟵ ق(س) متصل على الفترة

في الفترة (-١ ، ٠) : ق(س) ليس كثير حدود لكنه مجموع اقترانين متصلين:

حيث $\sqrt{-س}$ ١) معرف على الفترة (-١، ٠)

٢) ما داخل الجذر متصل لانه كثير حدود

و $س^٢$ متصل لانه كثير حدود

⟵ ق(س) متصل على الفترة (-١، ٠)

⟵ ق(س) متصل $\forall س \in [-١، ١] - \{٠\}$

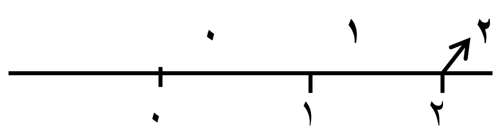
<u>مثال (٧):</u> اذا كان ل(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$

هـ(س) = $[س]$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $ل(س) \times هـ(س)$ على الفترة $[٠، ٢]$

<u>الحل:</u>

نعيد تعريف $[س]$: طول الدرجة = ١



$$[س] = \begin{cases} ٠ \quad ، \quad ٠ \le س < ١ \\ ١ \quad ، \quad ١ \le س < ٢ \\ ٢ \quad ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

$$ق(س) = ل(س) \times هـ(س) = \begin{cases} ٠ \quad ، \quad ٠ \le س < ١ \\ \frac{س^٢ - ١}{س + ٢} \quad ، \quad ١ \le س < ٢ \\ \frac{٢(س^٢ - ١)}{س + ٢} \quad ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

نبحث الاتصال عند:

١) الاطراف : عند س = ٠ من جهة اليمين

$ق(٠) = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ٠$

بما ان $ق(٠) = \lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ٠ \longrightarrow$ **ق(س) متصل عند س = ٠ من اليمين**

عند س = ٢ من جهة اليسار

$ق(٢) = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \frac{٣}{٤}$

بما ان $ق(٢) \ne \lim_{س \to ٢^-} ق(س) \longrightarrow$ **ق(س) غير متصل عند س = ٢ من اليسار**

٢) نقاط التحول : عند س = ١

$ق(١) = ٠$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٠$

$\longrightarrow \lim_{س \to ١} ق(س) = ٠$

بما ان $\lim\limits_{س \to 1} ق(س) = ق(1)$ ⟵ ق(س) متصل عند س = ١

٣) <u>الفترات الداخلية</u>

في الفترة (٠ ، ١) : ق(س) ثابت ⟵ ق(س) متصل على الفترة

في الفترة (١ ، ٢) : ق(س) اقتران نسبي ⟵ متصل ما عدا عند اصفار المقام

اصفار المقام س = -٢

بما ان س = -٢ $\not\in$ (١ ، ٢)

⟵ ق(س) متصل على الفترة (١ ، ٢)

⟵ ق(س) = $ل(س) \times هـ(س)$ متصل على $[٠،٢]$

<u>نظرية بلزانو :</u>

اذا كان ق(س) اقترانا متصلا على $[أ،ب]$ ، وكان $ق(أ) \times ق(ب) < ٠$

فانه يوجد على الاقل جـ $\in]أ،ب[$ بحيث ق(جـ) = ٠

<u>تفسر النظرية:</u>

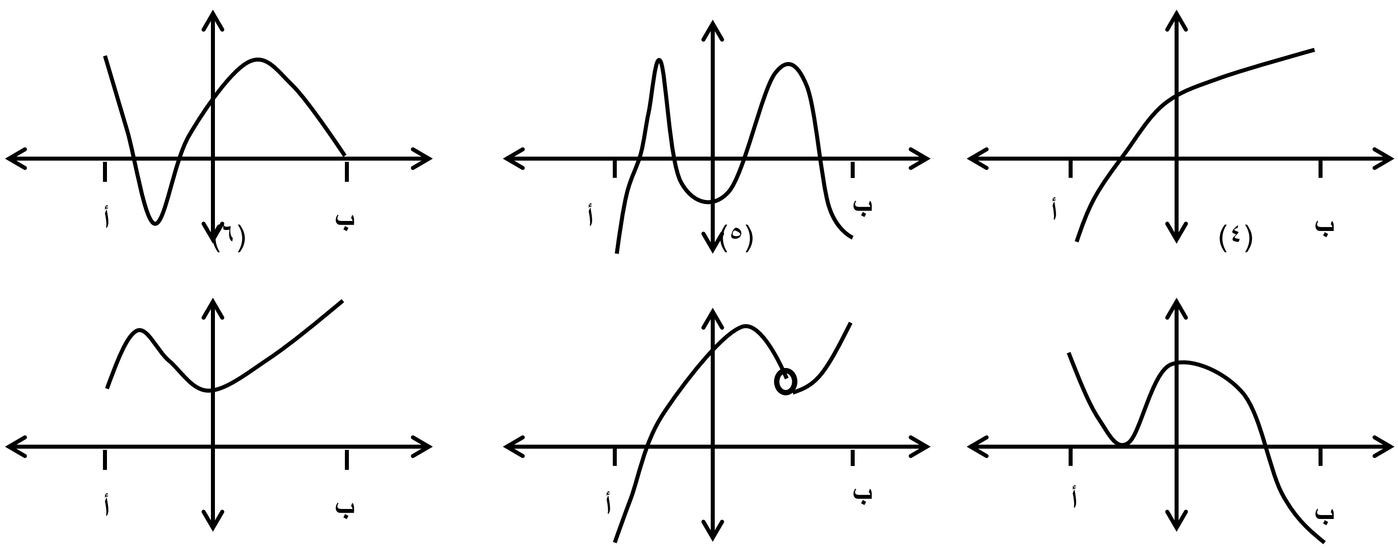
وجوود جـ بحيث ق(جـ) = ٠ ، يعني أن:

١) منحنى ق(س) يقطع محور السينات في نقطة واحدة على الاقل.

٢) العدد جـ هو احد حلول (جذور) المعادلة ق(س) = ٠ أو احد اصفار الاقتران ق(س).

<u>مثال(١):</u> أي من الاقترانات الآتية والمعرفة على [أ،ب] والممثلة بيانيا يحقق شروط نظرية بلزانو ، وكم عدد اصفار كل اقتران ؟

(٣) (٢) (١)



١) ق(س) متصل على [أ،ب] و $ق(أ) \times ق(ب) < ٠$

⟵ ق(س) يحقق شروط بلزانو على [أ،ب] (يوجد صفر واحد للاقتران)

٢) ق(س) متصل على [أ،ب] و $ق(أ) \times ق(ب) > ٠$

⟵ ق(س) لا يحقق شروط بلزانو على [أ،ب] (يوجد ٤ اصفار للاقتران)

٣) ق(س) متصل على [أ،ب] و $ق(أ) \times ق(ب) < ٠$

⟵ ق(س) يحقق شروط بلزانو على [أ،ب] (يوجد ٣ اصفار للاقتران)

٤) ق(س) متصل على [أ،ب] و $ق(أ) \times ق(ب) < ٠$

⟵ ق(س) يحقق شروط بلزانو على [أ،ب] (يوجد صفران للاقتران)

٥) ق(س) منفصل على [أ،ب]

[أ،ب]

$\longleftarrow$ ق(س) لا يحقق شروط بلزانو على (يوجد صفر واحد للاقتران)

٦) ق(س) متصل على $[أ،ب]$ و $ق(أ) \times ق(ب) > ٠$

$\longleftarrow$ ق(س) لا يحقق شروط بلزانو على $[أ،ب]$ (لا يوجد اصفار للاقتران)

ملاحظة :(عدم توفر شروط نظرية بلزانو لا يعني عدم وجود اصفار للاقتران على الفترة)

مثال (٢): اذا كان ق(س) = $س^{٣} - ٢س - ٥$

$س \in [-٣،٤]$

اثبت ان للاقتران ق(س) صفرا في هذا المجال

الحل: نبحث في شروط بلزانو:

١) ق(س) متصل $\forall س \in [-٣،٤]$ لانه كثير حدود

٢) ق(-٣) = -٢٦ < ٠

ق(٤) = ٥١ > ٠

$\longleftarrow$ $ق(أ) \times ق(ب) < ٠$ $\longleftarrow$ يوجد على الاقل جـ $\in]-٣،٤[$

بحيث ق(جـ) = ٠ $\longleftarrow$ يوجد على الاقل صفر واحد في مجاله.

مثال (٣): اذا كان ق(س) = ٥ جتاس ، $س \in [٠،\pi]$

ابين ان الاقتران يحقق شروط نظرية بلزانو في هذه الفترة ، ثم اجد قيمة جـ التي تحددها النظرية

<u>الحل:</u> نبحث في شروط بلزانو:

١) ق(س) متصل $\forall$ **س** $\in [\cdot ، \pi]$ **لانه اقتران جيب تمام**

٢) ق(٠) = ٥ > ٠

$ق(\pi)$ **= -٥ < ٠**

$\longleftarrow$ $ق(٠) \times ق(\pi) < ٠$ $\longleftarrow$ **يحقق شروط بلزانو**

$\longleftarrow$ **يوجد على الاقل جـ** $\in]\cdot ، \pi[$ **بحيث ق(جـ) = ٠**

لايجاد قيمة جـ ، نجعل ق(جـ) =٠ $\longleftarrow$ **٥ جتاجـ = ٠** $\longleftarrow$ **جتاجـ =٠**

$\longleftarrow$ **جـ =** $\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}$ $\longleftarrow$ **جـ =** $\frac{\pi}{٢} \in]\cdot ، \pi[$ **لكن جـ =** $\frac{٣\pi}{٢} \not\in]\cdot ، \pi[$

ويمكن استخدام نظرية بلزانو لايجاد قيم تقريبية لأصفار اقتران، الجذور للمعادلات ، الجذور الصماء بالاعتماد على طريقة التنصيف.

<u>مثال (٤):</u> اذا كان ق(س) = س ^{٣} **+ س − ٥ ، س** $\in [-٢ ، ٦]$

ابين ان للاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية بلزانو على هذه الفترة ، ثم أجد التقريب الثالث لقيمة جـ التي تحددها النظرية.

<u>الحل:</u> نبحث في شروط بلزانو:

١) ق(س) متصل $\forall$ **س** $\in [-٢ ، ٦]$ **لانه كثير حدود**

٢) ق(-٢) = -١٥ < ٠

ق(٦) = ٢١٧ > ٠

$\longleftarrow$ $ق(-٢) \times ق(٦) < ٠$ $\longleftarrow$ **يوجد على الاقل جـ** $\in]-٢ ، ٦[$

بحيث ق(جـ) =٠

لايجاد قيمة التقريب الثالث لصفر الاقتران ، نستخدم طريقة التنصيف:

$$\frac{-٢+٦}{٢} = ٢$$

التقريب الاول = جـ$_١$ =   ، ق(٢) = ٥

لاحظ أن $ق(٢) \times ق(٦) > ٠$ **وان** $ق(٢) \times ق(-٢) < ٠$

$\longleftarrow$ **من نظرية بلزانو جـ$_١$** $\in]-٢،٢[$

التقريب الثاني = جـ$_٢$ = $\frac{-٢+٢}{٢} = ٠$ **، ق(٠) = -٥**

$ق(٠) \times ق(-٢) > ٠$ **وأن** $ق(٠) \times ق(٢) < ٠$

$\longleftarrow$ **من نظرية بلزانو جـ$_٢$** $\in]٠،٢[$

التقريب الثالث = جـ$_٣$ = $\frac{٠+٢}{٢} = ١$

<u>مثال(٥):</u> استخدم نظرية بلزانو لايجاد التقريب الثاني للعدد $\sqrt{٥}$

<u>الحل:</u> نفرض أن جـ = $\sqrt{٥}$ $\longrightarrow$ $جـ^{٢} = ٥ \longrightarrow جـ^{٢} - ٥ = ٠$

نفرض أن ق(س) = $س^{٢} - ٥$

١) ق(س) متصل $\forall س \in ح$ **لأنه كثير حدود**

٢) نبحث عن فترة تحقق شرط بلزانو الثاني

ق(١) = -٤

ق(٢) = -١

ق(٣) = ٤

$\longleftarrow$ **ق(س) المتصل يحقق شروط بلزانو على الفترة** $[٢،٣]$

$\longleftarrow$ **يوجد على الاقل جـ** $\in]٢،٣[$ **بحيث ق(جـ) = ٠**

جـ$_١$ = $\frac{٢+٣}{٢} =$ **٢.٥ ، ق(٢.٥) = ٦.٢٥ - ٥ = ١.٢٥ > ٠**

$\longleftarrow$ **جـ$_١$** $\in]٢،٢,٥[$

جـ$_٢$ = $\frac{٢+٢و٥}{٢} = \frac{٤و٥}{٢} = ٢و٢٥$ **التقريب الثاني**

وبما اننا فرضنا ان جـ = $\sqrt{٥}$ **من بدايه الحل** $\longrightarrow$ **التقريب الثاني لـ** $\sqrt{٥}$ **=٢.٢٥**

<u>مثال (٦)</u>: اذا كان ق(س) اقترانا متصلا على [-٣،٥] ، وكان

ق(-٣) =٢ ، ق(-١) = -١ ، ق(٠) =٠ ، ق(٢) = -٣

ق(٤) = -١ ، ق(٥) = ١٠

ما هو اقل عدد من الاصفار التي يمكن وجودها للاقتران ق(س) على الفترة [-٣،٥]

<u>الحل :</u>

+	-	٠	-	-	+
-٣	-١	٠	٢	٤	٥

في الفترة [-٣،-١] تتحقق شروط بلزانو ⟵ لا بد من وجود على الاقل صفر للاقتران ∋]-٣،-١[

في الفترة [٤،٥] تتحقق شروط بلزانو ⟵ لا بد من وجود على الاقل صفر للاقتران ∋]٤،٥[

وايضا ق(٠) =٠

⟵ يوجد على الاقل ٣ أصفار للاقتران

<u>ملاحظة</u> : (قد يوجد عدد اصفار اكثر من ٣ ، لكن التي تحددها نظرية بلزانو على الاقل ٣)

<u>مثال (٧):</u> اذا كان ق(س) = س ^{٣} – ٢س ^{٢} + ٢ ، س ∋ [-٢،٤]

استخدم نظرية بلزانو لايجاد التقريب الثالث لصفر الاقتران.

<u>الحل:</u> ١) ق(س) كثير حدود متصل على ح ⟵ متصل على [-٢،٤]

٢) ق(-٢) = -١٤ < ٠

ق(٤) = ٣٤ > ٠

⟵ ق(-٢) × ق(٤) < ٠ ⟵ تتحقق شروط بلزانو

⟵ يوجد على الاقل جـ ∈]-٢،٤[بحيث ق(جـ) = ٠

جـ١ = $\frac{-٢+٤}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ ، ق(١) = ١ > ٠

⟵ تتحقق شروط بلزانو في الفترة [-٢،١] ⟵ يوجد على الاقل جـ ∈]-٢،١[

بحيث ق(جـ) = ٠

جـ٢ = $\frac{-٢+١}{٢} = \frac{-١}{٢}$ ، ق($\frac{-١}{٢}$) = $\frac{١١}{٨}$ > ٠

⟵ تتحقق شروط بلزانو في الفتر [-٢، $\frac{-١}{٢}$] ⟵ يوجد على الاقل جـ ∈]-٢، $\frac{-١}{٢}$[

بحيث ق(جـ) = ٠

جـ٣ = $\frac{-٢+\frac{-١}{٢}}{٢} = -١و٢٥$ التقريب الثالث

الوحدة الرابعة : التفاضل

معدل التغير (متوسط التغير) :

تعريف: اذا كان ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ الى $س_٢$ ، $س_١ \neq س_٢$ فإن:

١) مقدار التغير في س يساوي $س_٢ - س_١$ ونرمز له بالرمز Δس ويُقرأ دلتا س.

٢) مقدار التغير في ص يساوي $ص_٢ - ص_١$ ونرمز له بالرمز Δص ويُقرأ دلتا ص.

٣) متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) يساوي $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

مثال(١): اذا كان ق(س) = $٢س^٣ - ٢س$ جد متوسط التغير في الاقتران ق اذا تغيرت س من (-٢) الى (١).

الحل :

$س_١ = -٢$

$ق(س_١) = ٢(-٢)^٣ - ٢(-٢)$

$= -١٦ - -٤ = -١٢$

$س_٢ = ١$

$ق(س_٢) = ٢(١)^٣ - ٢(١)$

= صفر

$$\Delta ق(س) = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ^-١٢}{١ - ^-٢} = \frac{١٢}{٣} = ٤$$

مثال (٢): اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٤س & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ جد معدل التغير للاقتران ق في الفترة [١ ، ٣]

الحل: $س_١ = ١$ ، $س_٢ = ٣$

$ق(س_١) = ١$ ، $ق(س_٢) = ١٢$

$$\Delta ق(س) = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{١٢ - ١}{٢} = \frac{١١}{٢}$$

مثال (٣): اذا كان ق(س) = { [س +٠.١] ، س > ٠
| س – ١ | ، س $\leq$ ٠

جد معدل التغير للاقتران ق في الفترة [-٢ ، ٥]

الحل: س$_١$ = -٢ ، س$_٢$ = ٥

[س + ٠.١] : ٥

٥ ٦

$$\Delta ق(س) = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٥) - ق(-٢)}{٥ - ^-٢} = \frac{٥ - ٣}{٧} = \frac{٢}{٧}$$

مثال (٤): اذا كان ق(س) = { [س – ١] ، س $\leq$ ٢
| ٢س + ٥ | ، س > ٢

جد معدل التغير في ق ، اذا كان Δس = ٥ ، س$_١$ = ٠

الحل: Δس = س$_٢$ – س$_١$

٥ = س$_٢$ – ٠ $\longleftarrow$ س$_٢$ = ٥

[س -١] : ٠ -١

١ ٠ -١

| ٢س + ٥ | : (٢س +٥) - (٢س +٥)

-٢.٥

$$\Delta ق(س) = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٥) - ق(٠)}{٥ - ٠} = \frac{١٥ - ^-١}{٧} = \frac{١٦}{٥}$$

مثال (٥): اذا كان ق(س) = $أس^{٢} - ٣س + ٤$ ، $س \in ع$

ومعدل تغير ق في [١ ، ٣] يساوي ٣ ، جد قيمة الثابت أ .

الحل : $س_{١} = ١$ $س_{٢} = ٣$

$ق(س_{١}) = أ - ٣ + ٤$ $ق(س_{٢}) = ٩أ - ٩ + ٤$

$= أ + ١$ $= ٩أ - ٥$

$$\Delta ق(س) = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{٩أ - ٥ - أ - ١}{٢} = \frac{٨أ - ٦}{٢}$$

$٣ = \frac{٨أ - ٦}{٢} \longrightarrow ٦ = ٨أ - ٦ \longrightarrow ١٢ = ٨أ$

$\longrightarrow أ = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

مثال (٦): اذا كان معدل التغير لـ ق في الفترة [٣ ، ب] يساوي ٢ ، وكان مقدار التغير في ق يساوي ٤ فما قيمة الثابت ب .

الحل: $س_{١} = ٣$ $س_{٢} = ب$

مقدار التغير في ق = $\Delta ق(س) = ق(ب) - ق(٣) = ٤$

$$\Delta ق(س) = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(ب) - ق(٣)}{ب - ٣} = \frac{٤}{ب - ٣}$$

$٢ = \frac{٤}{ب - ٣} \longrightarrow ٢(ب - ٣) = ٤ \longrightarrow ٢ب - ٦ = ٤$

$\longrightarrow ٢ب = ١٠ \longrightarrow ب = ٥$

مثال (٧) : اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٢$ ، جد معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من ٣ الى ٣+ هـ

الحل: معدل التغير = $\frac{ق(٣+هـ) - ق(هـ)}{٣+هـ-٣}$

$$= \frac{(٣+هـ)^{٢} - ٢ - (٩ - ٢)}{هـ} = \frac{٩ + ٦هـ + هـ^{٢} - ٢ - ٧}{هـ} = \frac{هـ(٦ + هـ)}{هـ} = ٦ + هـ$$

مثال (٨): اذا كان معدل التغير للاقتران ق في [-١ ، ٣] يساوي -٤ ، جد معدل تغير الاقتران هـ حيث هـ(س) = $٢ق(س) - ٣س^{٢}$ في الفترة نفسها.

الحل :

ق

معدل التغير = $\frac{ق(٣)-ق(-١)}{٤}$

$-٤ = \frac{ق(٣)-ق(-١)}{٤}$

$ق(٣) - ق(-١) = -١٦$

هـ

معدل التغير = $\frac{هـ(٣)-هـ(-١)}{٤}$

$= \frac{٢ق(٣)-٢٧-[٢ق(-١)-٣]}{٤}$

$= \frac{٢(ق(٣)-ق(١))-٢٤}{٤}$

$= \frac{(٢\times-١٦)-٢٤}{٤} = \frac{-٣٢-٢٤}{٤} = \frac{-٥٦}{٤} = -١٤$

مثال (٩): اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، ١ \leq س < ٤ \\ ٦س+٢ & ، ٤ \leq س \leq ٨ \end{cases}$

جد معدل التغير للاقتران ق اذا كانت $س_{١} = ٣$ ، $\Delta س = ٢$

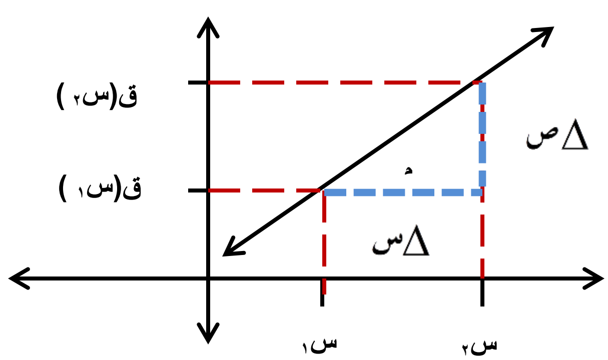
الحل: $\Delta س = س_{٢} - س_{١}$

$٢ = س_{٢} - ٣ \longrightarrow س_{٢} = ٥$

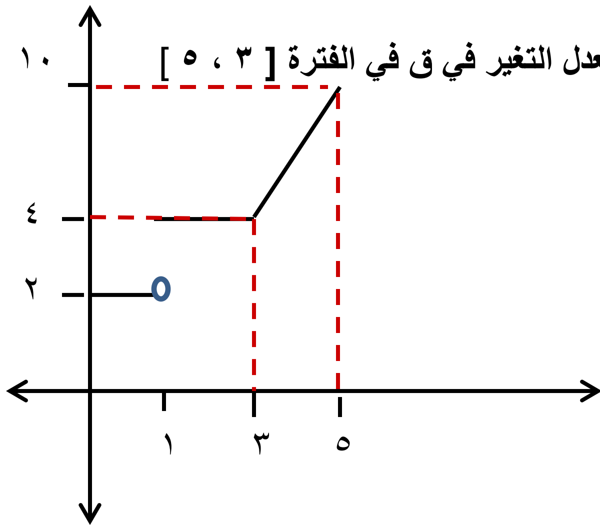
معدل التغير $= \frac{ق(٥)-ق(٣)}{٢} = \frac{٦(٥)+٢-(٩-٣)}{٢} = \frac{٣٢-٦}{٢} = ١٣$

المعنى الهندسي لمعدل التغير

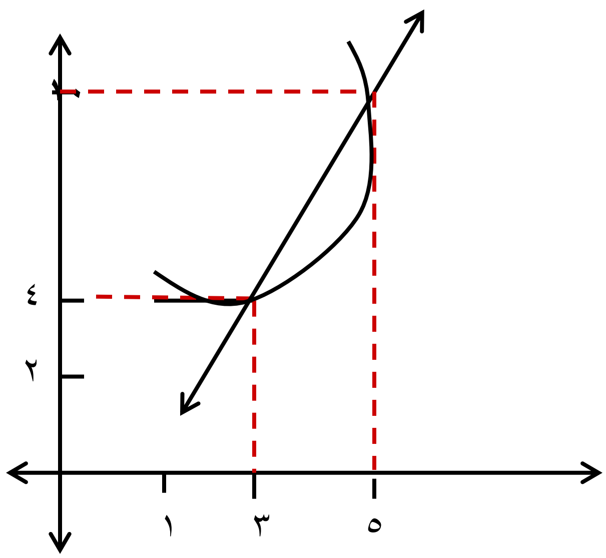
تعريف : معدل التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_{١}$ الى $س_{٢}$ يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين ($س_{١}$ ، ق($س_{١}$)) ، ($س_{٢}$ ، ق($س_{٢}$)) ، وتسمى الزاوية (م) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع محور السينات الموجب بزاوية ميل المستقيم القاطع ويكون (ظا(م) = ميل القاطع)



<u>مثال (١٠)</u>: **اعتمادا على الشكل المجاور جد معدل التغير في ق في الفترة [٣ ، ٥]**



معدل التغير = $\dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢)-\text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢-\text{س}_١} = \dfrac{١٠-٤}{٥-٣} = \dfrac{٦}{٢} = ٣$



<u>مثال (١١):</u>

جد ميل القاطع لمنحنى ق في الشكل

ميل القاطع = $\dfrac{\text{ص}_٢-\text{ص}_١}{\text{س}_٢-\text{س}_١} = \dfrac{١٠-٤}{٥-٣} = \dfrac{٦}{٢} = ٣$

<u>المعنى الفيزيائى لمعدل التغير</u>:

اذا كانت ف = ق(ن) ، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم ، ن الزمن ، فان متوسط التغير فى المسافة عندما تتغير ن من ن$_١$ الى ن$_٢$ هو $\dfrac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \dfrac{\text{ف}_٢-\text{ف}_١}{\text{ن}_٢-\text{ن}_١} = \dfrac{\text{ق}(\text{ن}_٢)-\text{ق}(\text{ن}_١)}{\text{ن}_٢-\text{ن}_١}$

ويسمى السرعة المتوسطة في الفترة [ن$_١$ ، ن$_٢$]

<u>مثال (١٢)</u> : اذا تحرك جسيم على خط مستقيم حسب الاقتران ف(ن) = $٢ن^٢ + ن$

حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [٢ ، ٣]

<u>الحل:</u>

$ن_١ = ٢$ $ن_٢ = ٣$

ف($ن_١$) = ١٠ ف($ن_٢$) = ٢١

السرعة المتوسطة = $\frac{٢١-١٠}{٣-٢} = ١١$ م/ث

<u>مثال(١٣):</u> يتحرك جسم في خط مستقيم، بحيث أن بعده ف بالأمتار عن النقطة م بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = $ن^٢ + ٨ن$ ، جد:

١) السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣]

٢) إذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، أ] = ١٣ م/ ث، جد قيمة أ.

<u>الحل:</u> $ن_١ = ٠$ $ن_٢ = ٣$

السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ق(٣)-ق(٠)}{٣-٠} = \frac{٣^٢+٨(٣)-٠}{٣}$

$= \frac{٩+٢٤}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$ م/ث

٢) ١٣ = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ق(أ)-ق(١)}{أ-١} = \frac{أ^٢+٨(أ)-(١+٨)}{أ-١} = \frac{أ^٢+٨أ-٩}{أ-١}$

$$١٣(أ-١) = أ^٢ + ٨أ - ٩$$

$$١٣أ - ١٣ = أ^٢ + ٨أ - ٩$$

$$أ^٢ - ٥أ + ٤ = ٠ \longrightarrow (أ-٤)(أ-١) = ٠$$

أ = ١ (مرفوضة لانها طرف فترة) ، أ = ٤ ث

<u>مثال(١٢)</u>: اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ ، وكان الاقتران

هـ (س) = ق (س) – س ، جد معدل التغير للاقتران هـ في نفس الفترة .

الحل : ق

معدل التغير = $٤ = \frac{ق(٣)-ق(١)}{٣-١}$

$$٨ = ق(٣) - ق(١)$$

هـ

معدل التغير = $\frac{هـ(٣)-هـ(١)}{٣-١}$

$$= \frac{ق(٣)-٣-(ق(١)-١)}{٢}$$

$$= \frac{ق(٣)-٣-ق(١)+١}{٢}$$

$$= \frac{ق(٣)-ق(١)-٢}{٢} = \frac{٨-٢}{٢} = ٣$$

<u>مثال (١٣)</u>:

مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من ١ سم الى ٣ سم ، جد معدل التغير في حجم المكعب.

الحل : حجم المكعب = $س^{٣}$ **(فرضا ان طول ضلع المكعب = س)**

معدل التغير = $\frac{ع(٣)-ع(١)}{٣-١} = \frac{٢٧-١}{٢} = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$

<u>المشتقة الاولى باستخدام التعريف :</u>

<u>تعريف</u> : اذا كان ق(س) معرفا عند $س_١$ في مجاله ، وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_١+هـ)-ق(س_١)}{هـ}$ **موجودة**

فإن قيمة هذه النهاية تسمى المشتقة الاولى للاقتران عند $س_١$ ، ويرمز لها بأحد الرموز الاتية:

$ق'(س_١)$ أو $ص' \Big|_{س = س_١}$ أو $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = س_١}$

ويمكن كتابتها على الصورة : $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

<u>مثال(١)</u> : جد المشتقة الاولى للاقتران ق(س) = ٢س + ٣ باستخدام التعريف.

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ع}+٣-(\text{٢س}+٣)}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ع}+٣-\text{٢س}-٣}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ع}-\text{٢س}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} ٢ = ٢$$

<u>مثال(٢)</u> : جد المشتقة الاولى للاقتران ق(س) = ١ – ٢س^{٢} باستخدام التعريف.

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{٢ع}^{٢}-(١-\text{٢س}^{٢})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{٢ع}^{٢}-١+\text{٢س}^{٢}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{٢ع}^{٢}+\text{٢س}^{٢}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{-٢(\text{ع}^{٢}-\text{س}^{٢})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{-٢(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} -٢(\text{ع}+\text{س}) = -٢(\text{٢س}) = -\text{٤س}$$

<u>مثال(٣)</u> : جد المشتقة الاولى للاقتران ق(س) = ٤س^{٢} – ٣ باستخدام التعريف، ثم جد ق$'$(٣)

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤ع}^{٢}-٣-(\text{٤س}^{٢}-٣)}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤ع}^{٢}-٣-\text{٤س}^{٢}+٣}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤ع}^{٢}-\text{٤س}^{٢}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٤(\text{ع}^{٢}-\text{س}^{٢})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٤(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} ٤(\text{ع}+\text{س}) = ٤(\text{٢س}) = \text{٨س}$$

$$\text{ق}'(٣) = ٨ \times ٣ = ٢٤$$

<u>مثال(٤)</u> : جد المشتقة الاولى للاقتران ق(س) = ٢س ^٣^ + ٣ باستخدام التعريف،

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ع}^{٣}+٣-(٢\text{س}^{٣}+٣)}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ع}^{٣}+٣-٢\text{س}^{٣}-٣}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ع}^{٣}-٢\text{س}^{٣}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{ع}^{٣}-\text{س}^{٣})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}^{٢}+\text{عس}+\text{س}^{٢})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} ٢(\text{ع}^{٢}+\text{عس}+\text{س}^{٢}) = ٣\text{س}^{٢}$$

<u>مثال(٥)</u> : اذا كان لاقتران ق(س) = س + $\sqrt{\text{س}}$ جد ق $'$(٤) باستخدام التعريف،

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}+\sqrt{\text{ع}}-(\text{س}+\sqrt{\text{س}})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}-\text{س}+\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}-\text{س}}{\text{ع}-\text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}} = ١ + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{س}})}{(\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{س}})(\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{س}})}$$

$$= ١ + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{س}}} = ١ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{ق}'(٤) = ١ + \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = ١ + \frac{١}{٤} = ١\tfrac{١}{٤}$$

<u>مثال(٦)</u> : اذا كان لاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{١-\text{س}}$ جد ق $'$(س) باستخدام التعريف،

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}^{٢}}{١-\text{ع}}-\frac{\text{س}^{٢}}{١-\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}^{٢}(١-\text{س})-\text{س}^{٢}(١-\text{ع})}{(١-\text{ع})(١-\text{س})}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢}(١-\text{س})-\text{س}^{٢}(١-\text{ع})}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢}-\text{ع}^{٢}\text{س}-\text{س}^{٢}+\text{عس}^{٢}}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢}-\text{ع}^{٢}\text{س}-\text{س}^{٢}+\text{عس}^{٢}}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢}-\text{س}^{٢}}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{ع}^{٢}\text{س}+\text{عس}^{٢}}{(\text{ع}-\text{س})(١-\text{ع})(١-\text{س})}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع-س)(ع+س)}{(ع-س)(١-ع)(١-س)} + \lim_{ع \to س} \frac{-عس(ع-س)}{(ع-س)(١-ع)(١-س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع+س)}{(١-ع)(١-س)} + \lim_{ع \to س} \frac{-ع س}{(١-ع)(١-س)}$$

$$= \frac{٢س}{(١-س)^٢} + \frac{-س^٢}{(١-س)^٢} = \frac{٢س-س^٢}{(١-س)^٢}$$

<u>مثال(٧)</u> : اذا كان ق(س) = (س – أ) ل(س) ، حيث ل متصل عند س = أ باستخدام التعريف

بين أن $ق'(أ) = ل(أ)$ **حيث أ ثابت**

<u>الحل</u>: $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع-أ)ل(ع)-(س-أ)ل(س)}{ع-س}$

$$ق'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{(ع-أ)ل(ع)-(أ-أ)ل(أ)}{ع-أ} = \lim_{ع \to أ} \frac{(ع-أ)ل(ع)}{ع-أ} = \lim_{ع \to أ} ل(ع) = ل(أ)$$

<u>مثال (٨)</u> : اذا كان $ق'(٣) = ٥$ **جد** $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+٤هـ)-ق(٣)}{٥هـ}$

<u>الحل</u> : نفرض أن م = ٤ هـ $\longleftarrow$ $هـ = \frac{م}{٤}$

عندما هـ $\longleftarrow$ **٠ فان م** $\longleftarrow$ **٠**

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+٤هـ)-ق(٣)}{٥هـ} = \lim_{م \to ٠} \frac{ق(٣+م)-ق(٣)}{٥ \times \frac{م}{٤}}$$

$$\frac{٤}{٥} \lim_{م \to ٠} \frac{ق(٣+م)-ق(٣)}{م} = \frac{٤}{٥} \times ق'(٣) = \frac{٤}{٥} \times ٥ = ٤$$

<u>مثال (٩)</u> : اذا كان $\text{ق}'(\text{٠}) = {}^{-}\text{٦}$ جد $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٠}) - \text{ق}(\text{٥هـ})}{\text{٢هـ}}$

<u>الحل</u> :

$$\text{ق}'(\text{٠}) = \underset{\text{م}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٠}+\text{م}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{م}} = \underset{\text{م}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{م}}$$

$$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٠}) - \text{ق}(\text{٥هـ})}{\text{٢هـ}} = - \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٥هـ}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{٢هـ}}$$

نفرض أن م = ٥ هـ $\longrightarrow$ $\text{هـ} = \dfrac{\text{م}}{\text{٥}}$

عندما هـ $\longrightarrow$ **٠ فان م** $\longrightarrow$ **٠**

$$= {}^{-}\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{٢}\times\frac{\text{م}}{\text{٥}}} = \dfrac{{}^{-}\text{٥}}{\text{٢}} \underset{\text{م}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{م}} = \dfrac{{}^{-}\text{٥}}{\text{٢}} \times \text{ق}'(\text{٠})$$

$$= \dfrac{{}^{-}\text{٥}}{\text{٢}} \times {}^{-}\text{٦} = {}^{-}\text{٥} \times {}^{-}\text{٣} = \text{١٥} = \text{٤}$$

<u>مثال (١٠)</u> : اذا كان $\text{ق}'(\text{٤}) = \text{٦}$ جد $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٤}-\text{٢هـ}) - \text{ق}(\text{٤}+\text{٥هـ})}{\text{هـ}}$

<u>الحل</u> :

$$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٤}-\text{٢هـ}) - \text{ق}(\text{٤}+\text{٥هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٤}-\text{٢هـ}) - \text{ق}(\text{٤}+\text{٥هـ}) + \text{ق}(\text{٤}) - \text{ق}(\text{٤})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٤}+{}^{-}\text{٢هـ}) - \text{ق}(\text{٤})}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٤}) - \text{ق}(\text{٤}+\text{٥هـ})}{\text{هـ}}$$

نفرض أن م = -٢ هـ $\longrightarrow$ $\text{هـ} = \dfrac{\text{م}}{{}^{-}\text{٢}}$

عندما هـ $\longrightarrow$ **٠ فان م** $\longrightarrow$ **٠**

نفرض أن م = ٥هـ $\longrightarrow$ $\text{هـ} = \dfrac{\text{م}}{\text{٥}}$

عندما هـ $\longrightarrow$ **٠ فان م** $\longrightarrow$ **٠**

$$= \lim_{\text{م} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{٤}+\text{م})-\text{ق}(\text{٤})}{\frac{\text{م}}{-\text{٢}}} + {}^{-}\lim_{\text{م} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{٤}+\text{م})-\text{ق}(\text{٤})}{\frac{\text{م}}{\text{٥}}}$$

$$= {}^{-}\text{٢}\,\text{ق}'(\text{٤}) - \text{٥}\,\text{ق}'(\text{٤})$$

$$= {}^{-}\text{٢}\times\text{٦} - \text{٥}\times\text{٦} = {}^{-}\text{١٢} - \text{٣٠} = {}^{-}\text{٤٢}$$

المشتقة الاولى لاقتران متعدد القاعدة باستخدام التعريف:

تعريف (١) : اذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ ، ب] فان ق(س) غير قابل للاشتقاق على اطراف الفترة [أ ، ب] ، ويكون قابل للاشتقاق على الفترة]أ،ب[اذا كان قابلا للاشتقاق عند كل نقطة فيها.

تعريف (٢): اذا كان الاقتران ق(س) معرفا عند س = س$_1$ ، وكانت س$_1$ نقطة تجول في اقتران متعدد القاعدة فان:

$$\text{ق}'(\text{س}_1)^{+} = \lim_{\text{س} \to 0^{+}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$ **(مشتقة ق(س) من يمين س$_1$)**

$$\text{ق}'(\text{س}_1)^{-} = \lim_{\text{س} \to 0^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$ **(مشتقة ق(س) من يسار س$_1$)**

وعندما تكون $\text{ق}'(\text{س}_1)^{+} = \text{ق}'(\text{س}_1)^{-} = \text{ل}$ **فان ق(س) قابل للاشتقاق عند** س$_1$ وتكون $\text{ق}'(\text{س}_1) = \text{ل}$

تعميم : اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فان ق(س) قابل للاشتقاق

<u>مثال (١)</u>: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س & ، \ س > ٢ \\ ٤ & ، \ س < ٢ \end{cases}$

باستخدام تعريف المشتقة الاولى جد $ق^{\prime}(٢)$

<u>الحل</u>: س = ٢ نقطة تحول

$$ق^{\prime}(٢)^{+} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{٢(٢+هـ) - ٢(٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{٤+٢هـ-٤}{هـ} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{٢هـ}{هـ} = \lim_{س \to ٠^{+}} ٢ = ٢$$

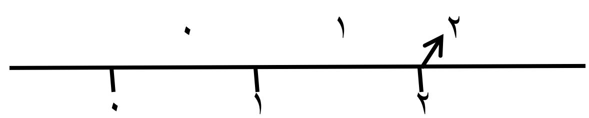
$$ق^{\prime}(٢)^{-} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{٤-٤}{هـ} = \lim_{س \to ٠^{-}} ٠ = ٠$$

وبما أن $ق^{\prime}(٢)^{+} \neq ق^{\prime}(٢)^{-} \longrightarrow ق^{\prime}(٢)$ **غير موجودة**

أو ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س =٢

<u>مثال (٢)</u>: اذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] ، ابحث في قابلية الاشتقاق ل ق (س) عند س = ١

<u>الحل</u>: نقوم بإعادة تعريف [س]



ق(س) = $\begin{cases} ٠ & ، \ ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، \ س = ٢ \end{cases}$

$$\text{ق}'(1)^{+} = \lim_{\text{س}\to 0^{+}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ})-\text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{س}\to 0^{+}} \frac{1-1}{\text{هـ}} = \lim_{\text{س}\to 0^{+}} 0 = 0$$

$$\text{ق}'(1)^{-} = \lim_{\text{س}\to 0^{-}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ})-\text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{س}\to 0^{-}} \frac{0-1}{\text{هـ}} = \lim_{\text{س}\to 0^{-}} \frac{-1}{\text{هـ}} = \frac{-1}{0}$$ غير موجودة

وبما أن $\text{ق}'(1)^{+} \neq \text{ق}'(1)^{-} \longrightarrow \text{ق}'(1)$ غير موجودة

أو ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س =١

<u>مثال (٣)</u> : اذا كان ق(س) =

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 2\sqrt{\text{س}+3} & ، \quad -1 \leq \text{س} \leq 1 \\ \frac{4}{\text{س}} & ، \quad 1 \leq \text{س} \leq 4 \end{cases}$$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ استخدام تعريف المشتقة.

الحل: ١) عند اطراف الفترة الاقتران ق(س) غير قابل للاشتقاق.

٢) نبحث قابلية اشتقاق ق(س) عند س = ١ (نقطة التحول)

$$\text{ق}'(1)^{+} = \lim_{\text{ع}\to 1^{+}} \frac{\text{ق(ع)}-\text{ق}(1)}{\text{ع}-1} = \lim_{\text{ع}\to 1^{+}} \frac{\frac{4}{\text{ع}}-\frac{4}{1}}{\text{ع}-1} = \lim_{\text{ع}\to 1^{+}} \frac{\frac{4-4\text{ع}}{\text{ع}}}{\text{ع}-1} = \lim_{\text{ع}\to 1^{+}} \frac{4-4\text{ع}}{\text{ع}(\text{ع}-1)}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to 1^{+}} \frac{4(1-\text{ع})}{\text{ع}(\text{ع}-1)} = \lim_{\text{ع}\to 1^{+}} \frac{-4}{\text{ع}} = -4$$

$$\text{ق}'(1)^{-} = \lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{\text{ق(ع)}-\text{ق}(1)}{\text{ع}-1} = \lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{2\sqrt{\text{ع}+3}-2\sqrt{1+3}}{\text{ع}-1} = \lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{2\sqrt{\text{ع}+3}-2(2)}{\text{ع}-1}$$

$$= 2\lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{\sqrt{\text{ع}+3}-2}{\text{ع}-1} = 2\lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{\sqrt{\text{ع}+3}-2}{\text{ع}-1} \times \frac{\sqrt{\text{ع}+3}+2}{\sqrt{\text{ع}+3}+2} = 2\lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{\text{ع}+3-4}{(\text{ع}-1)(\sqrt{\text{ع}+3}+2)}$$

$$= 2\lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{\text{ع}-1}{(\text{ع}-1)(\sqrt{\text{ع}+3}+2)} = 2\lim_{\text{ع}\to 1^{-}} \frac{1}{(\sqrt{\text{ع}+3}+2)} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

وبما أن $\text{ق}'(١)^{+} \neq \text{ق}'(١)^{-} \longrightarrow \text{ق}'(١)$ غير موجودة

أو ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س =١

٣) نجد $\text{ق}'(\text{س})$ على الفترات المفتوحة باستخدام تعريف المشتقة

<u>في الفترة (-١ ، ١)</u> :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\sqrt{\text{ع}+٣}-٢\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{ع}-\text{س}} = ٢\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}+٣}-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= ٢\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}+٣}-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣}}{\sqrt{\text{ع}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣}} = ٢\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}+٣-(\text{س}+٣)}{(\text{ع}-\text{س})(\sqrt{\text{ع}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣})}$$

$$= ٢\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}+٣-\text{س}-٣}{(\text{ع}-\text{س})(\sqrt{\text{ع}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣})} = ٢\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}-\text{س}}{(\text{ع}-\text{س})(\sqrt{\text{ع}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣})}$$

$$= ٢\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١}{(\sqrt{\text{ع}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣})} = ٢\times\frac{١}{(\sqrt{\text{س}+٣}+\sqrt{\text{س}+٣})} = ٢\times\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+٣}} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٣}}$$

<u>في الفترة (١ ، ٤):</u>

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{٤}{\text{ع}}-\frac{٤}{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{٤\text{س}-٤\text{ع}}{\text{ع}\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}} = {}^{-}٤\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}-\text{س}}{\text{ع}\text{س}(\text{ع}-\text{س})}$$

$$= {}^{-}٤\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١}{\text{ع}\text{س}} = {}^{-}٤\times\frac{١}{\text{س}^{٢}} = \frac{{}^{-}٤}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٣}} & ،\quad {}^{-}١ < \text{س} < ١ \\ \frac{{}^{-}٤}{\text{س}^{٢}} & ،\quad ١ < \text{س} < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ،\quad \text{س} = -١ ، ٤ ، ١ \end{cases}$$

<u>مثال (٤) :</u>

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ،\quad ١^{-} \leq س < ١ \\ ٣س - ١ & ،\quad ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

أوجد $ق^{\prime}(س)$ باستخدام تعريف المشتقة.

<u>الحل:</u> ١) عند نقاط التحول : (س = ١)

$$ق^{\prime}(١)^{+} = \underset{ع \to ١^{+}}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{+}}{نهـا} \frac{٣ع - ١ - ٢}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{+}}{نهـا} \frac{٣ع - ٣}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{+}}{نهـا} \frac{٣(ع - ١)}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{+}}{نهـا} ٣ = ٣$$

$$ق^{\prime}(١)^{-} = \underset{ع \to ١^{-}}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{-}}{نهـا} \frac{ع^{٢} - ١}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{-}}{نهـا} \frac{(ع - ١)(ع + ١)}{ع - ١} = \underset{ع \to ١^{-}}{نهـا} ع + ١ = ٢$$

وبما أن $ق^{\prime}(١)^{+} \neq ق^{\prime}(١)^{-} \longrightarrow ق^{\prime}(١)$ **غير موجودة**

أو ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س =١

٢) عند أطراف الفترة : ق(س) غير قابل للاشتقاق عند اطراف الفترة (عند س = -١ ، ٣)

٣) عند الفترات المفتوحة :

<u>الفترة (-١ ، ١) :</u>

$$ق^{\prime}(س) = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} ع + س = ٢س$$

<u>الفترة (١ ، ٣):</u>

$$ق^{\prime}(س) = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{٣ع - ١ - (٣س - ١)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{٣ع - ١ - ٣س + ١}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} \frac{٣(ع - س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـا} ٣ = ٣$$

$$ق^{\prime}(س) = \begin{cases} ٢س & ،\quad ١^{-} < س < ١ \\ ٣ & ،\quad ١ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ،\quad س = -١ ، ٣ ، ١ \end{cases}$$

قواعد الاشتقاق:

قاعدة (١): اذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ $\in$ ح ، فإن $ق^{\prime}(س) =$ صفر ، لجميع قيم س $\in$ ح

مثال (١) : جد $ق^{\prime}(س)$ لكل مما يأتي:

١) ق(س) = ٥ ٢) ق(س) = جتاπ

الحل: ١) $ق^{\prime}(س)$ = ٠

٢) ق(س) = جتاπ = -١ $\longleftarrow$ $ق^{\prime}(س)$ = ٠

قاعدة (٢) : اذا كان ق(س) = س ، فان $ق^{\prime}(س)$ = ١

قاعدة (٣) : اذا كان ق(س) قابلا للاشتقاق وكان جـ $\in$ ح ، فإن

ك(س) = جـ ق(س) قابل للاشتقاق وتكون $ك^{\prime}(س) = جـ ق^{\prime}(س)$

مثال(٢) : اذا كان ق(س) = ٥ س ، جد

الحل: $ق^{\prime}(س) = ٥ \times ١ = ٥$

نظرية : اذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، فإن $ق^{\prime}(س) = ن س^{ن-١}$

بحيث $ن \in ص$ ، $س \neq ٠$

مثال (٣) : اذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٢س + ٥$ جد $ق^{\prime}(س)$ ثم $ق^{\prime}(-٢)$

الحل :- $ق^{\prime}(س) = ٣س^{٢} - ٢$

$$ق^{\prime}(-٢) = ٣(-٢)^{٢} - ٢ = ١٠$$

قاعدة (٤) : اذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، فان $ك(س) = ق(س) \pm هـ(س)$

قابل للاشتقاق وتكون $ك^{\prime}(س) = ق^{\prime}(س) \pm هـ^{\prime}(س)$

ملاحظة : تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين

مثال (٤) : اذا كان $ق^{\prime}(١) = ٥$ ، $ك^{\prime}(١) = -٣$ ، وكان

$ل(س) = ٢س + ق(س) - ٣ك(س)$ جد $ل^{\prime}(١)$

الحل: $ل^{\prime}(١) = ٢ + ق^{\prime}(١) - ٣ك^{\prime}(١)$

$$ل^{\prime}(س) = ٢ + ق^{\prime}(س) - ٣ك^{\prime}(س)$$

$$ل^{\prime}(١) = ٢ + ٥ - ٣ \times {}^{-}٣ = ١٦$$

قاعدة (٥) : اذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، فان $ك(س) = ق(س) \times هـ(س)$

قابل للاشتقاق وتكون $ك^{\prime}(س) = ق(س) \times هـ^{\prime}(س) + هـ(س) \times ق^{\prime}(س)$

مثال (٥) : اذا كان $ق(س) = (٥س - ١)(٢ - س)$ ، جد $ق^{\prime}(س)$ ثم $ق^{\prime}(١)$

الحل : $ق^{\prime}(س) = (٥س - ١) \times {}^{-}١ + (٢ - س) \times ٥$

$$ق^{\prime}(س) = {}^{-}٥س + ١ + ١٠ - ٥س$$

$$ق^{\prime}(س) = {}^{-}١٠س + ١١$$

$$ق^{\prime}(١) = {}^{-}١٠ \times ١ + ١١ = ١$$

مثال (٦) : اذا كان $ق(س) = س\,ك(س)$ جد $ق^{\prime}(٢)$ علماً ان

$ق(٢) = {}^{-}٦$ $ك^{\prime}(٢) = ٤$

الحل: $ق^{\prime}(س) = س \times ك^{\prime}(س) + ك(س) \times ١$

$$ق^{\prime}(٢) = ٢ \times ك^{\prime}(٢) + ك(٢) \times ١$$

لكن $ق(س) = س\,ك(س)$

$$\text{ق}(٢) = ٢\,\text{ك}(٢)$$

$$^{-}٦ = ٢\,\text{ك}(٢) \longrightarrow \text{ك}(٢) = \frac{^{-}٦}{٢} = {}^{-}٣$$

$$\text{ق}'(٢) = ٢ \times ٤ + {}^{-}٣ \times ١ = ٥$$

قاعدة (٦): اذا كان ك(س) ، م(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، فان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$ ، $\text{م}(\text{س}) \neq ٠$ قابل للاشتقاق وتكون $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{م}(\text{س})\times \text{ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})\times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

مثال (٧): اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٣}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١}$ جد $\text{ق}'(^{-}١)$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{^{-}٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = {}^{-}٣\text{س}^{^{-}٤} + \frac{(\text{س}-١)\times ٢\text{س} - \text{س}^{٢}\times ١}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{^{-}٣}{\text{س}^{٤}} + \frac{(\text{س}-١)\times ٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(^{-}١) = \frac{^{-}٣}{١} + \frac{(^{-}٢)\times {}^{-}٢ - ١}{(^{-}٢)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(^{-}١) = {}^{-}٣ + \frac{٣}{٤} = \frac{^{-}١٢}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{^{-}٩}{٤}$$

مثال (٨): $\text{ق}(\text{س}) = {}^{-}٣\text{س}(٢ - \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣})$

$$\text{ق}'(\text{س}) = {}^{-}٣\text{س} \times (^{-}٢\text{س} + ٣\text{س}^{٢}) + (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣}) \times {}^{-}٣$$

$$= ٦\text{س}^{٢} - ٩\text{س}^{٣} + {}^{-}٦ + ٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س}^{٣}$$

$$= ٩\text{س}^{٢} - ١٢\text{س}^{٣} - ٦$$

مثال(٩) : اذا كان ل(س) = ٨ ق(س) ، ق قابل للاشتقاق ، $\text{ق}'(٥) = ٣$ ، جد $\text{ل}'(٥)$

الحل : $\text{ل}'(\text{س}) = ٨\text{ق}'(\text{س}) \longrightarrow \text{ل}'(٥) = ٨\text{ق}'(٥) = ٨ \times ٣ = ٢٤$

<u>قاعدة (٧)</u>: اذا كان $ق(س) = \left(ل(س)\right)^{ن}$ **و ل(س) قابل للاشتقاق فان :**

$$ق'(س) = ن\left(ل(س)\right)^{ن-١} \times ل'(س)$$

<u>مثال (١٠)</u> : اذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} + ١)^{٥}$ **جد** $ق'(س)$

<u>الحل</u> : $ق'(س) = ٥(٣س^{٢} + ١)^{٤} \times ٦س$

<u>قاعدة (٨)</u>: اذا كان $ق(س) = \sqrt{ل(س)}$ **وكان ل(س) قابل للاشتقاق فإن:**

$$ق'(س) = \frac{ل'(س)}{٢\sqrt{ل(س)}}$$

<u>مثال (١١)</u> : اذا كان $ق(س) = \sqrt{٣س^{٢} - ٢س}$ ، **جد** $ق'(س)$

<u>الحل</u> : $ق'(س) = \frac{٦س - ٢}{٢\sqrt{٣س^{٢} - ٢س}}$

<u>مثال (١٢)</u> : اذا كان $ق(س) = \frac{\sqrt{٣}}{س^{٢}}$ **جد** $ق'(س)$

<u>الحل</u> : $ق'(س) = \frac{س^{٢} \times ٠ - \sqrt{٣} \times ٢س}{(س^{٢})^{٢}} = \frac{{}^{-}٢\sqrt{٣}س}{س^{٤}} = \frac{{}^{-}٢\sqrt{٣}}{س^{٣}}$

<u>مثال(١٣)</u>: اذا كان $ص = س(س^{٢} + ٢)(١ - ٢س^{٢})$ **جد** $\frac{دص}{دس}$

<u>الحل</u> : $ص = (س^{٣} + ٢س)(١ - ٢س^{٢})$

$$\frac{دص}{دس} = (س^{٣} + ٢س)({}^{-}٤س) + (١ - ٢س^{٢})(٣س^{٢} + ٢)$$

<u>مثال(١٤)</u> : اذا كان هـ(س) قابلا للاشتقاق ، هـ(٢) =٣ ، $هـ'(٢) = {}^{-}١$ **جد** $ق'(٢)$

عندما $ق(س) = ٣س^{٢}\, هـ(س) - ٥س$

<u>الحل</u>: $ق'(س) = ٣س^{٢} \times هـ'(س) + هـ(س) \times ٦س - ٥$

$$ق'(٢) = ٣(٤) \times هـ'(٢) + هـ(٢) \times ٦ \times ٢ - ٥$$

$$ق'(٢) = (١٢ \times {}^{-}١) + (٣ \times ١٢) - ٥ = {}^{-}١٢ + ٣٦ - ٥ = ١٩$$

المشتقات العليا:

تسمى المشتقات التي تلي المشتقة الاولى بالمشتقات العليا.

تعريف : اذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ **، ق قابل للاشتقاق ، فان المشتقة الاولى هي :**

$\text{ص}' = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ق}'(\text{س})$ **، واذا كان** $\text{ق}'(\text{س})$ **قابلا للاشتقاق فإن مشتقة**

$\text{ق}'(\text{س})$ **تسمى المشتقة الثانية ويرمز لها بالرمز** $\text{ص}'' = \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{ق}''(\text{س})$

وهكذا بالنسبة للمشتقة الثالثة والرابعة .....

مثال (١) : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٥} + ٤\text{س}^{٣} - ١$ **، جد** $\text{ق}^{(٥)}(\text{س})$ ، $\text{ق}^{(٤)}(٢)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = ٥\text{س}^{٤} + ١٢\text{س}^{٢}$

$$\text{ق}''(\text{س}) = ٢٠\text{س}^{٣} + ٢٤\text{س}$$

$$\text{ق}^{(٤)}(\text{س}) = ١٢٠\text{س}$$

$$\text{ق}^{(٥)}(\text{س}) = ١٢٠$$

$$\text{ق}^{(٤)}(\text{س}) = ١٢٠ \times ٢ = ٢٤٠$$

مثال (٢) : اذا كان ق(س) كثير حدود وكان من الدرجة الثالثة $\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}''(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}$

جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل : ق(س) من الدرجة الثالثة : $\text{ق}(\text{س}) = \text{أس}^{٣} + \text{بس}^{٢} + \text{جس} + \text{د}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{أس}^{٢} + ٢\text{بس} + \text{ج}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{أس} + ٢\text{ب}$$

$$\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}''(\text{س}) = \text{أس}^{٣} + \text{بس}^{٢} + \text{جس} + \text{د} + ٦\text{أس} + ٢\text{ب} = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}$$

$\longleftarrow$ $\text{أس}^{٣} = ٢\text{س}^{٣}$ $\longleftarrow$ **أ = ٢**

$\longleftarrow$ $\text{بس}^{٢} = ٠$ $\longleftarrow$ **ب = ٠**

جس + ٦أس = $^{-}$٣س ← جـ + ٦أ = $^{-}$٣ ← جـ + ١٢ = $^{-}$٣ ← جـ = $^{-}$١٥

د + ٢ب = ٠ ← د + ٠ = ٠ ← د = ٠

ق(س) = ٢س^{٣} + ٠س^{٢} + $^{-}$١٥س + ٠

ق(س) = ٢س^{٣} + $^{-}$١٥س

ق$'$(س) = ٦س^{٢} − ١٥

ق$''$(س) = ١٢س

<u>مثال (٣)</u> : اذا كان ص = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ **اثبت أن**

س^{٢} ص$''$ + س ص$'$ = ص

الحل : ص = $\frac{١}{س}$ ← ص$'$ = $\frac{^{-}١}{س^{٢}}$

ص$''$ = $\frac{٢س}{س^{٤}}$ = $\frac{٢}{س^{٣}}$

س^{٢} ص$''$ + س ص$'$ = س^{٢} × $\frac{٢}{س^{٣}}$ + س × $\frac{^{-}١}{س^{٢}}$

= $\frac{٢}{س}$ − $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{س}$ = ص

<u>مثال (٤)</u> : اذا كان ق(١) = ٢ ، ق$'$(١) = ٣ **، هـ (١) = -١ ،** هـ$'$(١) = $^{-}$٣

بالاعتماد على المعطيات أعلاه جد ما يلي :

(ق + هـ^{٢})$'$(١)

<u>الحل</u> : (ق + هـ^{٢})$'$(س) = ق$'$(س) + ٢هـ(س) × هـ$'$(س)

(ق + هـ^{٢})$'$(١) = ق$'$(١) + ٢هـ(١) × هـ$'$(١)

= ٣ + ٢ × $^{-}$١ × $^{-}$٣ = ٣ + ٦ = ٩

الاتصال والاشتقاق

مراجعة بسيطة لعلاقة الاشتقاق بالاتصال

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}\ ق(س)$$

غير موجودة

ق(س) غير متصل
عند س = أ

موجودة

ق(س) غير متصل
عند س =أ

$$(ق(أ) \neq \underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}\ ق(س))$$

متصل عند س =أ

$$ق(أ) = \underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}\ ق(س)$$

قابل للاشتقاق

$$ق'^{+}(أ) = ق'^{-}(أ)$$

غير قابل للاشتقاق

<u>مثال (١)</u> : اذا كان ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س} + ٣ & ، \ س \geq ٤ \\ ٣س - ٧ & ، \ س < ٤ \end{cases}$$

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤

١) نبحث في اتصال ق(س) عند س =٤

ق(٤) = ٥

$$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـــا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـــا}}\ \sqrt{س} + ٣ = ٥$$

$$\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نهـــا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٤^{-}}{\text{نهـــا}}\ ٣س - ٧ = ٥$$

$$\leftarrow \underset{س \to ٤}{\text{نهـــا}}\ ق(س) = ٥$$

ق(٤) = $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ ⟵ ق (س) متصل عند س = ٤

٢) نجد مشتقة ق(س) باستخدام قواعد الاشتقاق

$$ق'(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢\sqrt{س}} & ، س > ٤ \\ ٣ & ، س < ٤ \\ \boxed{\text{غير موجودة}} & ، س = ٤ \end{cases}$$

ق'(٤)$^+$ = $\frac{١}{٤}$

ق'(٤)$^-$ = ٣ ⟵ ق'(٤)$^+$ ≠ ق'(٤)$^-$ ⟵ غير قابل للاشتقاق عند س=٤

<u>مثال (٢)</u> : ليكن ق(س) = س |جاس| ، س ∈ [٠،٢π]

ابحث في قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = π

<u>الحل</u> : نعيد تعريف |جاس| ، س ∈ [٠،٢π]

جا س موجب في الربع الاول والثاني ، جا س سالب في الربع الثالث والرابع

$$|جاس| = \begin{cases} جاس & ، ٠ \leq س \leq \pi \\ ^-جاس & ، \pi \leq س \leq ٢\pi \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س جاس & ، ٠ \leq س \leq \pi \\ ^-س جاس & ، \pi \leq س \leq ٢\pi \end{cases}$$

١) نبحث في اتصال ق(س) عند س = π

ق(π) = π جاπ = ٠

$\underset{س \leftarrow \pi^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = π جاπ = ٠

$\underset{س \leftarrow \pi^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $^-\pi$ جاπ = ٠ ⟵ $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

$ق(\pi) = \underset{س \leftarrow \pi}{نهـــا} ق(س)$ ⟵ **ق(س) متصل عند** $س = \pi$

٢) $ق^{\prime}(س) = \begin{cases} س جتاس + جاس &، \cdot < س < \pi \\ ^{-}س جتاس + ^{-}جاس &، \pi < س < ٢\pi \\ \text{غير موجودة} &، س = \cdot ، \pi ، ٢\pi \end{cases}$

$ق^{\prime}{}^{+}(\pi) = \pi^{-} جتا \pi + ^{-}جا \pi = \pi$

⟵ $ق^{\prime}{}^{+}(\pi) \neq ق^{\prime}{}^{-}(\pi)$ ⟵ $ق^{\prime}(س)$ **موجودة**

$ق^{\prime}{}^{-}(\pi) = \pi جتا \pi + جا \pi = ^{-}\pi$

<u>مثال (٣)</u> : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٦}{س} - ٤ &، ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س + ١ &، ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

جد $ق^{\prime}(س)$ **على مجاله**

<u>الحل</u> : المجال هو [١ ، ٥]

١) نبحث اتصال ق(س) عند <u>نقاط اتحول</u> و <u>الفترات الداخلية المفتوحة</u>

<u>عند س = ٢ (نقطة تحول)</u>

ق(٢) = -١

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نهـــا} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نهـــا} ٣س + ١ = ٧$

⟵ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} ق(س)$ **غير موجودة**

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نهـــا} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نهـــا} \frac{٦}{س} - ٤ = ^{-}١$

⟵ **ق(س) متصل عند س = ٢**

<u>عند الفترات</u> : (١ ، ٢) ق نسبي متصل على ح ما عدا اصفار المقام (س = ٠) ، لكن ٠ $\not\ni$ **(١ ، ٢)**

(٢ ، ٥) ق كثير حدود متصل على ح

٢) نبحث في قابلية ق (س) على الاشتقاق عند :

أ) الاطراف : المشتقة غير موجودة

٢) ق $'$(س) = $\begin{cases} \frac{-٦}{س^{٢}} \text{ ، } ١ < س < ٢ \\ ٣ \text{ ، } ٢ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة ، } س = ١ \text{، } ٥ \text{، } ٢ \end{cases}$

ق $'$(١) ، ق $'$(٥) غير موجودة لانهما اطراف فترة

ق $'$(٢) غير موجودة لان ق(س) غير متصل عند س =٢

مثال (٤) : جد $\frac{ءص}{ءس}$ ، ص = $\frac{|س^{٢} - ٥س + ٤|}{س(س-١)}$ ، س ∈ (١،٥]

الحل : اعادة تعريف الاقتران على مجاله

$|س^{٢} - ٥س + ٤|$

$س^{٢} - ٥س + ٤ = (س - ٤)(س - ١) = ٠$ ⟵ س = ١ ، س = ٥

+++++++ ٠-------------------------- ٠++++++++

١ ٤ ٥

ص = $\begin{cases} \frac{-(س^{٢} - ٥س + ٤)}{س(س-١)} \text{ ، } ١ < س \leq ٤ \\ \frac{(س^{٢} - ٥س + ٤)}{س(س-١)} \text{ ، } ٤ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

ص = $\begin{cases} \frac{-(س-٤)}{س} \text{ ، } ١ < س \leq ٤ \\ \frac{(س-٤)}{س} \text{ ، } ٤ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

نبحث في اتصال ص : ١) عند نقاط االتحول (عند س = ٤)

ق(٤) = ٠

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ٠$ ⟵ $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٠$

ق(٤) = $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٠$ ق متصل عند س = ٤

٢) عند الفترات الداخلية المفتوحة : (١، ٤) اقتران نسبي متصل على ح ما عدا اصفار المقام

لكن الاصفار ٠ ، ١ $\not\in$ (١، ٤)

(٤، ٥) اقتران نسبي متصل على ح ما عدا اصفار المقام لكن الاصفار ٠ ، ١ $\not\in$ (١، ٤)

$$ق^{\prime}(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{س^٢} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س^٢} & ، ٤ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٤ ، س = ٥ \end{cases}$$

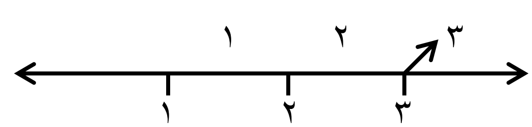
$ق^{\prime}(٤)^+ = \frac{٤}{١٦}$

$ق^{\prime}(٤)^- = \frac{-٤}{١٦}$ ⟵ $ق^{\prime}(٤)$ غير موجودة

<u>مثال (٥)</u> : $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س + ٢ & ، ٠ \le س < ١ \\ [س] + ٤س & ، ١ \le س \le ٣ \end{cases}$

جد $ق^{\prime}(س)$

<u>الحل</u> : اعادة تعريف [س] على الفترة [١ ، ٣]



$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2س + 2 & ، \quad 0 \leq س < 1 \\ 4س + 1 & ، \quad 1 \leq س < 2 \\ 4س + 2 & ، \quad 2 \leq س < 3 \\ 4س + 3 & ، \quad س = 3 \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق(س) على مجاله:

١) الفترات الداخلية الاقتران عند جميعها كثيرات حدود لذلك هو متصل عندها .

٢) عند نقاط التحول :

عند س = ١

ق(١) = ٥

$$\lim_{س \leftarrow 1^+} ق(س) = 5$$

$$\lim_{س \leftarrow 1^-} ق(س) = 5$$

$$\lim_{س \leftarrow 1} ق(س) = 5$$

$$ق(س) = \lim_{س \leftarrow 1} ق(س) = 5$$

ق(س) متصل عند س = ١

عند س = ٢

ق(٢) = ١٠

$$\lim_{س \leftarrow 2^+} ق(س) = 10$$

$$\lim_{س \leftarrow 2^+} ق(س) = 9$$

$\lim_{س \leftarrow 2} ق(س)$ غير موجودة

ق(س) غير متصل عند س =٢

$$ق'(س) = \begin{cases} 2س + 2 & ، \quad 0 < س < 1 \\ 4 & ، \quad 1 \leq س < 2 \\ 4 & ، \quad 2 < س < 3 \\ \text{غير موجودة} & ، \quad س = 0 ، 2 ، 3 \end{cases}$$

$ق'(1)^+ = 4$ ، $ق'(1)^- = 4$ **ق(س) قابل للاشتقاق عند س=١**

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٠ ، ٣ (أطراف فترة)

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ (لانه غير متصل عند س =٢)

مثال (٦) : ق(س) = { أس³ + بس ، س < ٢
أس² + ٩بس − ١٢ ، س ≥ ٢

وكانت ق′(٢) موجودة ،، جد قيمة كل من أ ، ب

الحل : ق′(٢) **موجودة** ⟵ **١)** ق′(٢)⁺ = ق′(٢)⁻

٢) ق(س) متصل عند س = ٢

ق(س) متصل عند س = ٢ ⟵ نهـا ق(س) (س ⟵ ٢⁺) = نهـا ق(س) (س ⟵ ٢⁻)

⟵ ٤أ + ١٨ب − ١٢ = ٨أ + ٢ب

−٤أ + ١٦ب − ١٢ = ٠ ⟵ −أ + ٤ب = ٣ ,,,,,,,,,,,,,,, (١)

ق′(س) = { ٣أس² + ب ، س < ٢
٢أس + ٩ب ، س > ٢

ق′(٢)⁺ = ق′(٢)⁻

٤أ + ٩ب = ١٢أ + ب ⟵ ٩ب − ب = ١٢أ − ٤أ

⟵ ٨ب = ٨أ ⟵ أ − ب = ٠ ,,,,,,,,,,,,(٢)

~~−أ~~ + ٤ب = ٣
~~أ~~ − ب = ٠

٣ب = ٣ ⟵ ب = ١

أ − ب = ٠ ⟵ أ − ١ = ٠ ⟵ أ = ١

تطبيقات هندسية على التفاضل :

مراجعة :

١) $ل_١ ، ل_٢$ مستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا ميل ($ل_١$) = ميل ($ل_٢$)

٢) $ل_١ ، ل_٢$ مستقيمان متعامدان إذا وفقط إذا ميل ($ل_١$) $\times$ ميل ($ل_٢$) = -١

٣) ميل المستقيم اذا عرف نقطتين عليه = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٤) معادلة المستقيم اذا عرف ميله (م) ونقطة واقعة عليه هي : $(ص - ص_١) = م(س - س_١)$

تعريف : اذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة $أ(س_١ ، ق(س_١))$ ، فان ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) ويساوي $ق^{\prime}(س_١)$

ويُعرف أيضاً العمودي على منحنى الاقتران ، بأنه العمودي على المماس عند نقطة التماس.

مثال (١): جد ميل منحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ + ٥س$ عند س = ١

ثم جد معادلتي المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة

الحل : ميل المنحنى ق(س) عند س = ١ يساوي $ق^{\prime}(١)$

$ق^{\prime}(س) = ٣س^٢ + ٥$

$ق^{\prime}(١) = ٣ + ٥ = ٨$ = ميل المماس عند نقطة التماس

نقطة التماس هي $(١، ق(١)) = (١، ٦)$

معادلة المماس : $(ص - ٦) = ٨(س - ١)$

$ص - ٦ = ٨س - ٨ \quad \leftarrow \quad ص = ٨س - ٢$

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-١}{٨}$

معادلة العمودي على المماس عند نقطة التماس : $(ص - ٦) = \frac{-١}{٨}(س - ١)$

$٨ص - ٤٨ = -س + ١ \quad \leftarrow \quad ٨ص = -س + ٤٩ \quad \leftarrow \quad ص = \frac{-س + ٤٩}{٨}$

<u>مثال (٢)</u> : اذا كان المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، س > ٠ يصنع زاوية قياسها ١٣٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

<u>الحل</u> : نفرض ان نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$

ميل المنحنى = ميل المماس = $ظا ١٣٥° = {}^{-}١$

$$ق'(س) = \frac{{}^{-}٤}{س^٢}$$

ميل المنحنى = $ق'(س_١) = \frac{{}^{-}٤}{س^٢}$

$${}^{-}١ = \frac{{}^{-}٤}{س^٢} \longrightarrow {}^{-}١ س^٢ = {}^{-}٤ \longrightarrow س^٢ = ٤$$

$\longrightarrow$ **س = ٢ ، ـ٢**

س = ـ٢ مرفوضة لان من معطيات السؤال س > ٠

$\longrightarrow$ **س = ٢** $\longrightarrow$ $ق(٢) = \frac{٤}{٢} = ٢$ $\longrightarrow$ **نقطة التماس هي (٢ ، ٢)**

ميل العمودي = $\frac{{}^{-}١}{\text{ميل المماس}}$ **= ١**

النقطة (٢،٢)

معادلة العمودي : $(ص - ٢) = ١(س - ٢)$

ص – ٢ = س – ٢

ص = س

النقطة (٠ ، ٠) تحقق معادلة العمودي على المماس عند نقطة التماس وهذا يعني ان العمودي على المماس يممر بالنقطة (٠ ، ٠)

مثال (٣) : اذا كان المستقيم ص = -٣س + جـ يمس منحنى $ق(س) = {}^{-}٢س^{٢} + ٥س + ١$

جد نقطة / نقاط التماس.

الحل : ميل المماس من معادلته = -٣

نفرض أن نقطة التماس $(س_{١}، ص_{١})$

$$ق^{\prime}(س) = {}^{-}٤س + ٥$$

$$ق^{\prime}(س_{١}) = {}^{-}٤س_{١} + ٥ = {}^{-}٣$$

$${}^{-}٤س_{١} = {}^{-}٨ \longrightarrow س_{١} = ٢$$

$$ق(س_{١}) = {}^{-}٢ \times ٤ + ٥ \times ٢ + ١ = {}^{-}٨ + ١٠ + ١ = ٣$$

⟵ نقطة التماس (٢ ، ٣).

مثال (٤) : اذا كان المستقيم ص = جـ س + ٥ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢}$

عند النقطة (-١ ، -٣) جد قيم أ ، ب ، جـ

الحل : نقطة التماس تحقق معادلة المماس ⟵ -٣ = -١ جـ + ٥

⟵ -٨ = - جـ ⟵ جـ = ٨

ميل المماس من معادلته = جـ = ٨

$$ق^{\prime}(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس$$

ميل المماس = $ق^{\prime}({}^{-}١) = ٣أ - ٢ب = ٨$

⟵ $٣أ - ٢ب = ٨$ .... (١)

وايضا النقطة نقطة التماس (- ١ ، ٣) تحقق معادلة الاقتران ق(س).

⟵ $ق({}^{-}١) = {}^{-}أ + ب = {}^{-}٣$ ٢/ ....(٢)

$٣أ - ٢ب = ٨$ ....(١)

أ = ٢

$٣أ - ٢ب = ٨ \longrightarrow ٦ - ٢ب = ٨ \longrightarrow ٢ب = {}^{-}٢ \longrightarrow ب = {}^{-}١$

مثال(٥) : جد نقاط تعامد منحنى الاقترانين :

$ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ١$

الحل : $م_{١} = ق^{\prime}(س) = ٢س$ $م_{٢} = هـ^{\prime}(س) = ٢س + ٢$

$م_{١} \times م_{٢} = {}^{-}١$

$٢س \times (٢س + ٢) = {}^{-}١$

$٤س^{٢} + ٢س + ١ = ٠ \longrightarrow (٢س + ١)(٢س + ١) = ٠$

$س = \frac{{}^{-}١}{٢}$ ، $ق\left(\frac{{}^{-}١}{٢}\right) = \frac{١}{٤} \longrightarrow$ نقطة التعامد هي $\left(\frac{{}^{-}١}{٢}، \frac{١}{٤}\right)$

مثال (٦) : اذا كان المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٥س$ عند $س = س_{١}$ يصنع زاوية ٤٥ مع محور السينات الموجب ، جد احداثيي نقطة التماس .

الحل: نفرض نقطة التماس $(س_{١}، ص_{١})$

ميل المماس = ظا هـ = ظا ٤٥ = ١

$ق^{\prime}(س) = ٢س + ٥$

وايضا ميل المماس = $ق^{\prime}(س_{١}) = ٢س_{١} + ٥ = ١ \longrightarrow س_{١} = {}^{-}٢$

$ق({}^{-}٢) = ٤ + {}^{-}١٠ = {}^{-}٦ \longrightarrow$ نقطة التماس (-٢ ، -٦)

مثال(٧) : جد قيمة الثابت جـ في الاقتران $ق(س) = جـس^{٢}$ ، اذا كانت قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ١ هو ٤٥ .

الحل : ميل المماس = ظا ٤٥ = ١

$ق^{\prime}(س) = ٢جـس$

ميل المماس = $ق^{\prime}(١) = ٢جـ = ١ \longrightarrow جـ = \frac{١}{٢}$

مثال (٨) : جد معادلة المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٧$ **عند نقطة تقاطعه مع المستقيم** $\text{ص} - ٣\text{س} + ١ = ٠$

<u>الحل</u>: $\text{ص} - ٣\text{س} + ١ = ٠ \longrightarrow \text{ص} = ٣\text{س} - ١$

نقطة التقاطع تحقق معادلة كل من منحنى الاقتران والمستقيم

$$\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٧ = ٣\text{س} - ١$$

$$\text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ٨ = ٠ = (\text{س} - ٨)(\text{س} - ١) \longrightarrow \text{س} = ١ \text{ ، } \text{س} = ٨$$

اذا كانت س = ١ $\longrightarrow$ **ص = ٢** $\longrightarrow$ **نقطة التقاطع (١ ، ٢)**

اذا كانت س = ٨ $\longrightarrow$ **ص = ٢٣** $\longrightarrow$ **نقطة التقاطع (٨ ، ٢٣)**

<u>عند نقطة التقاطع (٨ ، ٢٣)</u>

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} - ٦$$

ميل المماس = $\text{ق}'(٨) = ٢ \times ٨ - ٦ = ١٠$

معادلة المماس هي: $(\text{ص} - ٢٣) = ١٠(\text{س} - ٨)$

$$\text{ص} - ٢٣ = ١٠\text{س} - ٨٠$$

$$\text{ص} = ١٠\text{س} - ٥٧$$

<u>عند نقطة التقاطع (١ ، ٢)</u>

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} - ٦$$

ميل المماس = $\text{ق}(١) = ٢ \times ١ - ٦ = {}^{-}٤$

معادلة المماس هي: $(\text{ص} - ٢) = {}^{-}٤(\text{س} - ١)$

$$\text{ص} - ٢ = {}^{-}٤\text{س} + ٤$$

$$\text{ص} = {}^{-}٤\text{س} + ٦$$

تطبيقات فيزيائية على التفاضل:

تعريف : السرعة اللحظية (ع) عند الزمن (ن) هي : $ع(ن) = \frac{ءف}{ءن} = ف'$

التسارع اللحظي (ت) عند الزمن (ن) هو: $ت(ن) = \frac{ءع}{ءن} = \frac{ء^٢ف}{ءن^٢} = ف''$

مثال(١) : تحرك جسم على خط مستقيم ، بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة (م) يتحدد بالعلاقة

$ف = ن^٣ - ٩ن^٢ + ٧$ ، حيث (ف) بعده بالأمتار ، (ن) الزمن بالثواني ، جد:

١) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١ ، ٣]

٢) تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

الحل: ١) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣)-ف(١)}{٣-١} = \frac{٣^٣-٩(٣)^٢+٧-(١^٣-٩(١)^٢+٧)}{٢}$

$$= \frac{-٤٧-(-١)}{٢} = \frac{-٤٦}{٢} = -٢٣$$

٢) $ف'(ن) = ع(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن$

يعكس الجسم اتجاه حركته عندما ع(ن) = ٠

$$ع(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن = ٠ = ٣ن(ن-٦)$$

⟵ ن = ٠ أو ن = ٦ (ن = ٠ مهملة لان ن = ٠ بداية الحركة)

⟵ يعكس الجسم اتجاه حركته عندما ن = ٦ ⟵ $ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ١٨$

⟵ $ت(ن) = ٦ \times ٦ - ١٨ = ١٨$

مثال(٢) : قذف جسم رأسيا الى اعلى من نقطة على سطح الارض بحيث يتحدد بعده عن سطح الارض

بالعلاقة : $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢$ بحيث ف : ارتفاع الجسم بالأمتار

ن : الزمن بالثواني

جد : ١) اقصى ارتفاع يصله الجسم.

٢) المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الاربعة الاولى.

<u>الحل</u> : ١)_ عندما يصل الجسم اقصى ارتفاع ⟵ ع (ن) = ٠

$$ع(ن) = ف^{\prime}(ن) = ٢٠ - ١٠ن = ٠$$

⟵ ١٠ ن = ٢٠ ⟵ ن = ٢ ⟵ عندما ن = ٢ يصل الجسم اقصى ارتفاع

اقصى ارتفاع = ف(٢) = $٢٠ \times ٢ - ٥ \times ٢^{٢} = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠$ **م**

٢) عندما ن = ٤ ⟵ $ف(٤) = ٢٠ \times ٤ - ٥ \times ٤^{٢} = ٨٠ - ٨٠ = ٠$

⟵ أي ان الجسم يكون قد وصل سطح الارض

⟵ المسافة المقطوعة = ٢ (اقصى ارتفاع) – ف(٤)

= ٢ (٢٠) – ٠= ٤٠ م

<u>مثال (٣)</u> : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفق العلاقة : $ف(ن) = ن^{٣} + ٥ن^{٢} + ٩ = ٠$

احسب سرعة الجسم وتسارعه بعد ٣ ثواني.

<u>الحل</u>: $ع = ف^{\prime}(ن) = ٣ن^{٢} + ١٠ن$

$$ع(٣) = ٣ \times ٣^{٢} + ١٠ \times ٣ = ٢٧ + ٣٠ = ٥٧$$

$$ت = ع^{\prime}(ن) = ٦ن + ١٠$$

$$ت(٣) = ٦ \times ٣ + ١٠ = ١٨ + ١٠ = ٢٨$$

<u>مثال (٤)</u> : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفق العلاقة : $ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢$

احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

<u>الحل</u> : $ع = ف^{\prime}(ن) = ٦ن^{٢} - ٦ن$

$$ت = ع^{\prime}(ن) = ١٢ن - ٦$$

عندما ت = صفر ⟵ $١٢ن - ٦ = ٠$ ⟵ $١٢ن = ٦$ ⟵ $ن = \frac{١}{٢}$

$$ع(\tfrac{1}{2}) = ٦\times\tfrac{1}{4} - ٦\times\tfrac{1}{2} = ٦(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}) = ٦\times\tfrac{-1}{4} = \tfrac{-3}{2}$$

مثال(٥) : اذا كان $ف(ن) = \frac{1}{3}ن^3 - 3ن^2 + 5ن$ **هي المعادلة الزمنية لحركة جسيم على خط مستقيم حيث (ن) الزمن و (ف) المسافة .**

احسب التسارع في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة .

الحل:ـ $ع(ن) = ف'(ن) = ن^2 - 6ن + 5$

$ت(ن) = ع'(ن) = 2ن - 6$

تنعدم السرعة ⟵ **ع(ن) = ٠** ⟵ $ن^2 - 6ن + 5 = 0$

⟵ $(ن-5)(ن-1) = 0$

⟵ **ن = ١ ، ن = ٥**

عند ن = ١ ⟵ **ت (ن) = ٢ ـ ٦ = ـ٤**

عند ن = ٥ ⟵ **ت (ن) = ١٠ ـ ٦ = ٤**

مثال (٦) : يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث حسب العلاقة $ف(ن) = أن^2 + بن$

حيث أ ، ب ثوابت

احسب المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثواني علما أن تسارعه يساوي ٨ م/ث²

الحل : $ف(ن) = أن^2 + بن$

$ع(ن) = 2أن + ب$

$ت(ن) = 2أ$

سرعة ابتدائية = ٢ ⟵ **ع(٠) = ٢** ⟵ **ب = ٢**

التسارع = ٨ ⟵ **٢ أ = ٨** ⟵ **أ = ٤**

$ف(3) = 4(3)^2 + 2(3) = 36 + 6 = 42$

مثال (٧) : يتحرك جسيم بخط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد(ن) من الثواني يعطى بالعلاقة $ف(ن) = ن^{٣}$ فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، أ] يساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٢ ، جد قيمة أ .

الحل : السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(أ) - ف(٠)}{أ - ٠} = \frac{أ^{٣}}{أ} = أ^{٢}$

السرعة اللحظية = $ف' = ٣ن^{٢}$

$$ع(٢) = ٣ \times ٤ = ١٢$$

$\longleftarrow أ^{٢} = ١٢ \longleftarrow أ = \pm\sqrt{١٢} \longleftarrow أ = \pm ٢\sqrt{٣}$

نهمل $-٢\sqrt{٣}$ لأن الزمن قيمة موجبة $\longleftarrow أ = +٢\sqrt{٣}$

مثال (٨) : يتحرك جسم بخط مستقيم بحيث أن سرعته = $ع = أ\sqrt{ف}$ ، $أ > ٠$ ، $ف > ٠$

اذا علمت أن تسارعه = ٨ ، جد قيمة الثابت أ

الحل : $ت = ع' = \frac{أف'}{٢\sqrt{ف}} = \frac{أع}{٢\sqrt{ف}} = \frac{أ \times أ\sqrt{ف}}{٢\sqrt{ف}} = \frac{أ^{٢}}{٢} = ٨$

$أ^{٢} = ١٦ \longleftarrow أ = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤ \longleftarrow أ = ٤$ (أ = -٤ تهمل)

مثال (٩) : اذا قذف جسم رأسيا الى اعلى عن سطح الارض وفق العلاقة :

$ف(ن) = أن - ٥ن^{٢}$ جد قيمة (أ) علما ان اقصى ارتفاع وصل له الجسم ٨٠ م

الحل : $ع(ن) = ف'(ن) = أ - ١٠ن = ٠$

$أ = ١٠ن \longleftarrow ن = \frac{أ}{١٠}$

$ف(\frac{أ}{١٠}) = أ \times \frac{أ}{١٠} - ٥ \times \frac{أ^{٢}}{١٠٠} = ٨٠ \longleftarrow \frac{أ^{٢}}{١٠} - \frac{أ^{٢}}{٢٠} = ٨٠$

$\frac{٢أ^{٢}}{٢٠} - \frac{أ^{٢}}{٢٠} = \frac{أ^{٢}}{٢٠} = ٨٠ \longleftarrow أ^{٢} = ١٦٠٠ \longleftarrow أ = ٤٠$

قانون السلسلة

للتذكر : ($ق \circ هـ(س) = ق(هـ(س))$ هو اقتران مركب من ق ، هـ)

مثال : اذا كان $هـ(س) = س^{٢} + ١$ ، $ق(ع) = ع^{٣}$

جد $ق \circ هـ(س) = ق(هـ(س)) = ق(س^{٢} + ١) = (س^{٢} + ١)^{٣}$

قاعدة السلسلة : اذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ (س) ، وكان هـ (س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س)

مدى هـ $\subseteq$ مجال ق ، فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

أي أن $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

مثال (١) : اذا كان $ق(س) = س^{٣} + س$ ، $هـ(س) = س^{٢}$ ، جد :

١) $(ق \circ هـ)'(س)$ ٢) $(هـ \circ هـ)'(٢)$

الحل : ١) $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ١$ ، $هـ'(س) = ٢س$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(س^{٢}) \times ٢س$

$= (٣س^{٤} + ١) \times ٢س = ٦س^{٥} + ٢س$

٢) $(هـ \circ هـ)'(س) = هـ'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ٢(س^{٢}) \times ٢س = ٤س^{٣}$

$(هـ \circ هـ)'(٢) = ٤(٢)^{٣} = ٤ \times ٨ = ٣٢$

مثال (٢) : اذا كان $ص = ع^{٣} + ١$ ، $ع = ٣س + ٥$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٣ع^{٢} \times ٣ = ٩ع^{٢} = ٩(٣س + ٥)^{٢}$

مثال (٣) : اذا كان $ص = م^٢ + ٣م$ ، $م = س^٣ - ٤$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس} = (٢م + ٣)(٣س^٢) = (٢(س^٣ - ٤) + ٣)(٣س^٢)$

$= (٢س^٣ - ٨ + ٣)(٣س^٢) = (٢س^٣ - ٥)(٣س^٢) = ٦س^٥ - ١٥س^٢$

مثال (٤) : اذا كان ق ، هـ اقترانين معرفين عل ح وقابلين للاشتقاق عل مجاليهما ، وكان

$ق(١٠) = {}^-٢$ ، $ق'(١٠) = ٢$ ، $هـ'({}^-٢) = \frac{١}{٢}$

جد $(ق \circ هـ)'(١٠)$

الحل : $(ق \circ هـ)'(١٠) = هـ'(ق(١٠)) \times ق'(١٠)$

$= هـ'({}^-٢) \times ٢ = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$

مثال (٥) : اذا كان $ق(س) = \sqrt{س + ١}$ ، $ع(س) = أس^٣$ ، وكان

$(ع \circ ق)'(٣) = ١٢$ جد قيمة أ

الحل : $ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$ ، $ع'(س) = ٣أس^٢$

$(ع \circ ق)'(٣) = (ع'(ق(٣))) \times ق'(٣)$

$١٢ = ع'(٢) \times \frac{١}{٤}$

$١٢ = ٣أ \times ٤ \times \frac{١}{٤}$

$١٢ = ٣أ$ $\longleftarrow$ أ = ٤

مثال (٦) : اذا كان $ص = ع^٢ - ٥ع$ ، $ع = \frac{١}{س+١}$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٠

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= (٢ع - ٥) \times \left(\frac{{}^-١}{(س+١)^٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{س+١} - ٥\right) \times \left(\frac{{}^-١}{(س+١)^٢}\right)$

$\frac{ءص}{ءس}(س = ٢) = (٢ - ٥) \times \frac{{}^-١}{١} = {}^-٣ \times {}^-١ = ٣$

<u>مثال(٧)</u> : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $\text{ص} = \text{س}\,\text{ق}(\text{س}^{٢} + ١)$ **عندما س = ٢،**

علماً بأن ق(س) قابلا للاشتقاق ، $\text{ق}'(٥) = ٣$ ، $\text{ق}(٥) = {}^{-}١$

<u>الحل</u> : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{ق}'(\text{س}^{٢} + ١) \times ٢\text{س} + \text{ق}(\text{س}^{٢} + ١) \times ١$

ميل المماس = $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٢}$

$$= ٢ \times \text{ق}'(٥) \times ٤ + \text{ق}(٥) \times ١ = ٨ \times ٣ + {}^{-}١ = ٢٣$$

$\text{ق}(٢) = ٢ \times \text{ق}(٥) = {}^{-}٢$ $\longleftarrow$ **نقطة التماس (٢، ق(٢)) = (٢ ، -٢)**

معادلة المماس : $(\text{ص} - \text{ص}_{١}) = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$$(\text{ص} - {}^{-}٢) = ٢٣(\text{س} - ٢)$$

$$\text{ص} + ٢ = ٢٣\text{س} - ٤٦ \longrightarrow \text{ص} = ٢٣\text{س} - ٤٨$$

<u>مثال (٨)</u> : اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٥\text{ع}$ **وكانت** $\left.\frac{\text{دع}}{\text{دس}}\right|_{\text{ع}=١} = ٢$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{ع}=١}$

<u>الحل</u> : $\text{ص}' = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢\text{ع} + ٥$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{ع} + ٥) \times ٢$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{ع}=١} = (٢ \times ١ + ٥) \times ٢ = ٧ \times ٢ = ١٤$$

<u>مثال (٩)</u> : اذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}^{٣} + \text{س})$ **، وكان** $\text{ق}'({}^{-}١٠) = ٧$ ؛ $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}={}^{-}٢}$

<u>الحل</u> : $\text{ص}' = \text{ق}'(\text{س}^{٣} + \text{س}) \times (٣\text{س}^{٢} + ١)$

$$\text{ص}'({}^{-}٢) = \text{ق}'({}^{-}٨ + {}^{-}٢) \times (٣ \times ٤ + ١) = \text{ق}'({}^{-}١٠) \times ١٣ = ٧ \times ١٣ = ٩١$$

مثال (١٠) : اذا كان $ص = ق(س^{٢} + ٢س)$ ، وكان $ق'(٣) = ٥$ جد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١}$

الحل : $ص' = ق'(س^{٢} + ٢س) \times (٢س + ٢)$

$ص'(١) = ق'(١ + ٢) \times (٢ \times ١ + ٢) = ق'(٣) \times ٤ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

مثال (١١) : اذا كان $ق(٢س) = ٣س^{٢} + ٨س$ ، جد $ق'(٢)$

الحل : $ق'(٢س) \times ٢ = ٦س + ٨$ ، عندما ٢س = ٢ ⟵ س = ١

$ق'(٢ \times ١) \times ٢ = ٦ \times ١ + ٨$

$٢ق'(٢) = ١٤ \longleftarrow ق'(٢) = ٧$

مثال (١٢) : اذا كان $ق(٤س) = \frac{ءص}{ءس}(س^{٢} + ٣)$ ، جد $ق'(٤)$

الحل : $ق(٤س) = ٢س$

$ق'(٤س) \times ٤ = ٢س$ ، عندما ٤س = ٤ ⟵ س = ١

$ق'(٤ \times ١) \times ٤ = ٢ \times ١$

$٤ق'(٤) = ٢ \longleftarrow ق'(٤) = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

الاشتقاق الضمني:

عندما تكون العلاقة بين المتغيرين صريحة (ص معرفة بدلالة س) نشتق ص باستخدام قواعد الاشتقاق ، لكن أحياناً تكون العلاقة بشكل ليس من السهل كتابة ص بدلالة س ، فنسميها علاقة ضمنية ، ونجد

$\frac{ءص}{ءس}$ بطريقة تسم الاشتقاق الضمني .

مثال (١) : اذا كان $س^٢ + ص^٢ + ١ = ٤س - ص$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ ثم جد

$\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١ ، ١)

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنيا بالنسبة لـ س:

$$٢س + ٢ص ص^{\prime} = ٤ - ص^{\prime}$$

$$٢ص ص^{\prime} + ص^{\prime} = ٤ - ٢س$$ **(تجميع الحدود التي تحوي على $ص^{\prime}$ على جهة واحدة)**

$$ص^{\prime}(٢ص + ١) = ٤ - ٢س$$ **(اخراج $ص^{\prime}$ عامل مشترك من الطرف الايمن)**

$$ص^{\prime} = \frac{٤-٢س}{٢ص+١}$$

$\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١،١) = $\frac{٤-٢\times١}{٢\times١+١} = \frac{٤-٢}{٢+١} = \frac{٢}{٣}$

مثال (٢) : جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١ ، ١) في العلاقة $(س + ص)^٣ - ٣ص^٢ = ٥$

الحل : $٣(س + ص)^٢ \times (١ + ص^{\prime}) - ٦ص \times ص^{\prime} = ٠$

وبالتعويض في النقطة (١، ١) : $٣(١ + ١)^٢ \times (١ + ص^{\prime}) - ٦ \times ١ \times ص^{\prime} = ٠$

$$٣ \times ٤ \times (١ + ص^{\prime}) - ٦ص^{\prime} = ٠$$

$$١٢(١ + ص^{\prime}) - ٦ص^{\prime} = ٠$$

$$١٢ + ١٢ص^{\prime} - ٦ص^{\prime} = ٠$$

$$١٢ + ٦ص^{\prime} = ٠$$

$$١٢ = -٦ص^{\prime} \longrightarrow ص^{\prime} = ^{-}٢$$

مثال(٣) : اذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٣} + ١$ ، $\text{س}^{٢}\,\text{ع} = \text{ع}^{٢} - ٢$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ع = ٢ ، س > ٠

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٣\text{ع}^{٢}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}:\ \text{س}^{٢} \times \text{ع}' + \text{ع} \times ٢\text{س} = ٢\text{ع}\,\text{ع}'$$

$$\text{س}^{٢}\,\text{ع}' - ٢\text{ع}\,\text{ع}' = -٢\text{ع}\text{س}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}:\ \text{ع}'\left(\text{س}^{٢} - ٢\text{ع}\right) = -٢\text{ع}\text{س}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{ع}' = \frac{-٢\text{ع}\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{ع}}$$

عندما ع = ٢ $\longleftarrow$ $\text{س}^{٢} \times ٢ = ٢^{٢} - ٢ = ٢$

$$٢\text{س}^{٢} = ٢ \longleftarrow \text{س}^{٢} = ١$$

$\longleftarrow$ $\text{س} = \pm ١$ (س = -١ نهملها لان من معطيات السؤال س> ٠)

$\longleftarrow$ س = ١

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\substack{\text{ع}=٢ \\ \text{س}=١}} = ٣(٢)^{٢} \times \frac{-٢\times٢\times١}{(١)^{٢} - ٢\times٢} = ١٢ \times \frac{-٤}{١-٤} = ١٢ \times \frac{-٤}{-٣} = ١٦$$

مثال (٤) : جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للعلاقة $\text{س}^{٣} + \text{س}\text{ص} + ٢\text{ص}^{٢} = ٥$

الحل : $٣\text{س}^{٢} + \text{س}\text{ص}' + \text{ص} \times ١ + ٤\text{ص}\text{ص}' = ٠$

$$\text{س}\text{ص}' + ٤\text{ص}\text{ص}' = -٣\text{س}^{٢} - \text{ص}$$

$$\text{ص}'\left(\text{س} + ٤\text{ص}\right) = -٣\text{س}^{٢} - \text{ص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}' = \frac{-٣\text{س}^{٢} - \text{ص}}{\text{س} + ٤\text{ص}}$$

مثال (٤) : جد $\frac{ءص}{ءس}$ للعلاقة $ص^٢ + ٣ص - ٤س^٣ = ٥س + ١$

الحل : $٢صص' + ٣ص' - ١٢س^٢ = ٥$

$ص'(٢ص + ٣) = ٥ + ١٢س^٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ص' = \frac{٥+١٢س^٢}{٢ص+٣}$

مثال (٥) : جد $\frac{ءص}{ءس}$ للعلاقة $ص^٢ = \frac{س}{س+١}$

الحل : $٢صص' = \frac{(س+١)\times١ - س\times١}{(س+١)^٢} = \frac{س+١-س}{(س+١)^٢} = \frac{١}{(س+١)^٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ص' = \frac{١}{٢ص(س+١)^٢}$

مثال (٦) : اذا كان $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥سص$ ، $س،ص \neq ٠$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

عند (١ ، ١)

الحل : نضرب طرفي المعادلة بـ س ص

$\frac{٢}{س}(سص) + \frac{٣}{ص}(سص) = (٥سص)(سص)$ ، $س،ص \neq ٠$

$٢ص + ٣س = ٥س^٢ص^٢$

$٢ص' + ٣ = ٥س^٢ \times ٢صص' + ص^٢ \times ١٠س$

$٢ص' - ١٠س^٢صص' = ١٠سص^٢ - ٣$

$ص'(٢ - ١٠س^٢ص) = ١٠سص^٢ - ٣$

$\frac{ءص}{ءس} = ص' = \frac{١٠سص^٢-٣}{٢-١٠س^٢ص}$

عند (١ ، ١) $\frac{ءص}{ءس} = ص' = \frac{١٠\times١\times١-٣}{٢-١٠\times١\times١} = \frac{١٠-٣}{٢-١٠} = \frac{٧}{-٨}$

مثال (٧) : **جد** $\frac{ءص}{ءس}$ **للعلاقة** $(س + ص)^{٤} = س^{٢}$ **عند النقطة (١، ٠)**

الحل : $٤(س + ص)^{٣} \times (١ + ص^{\prime}) = ٢س$

$$٤(١ + ٠)^{٣} \times (١ + ص^{\prime}) = ٢ \times ١$$

$$٤(١ + ص^{\prime}) = ٢ \qquad\qquad ٤ + ٤ص^{\prime} = ٢$$

$$٤ص^{\prime} = {}^{-}٢$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ص^{\prime} = \frac{{}^{-}٢}{٤} = \frac{{}^{-}١}{٢}$$

مثال (٨) : جد النقطة عل منحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ **التي يكون عندها المماس أفقياً.**

الحل : **المماس افقيا يعني ان** $ص^{\prime}$ **عند نقطة التماس يساوي صفر**

$$\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص^{\prime}}{٢\sqrt{ص}} = ٠$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{{}^{-}ص^{\prime}}{٢\sqrt{ص}}$$

$$٢\sqrt{س}ص^{\prime} = ٢\sqrt{ص}$$

$$ص^{\prime} = \frac{٢\sqrt{ص}}{{}^{-}٢\sqrt{س}} = \frac{{}^{-}\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$$

عندما $ص^{\prime} = ٠ \longrightarrow {}^{-}\sqrt{ص} = ٠ \longrightarrow$ **ص = ٠**

لايجاد قيمة الاحداثي السيني للنقطة : $\sqrt{س} + ٠ = ٣$

$$\sqrt{س} = ٣ \longrightarrow \text{س} = ٩$$

النقطة هي (٩ ، ٠)

مشتقة الاقترانات المثلثية:

تذكر:

$جا^٢س + جتا^٢س = ١$	$قاس = \frac{١}{جتاس}$
$جا٢س = ٢جاسجتاس$	$قتاس = \frac{١}{جاس}$
$ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$	$قا^٢س = ١ + ظا^٢س$
	$قتا^٢س = ١ + ظتا^٢س$

قاعدة (١): اذا كان $ق(س) = جاس$ (س بالتقدير الدائري) فإن $ق^{\prime}(س) = جتاس$

مثال(١): اذا كان $ق(س) = جاس$ ، جد $ق^{\prime}(\frac{\pi}{٦})$

الحل : $ق^{\prime}(س) = جتاس \longleftarrow ق^{\prime}(\frac{\pi}{٦}) = جتا\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال(٢): اذا كان $هـ(س) = س^٢ جاس$ ، جد $هـ^{\prime}(س)$

الحل : $هـ^{\prime}(س) = س^٢ \times جتاس + جاس \times ٢س = س^٢ جتاس + ٢س جاس$

مثال(٣): اذا كان $ص = جا(٥ - ٣س)$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = جتا(٥ - ٣س) \times {}^{-}٣ = {}^{-}٣ جتا(٥ - ٣س)$

مثال(٤): جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى $ص = جا(س ص)$ عند النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ١)

الحل: ميل المماس = $ص^{\prime}_{(\frac{\pi}{٢}،١)} = جتا(س ص) \times (س \times ص^{\prime} + ص \times ١)$

$ص^{\prime}_{(\frac{\pi}{٢}،١)} = جتا(\frac{\pi}{٢}) \times (\frac{\pi}{٢} \times ص^{\prime} + ١) = ٠ \times (\frac{\pi}{٢} \times ص^{\prime} + ١) = ٠$

معادلة المماس : $(ص - ص_١) = م(س - س_١)$

$ص - ١ = ٠ \times (س - \frac{\pi}{٢}) = ٠ \longleftarrow ص = ١$

قاعدة (١) : اذا كان ن(س) = جتاس (س بالتقدير الدائري) فإن ن´(س) = ⁻جاس

مثال (٥) : اذا كان هـ(س) = جتا^{٣}(١ − ٢س) ، أوجد هـ´(س)

الحل : هـ´(س) = ٣جتا^{٢}(١ − ٢س) × ⁻جا(١ − ٢س) × ⁻٢

هـ´(س) = ٦ جتا^{٢}(١ − ٢س) جا(١ − ٢س)

قاعدة (٣) : إذا كان ن(س) = ظاس ، فإن ن´(س) = قا^{٢}س

البرهان : ن(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ⟵ ن´(س) = $\frac{\text{جتاس × جتاس − جاس × ⁻جاس}}{(\text{جتاس})^{٢}}$

ن´(س) = $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س}}{(\text{جتاس})^{٢}}$ = $\frac{١}{(\text{جتاس})^{٢}}$ = قا^{٢}س

قاعدة (٤) : اذا كان : ن(س) = ظتاس ⟵ ن´(س) = ⁻قتا^{٢}س

ن(س) = قاس ⟵ ن´(س) = قاس ظاس

ن(س) = قتاس ⟵ ن´(س) = ⁻قتاس ظتاس

مثال(٦) : إذا كان ص = ٢ظاس − قتا^{٢}٥س جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢قا^{٢}س − ٢ قتا٥س × ⁻قتاس ظتاس × ٥

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢قا^{٢}س + ١٠ قتا(٥س) قتاس ظتاس

مثال (٧) : إذا كان ص = قا(جا٣س) جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا(جا٣س) ظا(جا٣س) جتا٣س × ٣

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣قا(جا٣س) ظا(جا٣س) جتا٣س

مثال (٨) : إذا كان ص = قتاس ظتاس أثبت ان $\frac{دص}{دس}$ = قتاس - ٢ قتا^{٣} س

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = \text{قتاس} \times {}^{-}\text{قتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتاس} \times {}^{-}\text{قتاس ظتاس}$$

$$\frac{دص}{دس} = {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + {}^{-}\text{قتاس ظتا}^{٢}\text{س}$$

$$\frac{دص}{دس} = {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + {}^{-}\text{قتاس}(\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١) = {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + \text{قتاس}$$

$$\frac{دص}{دس} = {}^{-}٢\,\text{قتا}^{٣}\text{س} + \text{قتاس} = \text{قتاس} - ٢\,\text{قتا}^{٣}\text{س}$$

مثال(٩) : إذا كان $ن(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} - \text{جتاس}$ ، س $\in [{}^{-}٢\pi، ٢\pi]$

جد مجموعة قيم س التي تجعل $ن''(س) = ٠$

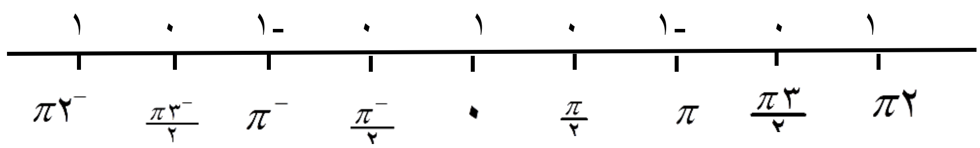
الحل :

$$ن'(س) = س + \text{جاس}$$

$$ن''(س) = ١ + \text{جتاس}$$

$$ن''(س) = ٠ \longrightarrow \text{جتاس} = {}^{-}١$$

$$\longrightarrow س = {}^{-}\pi ، \pi$$



مثال (١٠) : إذا كانت ص = ظاس ، س زاوية حادة ، أثبت أن :

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢ص(١ + ص^{٢})$$

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢\,\text{ظاس}(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢ص(١ + ص^{٢})$$ وهو المطلوب

مثال (١١) : إذا كان $ص = \frac{جاس}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، أثبت أن : $ص'' + \frac{٢}{س} ص' + ص = ٠$

الحل :

$$ص' = \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}}$$

$$ص'' = \frac{س^{٢}(س \times {}^{-}جاس + جتاس - جتاس) - (س جتاس - جاس) \times ٢س}{س^{٤}}$$

$$ص'' = \frac{{}^{-}س^{٣} جاس - ٢س^{٢} جتاس + ٢س جاس}{س^{٤}}$$

$$ص'' + \frac{٢}{س} ص' + ص = \frac{{}^{-}س^{٣} جاس - ٢س^{٢} جتاس + ٢س جاس}{س^{٤}} + \frac{٢}{س}\left(\frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}}\right) + \frac{جاس}{س}$$

$$ص'' + \frac{٢}{س} ص' + ص = \frac{{}^{-}س^{٣} جاس - ٢س^{٢} جتاس + ٢س جاس}{س^{٤}} + \frac{٢س جتاس - ٢ جاس}{س^{٣}} + \frac{جاس}{س}$$

$$ص'' + \frac{٢}{س} ص' + ص = \frac{{}^{-}س^{٣} جاس - ٢س^{٢} جتاس + ٢س جاس}{س^{٤}} + \frac{٢س^{٢} جتاس - ٢س جاس}{س^{٤}} + \frac{س^{٣} جاس}{س^{٤}}$$

$$ص'' + \frac{٢}{س} ص' + ص = \frac{{}^{-}س^{٣} جاس - ٢س^{٢} جتاس + ٢س جاس + ٢س^{٢} جتاس - ٢س جاس + س^{٣} جاس}{س^{٤}}$$

$$ص'' + \frac{٢}{س} ص' + ص = \frac{\cancel{{}^{-}س^{٣} جاس} - \cancel{٢س^{٢} جتاس} + \cancel{٢س جاس} + \cancel{٢س^{٢} جتاس} - \cancel{٢س جاس} + \cancel{س^{٣} جاس}}{س^{٤}} = \frac{٠}{س^{٤}} = ٠$$