الوحدة الخامسة (تطبيقات على التفاضل)

اقترانات المتزايدة والمتناقصة :

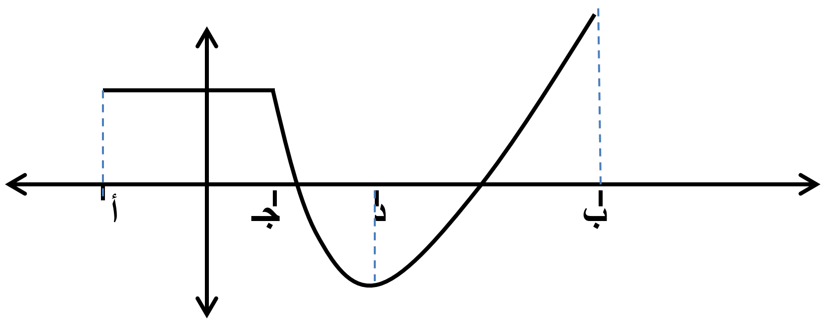
تعريف: يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [أ ، ب] ، س$_1$، س$_2$ ∈ [أ،ب] :

١) متزايداً في الفترة [أ ، ب] إذا تحقق الشرط : عندما س$_1$ < س$_2$ ، فإن ق(س$_1$) < ق(س$_2$)

٢) متناقصاً في الفترة [أ ، ب] إذا تحقق الشرط : عندما س$_1$ < س$_2$ ، فإن ق(س$_1$) > ق(س$_2$)

٣) ثابتاً في الفترة [أ ، ب] إذا تحقق الشرط : عندما س$_1$ < س$_2$ ، فإن ق(س$_1$) = ق(س$_2$)

مثال (١) : في الشكل المجاور ، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايدا، أو متناقصاً أو ثابتاً.



الحل : يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في الفترة [أ ، جـ]

يكون منحنى الاقتران ق(س) متناقصاً في الفترة [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س) .

يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترة [د ، ب] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تزيد قيمة ق(س).

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الاولى:

نظرية : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ،ب[فإن منحنى :

١) الاقتران ق(س) يكون متزايداً في الفترة [أ ، ب] اذا كانت ق´(س) > ٠ ، ∀س ∈]أ،ب[

٢) الاقتران ق(س) يكون متزايداً في الفترة [أ ، ب] اذا كانت ق´(س) < ٠ ، ∀س ∈]أ،ب[

٣) الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في الفترة [أ ، ب] اذا كانت $ق'(س) = ٠$ ، $\forall س \in]أ،ب[$

<u>مثال (٢)</u> : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن :

$$ق'(س) = (س^{٢} - ١)(س + ٢) \quad ، \quad س \in ح$$

<u>الحل</u> : نبحث في اشارة $ق'(س)$

$$ق'(س) = (س^{٢} - ١)(س + ٢) = ٠$$

$$\longleftarrow \quad (س - ١)(س + ١)(س + ٢) = ٠ \quad \longleftarrow \quad س = ١ ، -١ ، -٢$$

سلوك الاقتران

إشارة مشتقة الاقتران ++++++++++ ٠ ------------------ ٠ ++++++ ٠ ---------------

-٢ ، -١ ، ١

يكون منحنى الاقتران متناقصاً في $]-\infty ، -٢]$ ، $[-١ ، ١]$

يكون منحنى الاقتران متزايداً في $[-٢ ، -١]$ ، $[١ ، \infty[$

<u>مثال (٣)</u> : عين فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = س^{٤} + ٤س + ٥$

<u>الحل</u> : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود

$$ق'(س) = ٤س^{٣} + ٤$$

نجعل $ق'(س) = ٠ \longrightarrow ٤س^{٣} + ٤ = ٠ \longrightarrow ٤س^{٣} = -٤$

$$\longleftarrow \quad س^{٣} = -١ \quad \longleftarrow \quad س = -١$$

سلوك الاقتران

إشارة مشتقة الاقتران +++++++++++ +++++++++++ ٠ ----------------------------

-١

يكون ق(س) متناقصاً في الفترة $]^-\infty ، ^-١]$

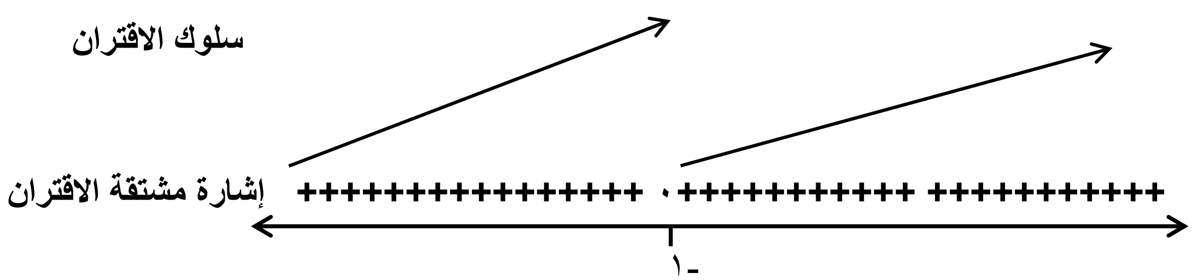
يكون ق(س) متزايداً في الفترة $[^-١ ، \infty[$

<u>مثال(٤)</u> : عين فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = \frac{س-١}{س+١}$ ، $س \neq {}^-١$

<u>الحل</u>: ق(س) متصل على ح – { -١ } لأنه اقتران نسبي وكل من البسط والمقام كثيرا حدود ، واستثناء -١ لأنها تعدم المقام

$$ق'(س) = \frac{(س+١)\times١-(س-١)\times١}{(س+١)^٢} = \frac{س+١-س+١}{(س+١)^٢} = \frac{٢}{(س+١)^٢}$$

نجعل $ق'(س) = ٠ \longleftarrow \frac{٢}{(س+١)^٢} = ٠ \longleftarrow$ لا يوجد س بحيث $ق'(س) = ٠$

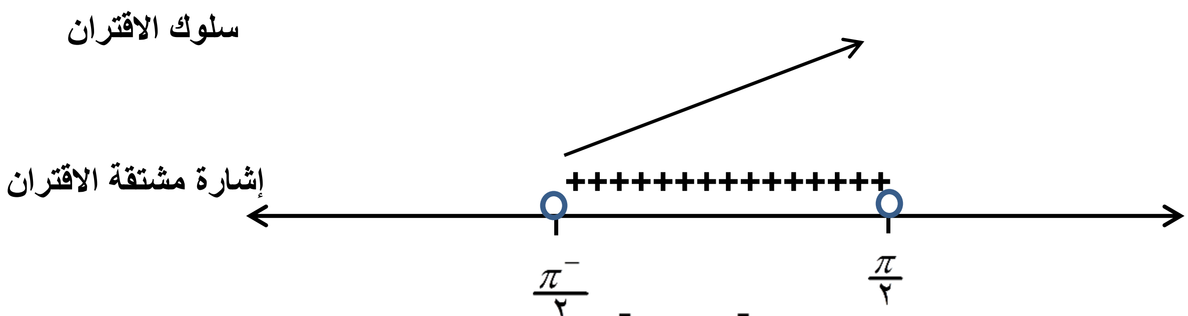


يكون منحنى ق(س) متزايدا في الفترتين $]^-\infty ، ^-١[$ ، $]^-١ ، \infty[$

<u>مثال (٥)</u> : أثبت أن منحنى الاقتران $ق(س) = ٢س + ظاس$ اقتران في الفترة $]\frac{^-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

<u>الحل</u> : ق(س) متصل على الفترة $]\frac{^-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$ لأنه مجموع كثير حدود و ظا س

$$ق'(س) = ٢ + قا^٢ س > ٠$$



يكون منحنى ق(س) متزايدا في الفترة $]\frac{^-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

مثال (٦) : عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{جاس} ، & ٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢} \\ \text{س+جتاس} ، & \frac{\pi}{٢} < \text{س} \le \pi \end{cases}$

في الفترة $[٠، \pi]$

الحل : ق(س) متصل في $[٠، \pi]$ ما عدا عند س $= \frac{\pi}{٢}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتاس} ، & ٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢} \\ ١-\text{جاس} ، & \frac{\pi}{٢} < \text{س} < \pi \\ \text{غير موجودة} ، & \text{س} = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

ق'$(\frac{\pi}{٢})$ غير موجودة ، س $= \frac{\pi}{٢}$

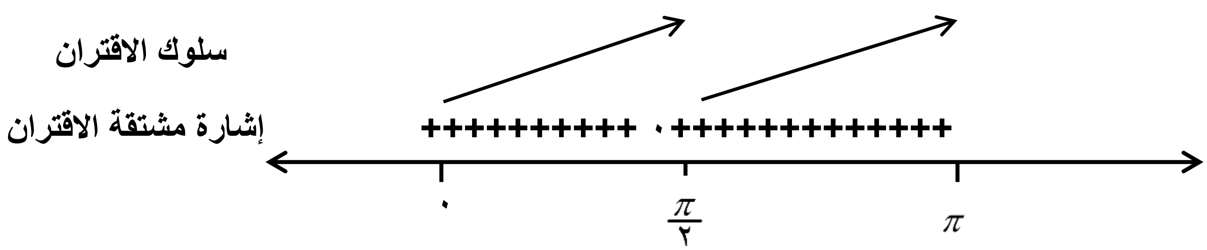
ق'(س) $= ٠$ ⟵ جتاس $= ٠$ ⟵ س $= \frac{\pi}{٢}$

لكن $\frac{\pi}{٢} \notin]٠، \frac{\pi}{٢}[$

⟵ ١-جاس $= ٠$ ⟵ جاس $= ١$ ⟵ س $= \frac{\pi}{٢}$

لكن $\frac{\pi}{٢} \notin]\frac{\pi}{٢}، \pi[$

⟵ ق'(س) $\ne ٠$ في الفترة $]٠، \pi[$



ويكون ق(س) متزايداً في الفترتين $]٠، \frac{\pi}{٢}[$ ، $]\frac{\pi}{٢}، \pi[$

مثال (٧): إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ق'(س) = هـ(س) ، هـ'(س) = −ق(س)

حدد فترات التزايد والتناقص الاقتران ك(س) ، علماً بأن ك(س) = ق^٢(س) + هـ^٢(س) + س^٢

الحل : ك(س) متصلا لأنه مجموع تربيع اقترانين متصلين وكثير حدود .

ك'(س) = ٢ق(س)ق'(س) + ٢هـ(س)هـ'(س) + ٢س

ك'(س) = ٢ق(س)هـ(س) + ٢هـ(س) × −ق(س) + ٢س

ك'(س) = ٢س

نجعل ك′(س) = ٠ ← ٢س = ٠ ← س = ٠

سلوك الاقتران

إشارة مشتقة الاقتران ---------------------------- ٠ +++++++++++ +++++++++++

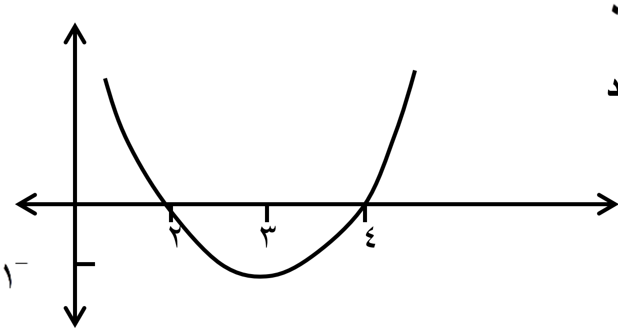
٠

يكون ك(س) متزايداً في الفترة]٠،∞[ومتناقصاً في الفترة]−∞،٠[

<u>مثال (٨)</u> : يمثل الشكل المجاور منحنى ق′(س) للاقتران ق(س) كثير حدود .

١) عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢) أوجد مجموعة حل المتباينة ق″(س) < ٠



<u>الحل</u> : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق على ح لأنه كثير حدود

سلوك الاقتران

إشارة مشتقة الاقتران ++++++++++++ ٠ ---------------------------- ٠ +++++++++++

٢ ٤

ق(س) متزايد في الفترة]−∞،٢]،[٤،∞[

٢) ق″(س) < ٠ عندما ق′(س) متناقص أي على الفترة]−∞،٣[

ق″(س) > ٠ عندما ق′(س) متزايد أي على الفترة]٣،∞[

مجموعة حل المتباينة ق″(س) < ٠ هي]−∞،٣[

الفترة مفتوحة من جهة ٣ لأن المتباينة بدون مساواة

القيم القصوى

تعريف القيم القصوى : ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال (ع)، ولتكن جـ ∈ ع ، عندها يكون للاقتران ق(س) :

١) قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ بحيث أن

$$ق(جـ) \geq ق(س) \quad \text{لجميع قيم} \quad س \in (ف \cap ع)$$

٢) قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ بحيث أن

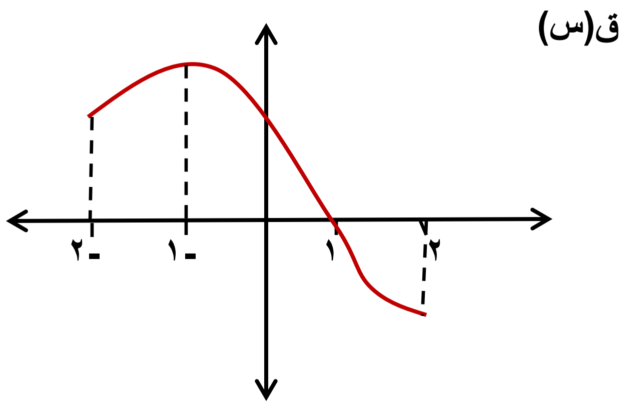
$$ق(جـ) \leq ق(س) \quad \text{لجميع قيم} \quad س \in (ف \cap ع)$$

٣) قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ وهي ق(جـ) إذا كانت $ق(جـ) \geq ق(س)$ لجميع قيم س ∈ ع

٤) قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ وهي ق(جـ) إذا كانت $ق(جـ) \leq ق(س)$ لجميع قيم س ∈ ع

وتسمى كل من القيم العظمى والصغرى قيماً قصوى، سواء كانت محلية او مطلقة

مثال(١) : بالاعتماد على الشكل المجاور لمنحنى الاقتران ق(س) في الفترة [-٢، ٢]. جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت)



الحل :

يوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = -٢

وهي ق(-٢)

يوجد للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند س = -١

وهي ق(-١)

يوجد للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = ٢ وهي ق(٢).

مثال(٢) : اذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈ [٠، ٣] جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

الحل : حسب التعريف ∀س ∈ [٠، ٣] يوجد قيمة صغرى محلية وهي = ٤ لأن $ق(س) \geq ٤$

كما أنه حسب التعريف ∀س ∈ [٠، ٣] يوجد قيمة عظمى محلية وهي = ٤ لأن $ق(س) \leq ٤$

تعريف : تسمى النقطة $(أ، ق(أ))$ نقطة حرجة للاقتران ق(س) ، إذا كانت :

١) $أ \in$ مجال ق(س)

٢) $ق'(أ) = ٠$ أو $ق'(أ)$ غير موجودة

مثال(٣) : عين جميع النقاط الحرجة للاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٣ & ، \ ^-١ < س \le ٢ \\ ٣ - س & ، \ ٢ < س \le ٣ \end{cases}$

في الفترة $[^-١، ٣]$

الحل : ق(س) متصل في الفترتين لانهما كثيرا حدود

عند س = ٢ (نقطة تحول)

ق(٢) = ٤- ٣ = ١

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣ - ٢ = ١$ ← ق(س) متصل عند س=٢

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٤ - ٣ = ١$

ق'(س) = $\begin{cases} ٢س & ، \ -١ < س < ٢ \\ -١ & ، \ ٢ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \ س = ٢ ، -٣ \end{cases}$

$ق'(٢)^+ = ^-١$

$ق'(٢)^- = ٤$ ← $ق'(٢)$ غير موجودة

$ق'(٣)$ غير موجودة لأنـها طرف فترة

نجعل $ق'(س) = ٠$ ← $س = ٠ \in [^-١، ٢]$

ولا يوجد قيم لـ $س \in]٢، ٣[$ بحيث $ق'(س) = ٠$

النقط الحرجة هي : (٠ ، ق(٠)) ، (٢ ، ق(٢)) ، (٣ ، ق(٣))

: (٠ ، -٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠)

ملاحظة : $ق'(س)$ غير موجودة عند :

١) أطراف الفترة المغلقة المعرف عليها الاقتران

٢) إذا كان $ق'(س)$ اقتران نسبي فتكون غير موجودة عند أصفار المقام

٣) إذا كان $ق'(س)$ قتران متشعب فتكون المشتقة غير موجودة عند : نقاط عدم الاتصال،

و عند $ق'(س)^+ \neq ق'(س)^-$ لنقاط التحول.

مثال(٤) : جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = ٣س^٢ - س^٣$ ، $س \in [^-٢، ٣]$

الحل : $ق'(س) = ٦س - ٣س^٢$ ، $س \in]^-٢، ٣[$

$ق'(س) = ٠ \longleftarrow ٦س - ٣س^٢ = ٠ \longleftarrow ٣س(٢ - س) = ٠$

$\longleftarrow$ س = ٠ ، ٢

$س = ٠ \in [-٢ ، ٣]$

$س = ٢ \in [-٢ ، ٣]$

$ق'(س)$ غير موجودة : عند الاطراف : س = -٢ ، ٣

$س = ^-٢ \in [-٢ ، ٣]$ $\longleftarrow$ عند س = -٢ يوجد نقطة حرجة

$س = ٣ \in [-٢ ، ٣]$ $\longleftarrow$ عند س = ٣ يوجد نقطة حرجة

النقاط الحرجة هي : (٠ ، ق(٠)) ، (٢ ، ق(٢)) ، (-٢ ، ق(-٢)) ، (٣ ، ق(٣))

: (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٤) ، (-٢ ، ٢٠) ، (٣ ، ٠)

مثال (٥) : جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = جاس - \frac{١}{٣}جا^٣س$ ، $س \in [٠، \pi]$

الحل : $ق'(س) = جتاس - جا^٢س جتاس$ ، $س \in]٠، \pi[$

$ق'(س) = ٠ \longleftarrow جتاس - جا^٢س جتاس = ٠$

$جتاس(١ - جا^٢س) = ٠ \longleftarrow جتاس(جتا^٢س) = جتا^٣س = ٠$

$\longleftarrow جتاس = ٠ \longleftarrow س = \frac{\pi}{٢} \in [٠، \pi]$

$ق'(س)$ غير موجودة عند الاطراف: $س = ٠ \in [٠، \pi]$

$س = \pi \in [٠، \pi]$

النقط الحرجة هي : (٠ ، ق(٠)) ، $\left(\frac{\pi}{2} ، ق\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ، $\left(\pi ، ق(\pi)\right)$

(٠ ، ٠) ، $\left(\frac{\pi}{2} ، \frac{2}{3}\right)$ ، $\left(\pi ، ٠\right)$

مثال (٦) : جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \sqrt[3]{4 - س^2}$ ، $س \in [-3 ، 3]$

الحل : $ق'(س) = \frac{1}{3}(4 - س^2)^{\frac{-2}{3}} \times -2س$ ، $س \in]-3 ، 3[$

$$ق'(س) = \frac{-2س}{3\sqrt[3]{(4 - س^2)^2}}$$

$ق'(س) = 0 \longleftarrow -2س = 0 \longleftarrow س = 0 \in [-3 ، 3]$

$ق'(س)$ غير موجودة عند الاطراف: $س = -3 \in [-3 ، 3]$

$س = 3 \in [-3 ، 3]$

$ق'(س)$ غير موجودة عند أصفار مقام المشتقة : $4 - س^2 = 0$

$\longleftarrow س = 2 \in [-3 ، 3]$

$\longleftarrow س = -2 \in [-3 ، 3]$

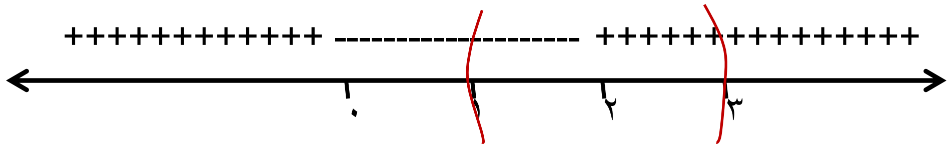
النقط الحرجة هي : (٠ ، ق(٠)) ، (٢ ، ق(٢)) ، (-٢ ، ق(-٢)) ، (٣ ، ق(٣)) ، (-٣ ، ق(-٣))

$(0 ، \sqrt[3]{4})$ ، (٢ ، ٠) ، (-٢ ، ٠) ، $(3 ، \sqrt[3]{-5})$ $(-3 ، \sqrt[3]{-5})$

مثال (٧) : جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = |س^2 - 2س|$ ، $س \in [1 ، 3]$

الحل : اعادة تعريف الاقتران : $س^2 - 2س = 0 \longleftarrow س(س - 2) = 0$

$\longleftarrow س = ٠ ، ٢$



$$ق(س) = \begin{cases} -(س^2 - 2س) ، & 1 \le س \le 2 \\ س^2 - 2س ، & 2 \le س \le 3 \end{cases}$$

ق(س) متصل على [١ ، ٣] لأنه كثير حدود

ق′(س) = {
٢−٢س ، ١< س <٢
٢س−٢ ، ٢< س <٣
غير موجودة ، س = ١ ، ٣ ، ٢

ق′(٢)$^{+}$ = ٢

ق′(٢)$^{-}$ = ٢$^{-}$ ← ق′(٢) غير موجودة

ق′(س) غير موجودة عند الاطراف : س = ١ ∈ [١،٣]

س = ٣ ∈ [١،٣]

ق′(س) = ٠ ← ٢ − ٢س = ٠ ← س = ١ ∉]١،٢[

← ٢س − ٢ = ٠ ← س = ١ ∉]٢،٣[

<u>النقط الحرجة هي</u> : (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ق(٢)) ، (٣ ، ق(٣))

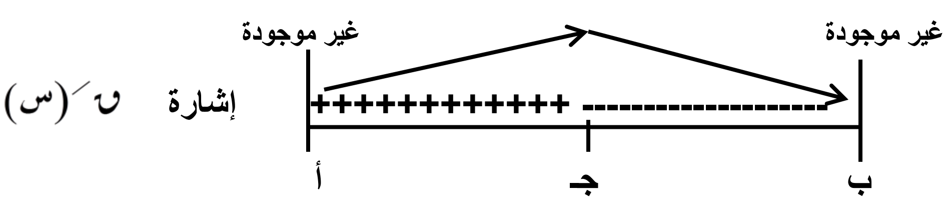
(١ ، ١) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٣)

<u>القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الاولى والثانية :</u>

<u>اختبار المشتقة الاولى لتعيين القيم القصوى :</u>

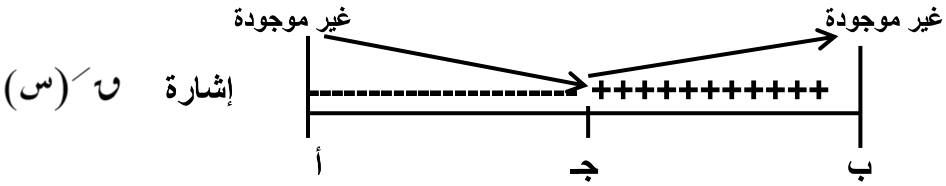
إذا كان ق(س) <u>اقترانا متصلا</u> في الفترة [أ ، ب] وكانت <u>(جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة</u> للاقتران ق(س) ، جـ ∈]أ،ب[فإنه:

١) إذا كان ق′(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ، وكان ق′(س) < ٠ عندما جـ < س < ب



فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

٢) إذا كان ق/(س) < ٠ عندما أ > س > جـ ، وكان ق/(س) > ٠ عندما جـ > س > ب



فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

مثال(١) : جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^٣ − ٣س ، س ∈ [−٣،٣]

الحل : ق/(س) = ٣س^٢ − ٣

ق/(س) = ٠ ⟵ ٣س^٢ − ٣ = ٠ ⟵ ٣س^٢ = ٣

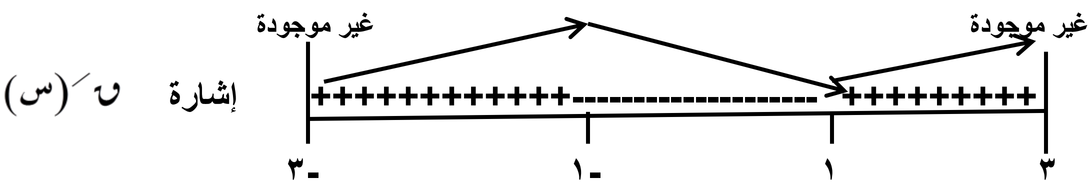
⟵ س^٢ = ١ ⟵ س = ±١ ∈ **المجال**

ق/(س) غير موجودة عند الأطراف ⟵ عند س = ٣ ، -٣

ق(١) = ١-٣ = -٢ ق(٣) = ٢٧ -٩ = ١٨

ق(-١) = -١ + ٣ = ٢ ق(-٣) = -٢٧ + ٩ = -١٨

النقط الحرجة : (١ ، -٢) ، (-١ ، ٢) ، (٣ ، ١٨) ، (-٣ ، -١٨)



عند س = ٣ ، يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(٣) = ١٨ وهي قيمة عظمى محلية و مطلقة

عند س = -١ ، يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(-١) = ٢

عند س = -٣ ، يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(-٣) = -١٨ وهي قيمة صغرى محلية و مطلقة

عند س = ١ ، يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(١) = -٢

مثال(٢) : **جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران** $ق(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$

الحل : **المجال هو ح** ⟵ **لا يوجد أطراف**

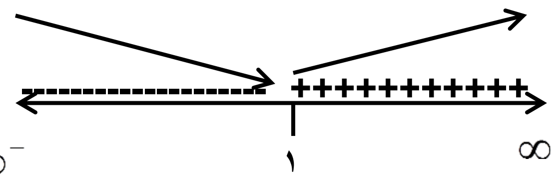
$ق'(س) = ٢س - ٢$

$ق'(س) = ٠ \longrightarrow ٢س - ٢ = ٠ \longrightarrow ٢س = ٢$

$\longrightarrow س = ١ \in ح$

ق(١) = ١-٢-٣ = -٤

النقط الحرجة : (١ ، -٤)



عند س = ١ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(١) = -٤

ملاحظة : **(إذا كان عند ∞، -∞ قيمة عظمى ، تلغي القيمة العظمى المطلقة عند أي نقطة اخرى)**

(إذا كان عند ∞، -∞ قيمة صغرى ، تلغي القيمة الصغرى المطلقة عند أي نقطة اخرى)

مثال(٣) : **جد القيم القصوى (ان وجدت) للاقتران** $ق(س) = جاس - جتاس$ ، $س \in [٠، \pi]$

الحل : $ق'(س) = -جاس - جتاس = -(جاس + جتاس)$

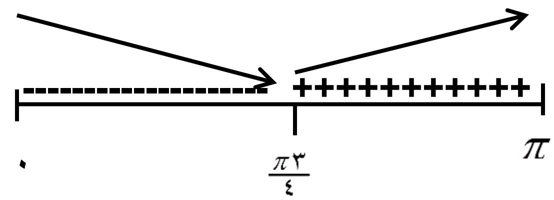
$ق'(س) = ٠ \longrightarrow -(جاس + جتاس) = ٠ \longrightarrow جاس = -جتاس$

$\longrightarrow \frac{جاس}{جتاس} = \frac{-جتاس}{جتاس} \longrightarrow ظاس = -١ \longrightarrow س = ١٣٥^{\circ} = \frac{٣\pi}{٤}$

$ق'(س)$ **غير موجودة عند الأطراف** $\longrightarrow س = ٠ ، س = \pi$

$ق(٠) = ١$ ، $ق(\pi) = -١$ ، $ق(\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{-٢ \times \sqrt{٢}}{٢} = -\sqrt{٢}$

إشارة $ق^{\prime}(س)$



يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند س= ٠ ، وقيمتها $ق(٠) = ١$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $س = \pi$ **، وقيمتها** $ق(\pi) = ^{-}١$

يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $س = \frac{٣\pi}{٤}$ **وقيمتها** $ق(\frac{٣\pi}{٤}) = ^{-}\sqrt{٢}$

<u>مثال(٤)</u> : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ٥$ ، $س \in [^{-}٣ ، ١]$

<u>الحل</u> : $ق^{\prime}(س) = ٢س - ٦$

$ق^{\prime}(س) = ٠$ ⟵ $٢س - ٦ = ٠$ ⟵ $٢س = ٦$

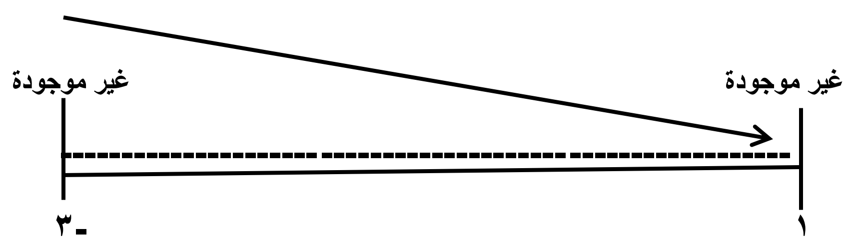
⟵ $س = ٣ \not\in [^{-}٣ ، ١]$ ⟵ ليست حرجة

$ق^{\prime}(س)$ **غير موجودة عند الأطراف** ⟵ **عند س = -٣ ، ١**

ق(١) = ١-٦+٥ = ٠ **ق(-٣) = ٩ +١٨ + ٥ = ٣٢**

النقط الحرجة : (١ ، ٠) ، (-٣ ، ٣٢)

إشارة $ق^{\prime}(س)$

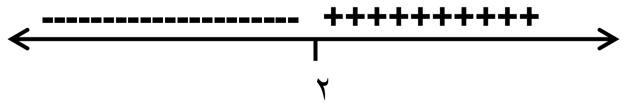


عند س = -٣ ، يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وقيمتها ق(-٣) = ٣٢

عند س = ١ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(١) = ٠

<u>مثال(٥)</u> : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = س^{٢} |س - ٢|$ ، $س \in ع$

الحل : اعادة تعريف | س -٢ | ⟵ س − ٢ = ٠ ⟵ س = ٢



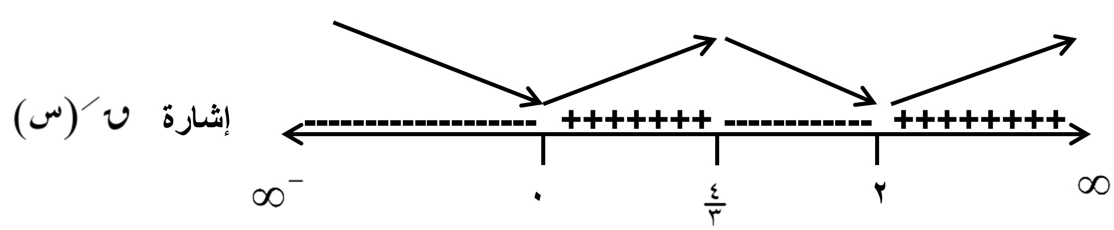
ق(س) = { س^{٢}(س−٢) ، س ≥ ٢ ؛ س^{٢}(٢ − س) ، س < ٢ } = { س^{٣} − ٢س^{٢} ، س ≥ ٢ ؛ ٢س^{٢} − س^{٣} ، س < ٢ }

ق$'$(س) = {
٣س^{٢} − ٤س ، س > ٢
٤س − ٣س^{٢} ، س < ٢
غير موجودة ، س = ٢

ق$'$(٢)$^{+}$ = ٤
ق$'$(٢)$^{-}$ = $^{-}$٤ ⟵ ق$'$(٢) غير موجودة

ق$'$(س) = ٠ ⟵ ٣س^{٢} − ٤س = ٠ ⟵ س(٣س − ٤) = ٠ ⟵ س = ٠ ∉]٢،∞[
⟵ س = $\frac{٤}{٣}$ ∉]٢،∞[

ق$'$(س) = ٠ ⟵ ٤س − ٣س^{٢} = ٠ ⟵ س(٤ − ٣س) = ٠ ⟵ س = ٠ ∈]$^{-}$∞،٢[
⟵ س = $\frac{٤}{٣}$ ∈]$^{-}$∞،٢[



عند س = ٠ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٠) = ٠

عند س = $\frac{٤}{٣}$ ، يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(س) = $\frac{١٦}{٩}$ × $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٣٢}{٢٧}$

عند س = ٢ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٢) = ٠

<u>مثال(٦)</u> : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = س^{٣} - \frac{س^{٤}}{٤}$ ، $س \in [^{-}١،٤]$

<u>الحل</u> : $ق^{\prime}(س)$ **غير موجودة عند الأطراف** $\longleftarrow$ **عند س = -١ ، س = ٤**

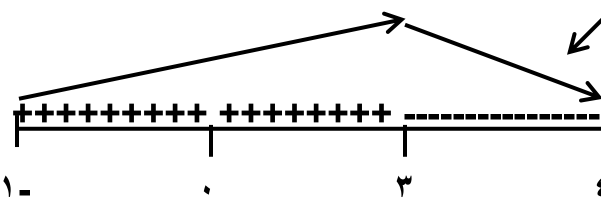
$ق^{\prime}(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}$

$ق^{\prime}(س) = ٠ \longleftarrow ٣س^{٢} - س^{٣} = ٠ \longleftarrow س^{٢}(٣ - س) = ٠$

$\longleftarrow س = ٠ \in [^{-}١،٤]$

$\longleftarrow س = ٣ \in [^{-}١،٤]$ $\quad$ $ق(\frac{٧}{٢}) = \frac{^{-}٤٩}{٨}$

إشارة $ق^{\prime}(س)$



عند س = -١ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(-١) = $\frac{^{-}٥}{٤}$

عند س = ٣ ، يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٣) = $\frac{٢٧}{٤}$

عند س = ٤ ، يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(٤) = ٠

<u>مثال(٧)</u> : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = \sqrt{جاس}$ ، $س \in [٠،\pi]$

<u>الحل</u> : $ق^{\prime}(س)$ **غير موجودة عند الأطراف** $\longleftarrow$ **عند س = ٠ ،** $س = \pi$

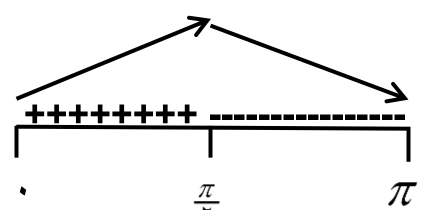
$ق^{\prime}(س) = \frac{جتاس}{٢\sqrt{جاس}}$

$ق^{\prime}(س) = ٠ \longleftarrow جتاس = ٠ \longleftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

$ق^{\prime}(س)$ **غير موجودة عند أصفار المقام** $\longleftarrow ٢\sqrt{جاس} = ٠$

$\longleftarrow جاس = ٠ \longleftarrow س = ٠ ، \pi$

إشارة $ق^{\prime}(س)$

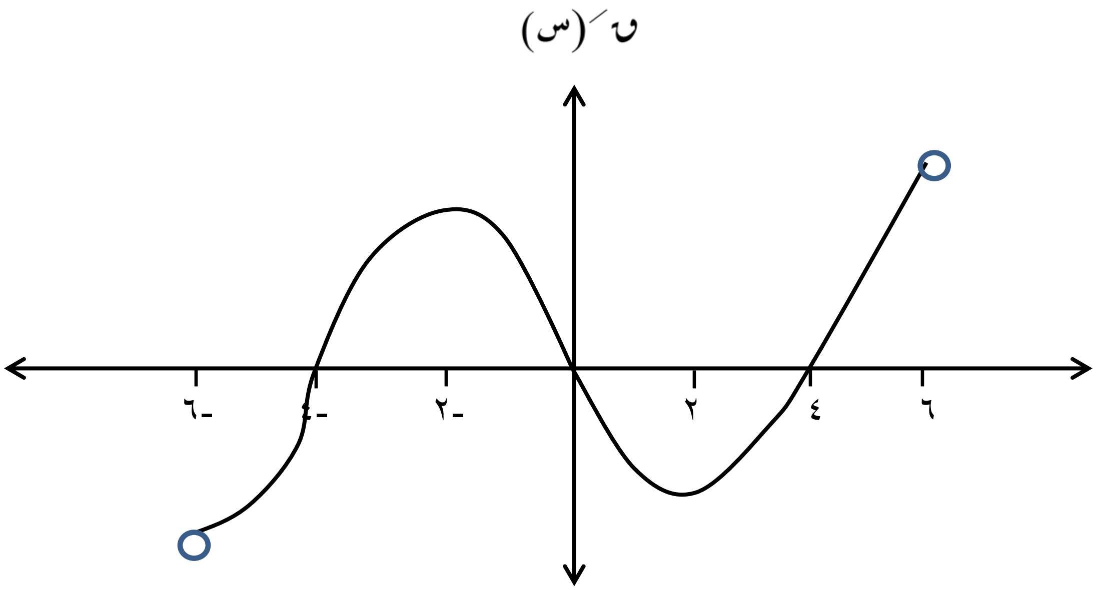


عند س = ٠ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٠) = ٠

عند $س = \frac{\pi}{٢}$ **، يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وقيمتها** $ق(\frac{\pi}{٢}) = ١$

عند $س = \pi$ **، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها** $ق(\pi) = ٠$

مثال(٨) : اعتماداً على الشكل أدناه الذي يمثل منحنى $ق'(س)$ **، جد قيم س التي يكون عندها نقط حرجة ، وفترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) والقيم القصوى المحلية .**

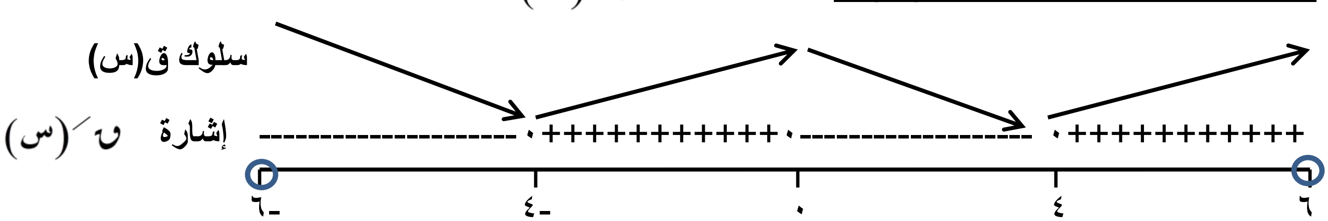


النقاط الحرجة : $ق'(س)$ **غير موجودة عند الأطراف : عند س = -٦ ، عند س = ٦**

$ق'(س) = ٠$ **عند نقاط التقاطع مع محور السينات : عند س = ٤ ، س=-٤ ، س = ٠**

النقط الحرجة : (-٦ ، ق(-٦)) ، (٦ ، ق(٦)) ، (٤ ، ق(٤)) ، (-٤ ، ق(-٤)) ، (٠ ، ق(٠))

فترات التزايد الناقص للاقتران ق(س) : نبحث اشارة $ق'(س)$



ق(س) متزايداً في الفترات : [-٤ ، ٠] ، [٤ ، ٦]

ق(س) متناقصاً في الفترات : [-٦ ، -٤] ، [٠ ، ٤]

القيم القصوى المحلية :

عند س = -٦ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(-٦)

عند س = -٤ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(-٤)

عند س = ٠ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(٠)

عند س = ٤ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(٤)

عند س = ٦ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(٦)

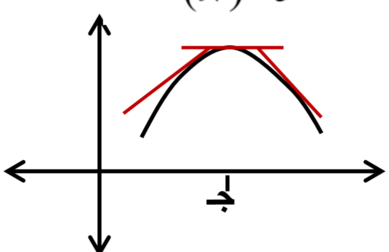
اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى :

نظرية : إذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوي جـ ، وكان $ق'(جـ) = ٠$

فإنه :

١) إذا كان $ق''(جـ) < ٠$ **فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية**

٢) إذا كان $ق''(جـ) > ٠$ **فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية.**



يمثل الشكل التالي منحنى ق(س) حيث ، حيث $ق'(جـ) = ٠$ **، أي أن المماس عند جـ أفقياً ،** $ق''(جـ) < ٠$ **(لأن المماسات في جوار جـ تقع فوق المنحنى ، وهذا يعني أن ق(جـ) قيمة عظمى محلية.**

مثال(٩) : باستخدام اختبار المشتقة الثانية ، جد القيم العظمى والصغرى (ان وجدت) للاقتران

$$ق(س) = ٢س^٣ - ٦س$$

الحل: $ق'(س) = ٦س^٢ - ٦$

$ق'(س) = ٠ \longrightarrow ٦س^٢ - ٦ = ٠ \longrightarrow س^٢ - ١ = ٠ \longrightarrow$ **س = -١ ، ١**

$ق''(س) = ١٢س$

$ق''(١) = ١٢ > ٠ \longrightarrow$ **يوجد عند س = ١ قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(١) = -٤**

$ق''(-١) = -١٢ < ٠ \longrightarrow$ **يوجد عند س = -١ قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(-١) = ٤**

ملاحظة : إذا كان $ق''(جـ) = ٠$ **أو غير موجودة ، فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل وعندها نعود الى اختبار المشتقة الاولى**

مثال(١٠) : إذا كان ق(س) = س^{٤} ، س ∋ ح أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران.

الحل : ق´(س) = ٤س^{٣}

ق´(س) = ٠ ⟵ ٤س^{٣} = ٠ ⟵ **س = ٠**

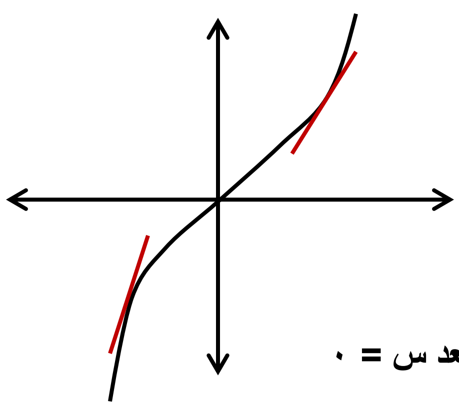
ق´´(س) = ١٢س^{٢}

ق´´(٠) = ٠ ⟵ **اختبار المشتقة الثانية يفشل** ⟵ **نعود لاختبار المشتقة الأولى**

إشارة ق´(س) **--------------------------------- ++++++++++++++++++++**

٠

يوجد عند س = ٠ قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(٠) = ٠



التقعر ونقطة الانعطاف:

بالرجوع للشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) = س^{٣}

*** الاقتران متزايد على ح**

*** اتجاه تقوس المنحنى قبل س = ٠ ، يختلف عن اتجاه تقوس المنحنى بعد س = ٠**

(عندما س < ٠ ، المنحنى يقع تحت جميع مماساته ، وعندما س > ٠ المنحنى يقع فوق جميع مماساته)

تعريف : يُقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعر للأعلى في فترة من مجاله، إذا كان دائماً فوق جميع مماساته في هذه الفترة .

وأنه مقعر للأسفل ، إذا كان دائماً تحت جميع مماساته في هذه الفترة .

نظرية: (اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية)

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] ، وكانت ق′(س) ، ق″(س) معرفين على]أ،ب[، فإنه :

١) إذا كانت ق″(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ،ب[فان ق(س) يكون مقعراً للأعلى في الفترة [أ ، ب]

٢) إذا كانت ق″(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]أ،ب[فان ق(س) يكون مقعراً للأسفل في الفترة [أ ، ب]

مثال(١) : **إذا كان ق(س) = س٣ + ٦س٢ − ٢س − ٥ ، عين الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) مقعراً للأعلى ، والفترات التي يكون فيها منحنى ق(س) مقعراً للأسفل**

الحل : ق′(س) = ٣س٢ + ١٢س − ٢

ق″(س) = ٦س + ١٢

نبحث في اشارة ق″(س) ⟵ ٦س + ١٢ = ٠ ⟵ ٦س = -١٢ ⟵ س = -٢

تقعر منحنى ق(س)

إشارة ق″(س) ---------------------------- +++++++++++++++++

-٢

ق″(س) < ٠ **عندما س < -٢ ⟵ ق(س) مقعر للأسفل في الفترة**]-∞، -٢[

ق″(س) > ٠ **عندما س > -٢ ⟵ ق(س) مقعر للأعلى في الفترة**]-٢، ∞[

⟵ النقطة (-٢ ، ق(-٢)) = (-٢ ، ١٥) التي يغير عندها منحنى الاقتران اتجاه تقعره تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) .

تعريف : **(نقطة الانعطاف)**

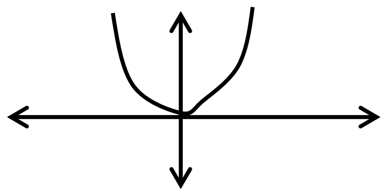
ليكن ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ ، تسمى النقطة (جـ ، ق(جـ)) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران

إذا <u>غير منحنى الاقتران ق(س) اتجاه تقعره عند النقطة جـ</u> من أعلى الى أسفل أو بالعكس.

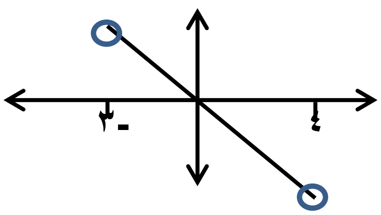
<u>ملاحظة</u> : عند نقطة الانعطاف (جـ ، ق(جـ)) تكون $ق''(جـ) = ٠$ أو غير موجودة ، إلا أنه ليس شرطاً كافياً لوجود نقطة الانعطاف

مثال : $ق(س) = س^٤ \longleftarrow ق''(س) = ١٢ س^٢ \longleftarrow ١٢ س^٢ = ٠ \longleftarrow س = ٠$

تحقق الشرط لكن النقطة (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) ليست نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) لأنه مقعر للأعلى دائما.



<u>مثال(٢)</u> : يمثل المنحنى التالي منحنى $ق''(س)$ للاقتران ق(س) المتصل على الفترة [-٣ ، ٤]



١) عين مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س)

٢) عين نقطة/ نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل : بما أن الشكل يوضح إشارة $ق''(س)$:

*** $ق''(س) > ٠$ على الفترة]-٣، ٠[$\longleftarrow$ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [-٣ ، ٠]**

*** $ق''(س) < ٠$ على الفترة]٠، ٤[$\longleftarrow$ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [٠ ، ٤]**

*** النقطة (٠ ، ق(٠)) هي نقطة الانعطاف لأن ق(س) متصل عند س = ٠ ويغير المنحنى اتجاه تقعره عندها .**

<u>مثال(٣)</u> : إذا كان $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، أوجد :

١) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق(س)

٢) نقطة / نقط الانعطاف (إن وجدت)

<u>الحل</u> : $ق'(س) = ١ + \frac{-١}{س^٢}$

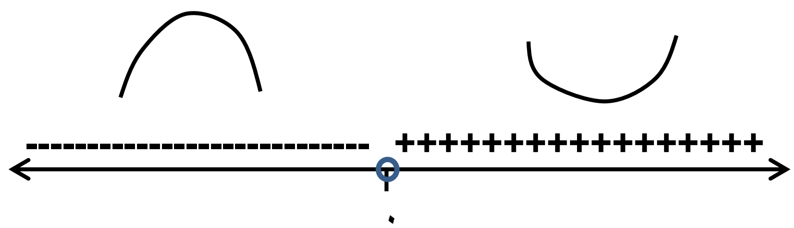
$$ق''(س) = \frac{س^٢ \times ٠ - (-١ \times ٢س)}{س^٤} = \frac{٢س}{س^٤} = \frac{٢}{س^٣}$$

ق″(س) = ٠ ← $\frac{٢}{س^{٣}}$ = ٠ ← لا يوجد

ق″(س) غير موجودة عندما المقام = ٠ ← س^{٣} = ٠ ← س = ٠

تقعر منحنى ق(س)

إشارة ق″(س) ---------------------------- ++++++++++++++++++



* ق″(س) > ٠ على الفترة]٠،∞[← **منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة]٠،∞[**

* ق″(س) < ٠ على الفترة]$^{-}$∞،٠[← **منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة]$^{-}$∞،٠[**

* **الاقتران يغير تقعره عند س = ٠ ولكن ق(س) غير متصل عند س = ٠ لأنه ليس معرفا عندها**

← **لا توجد نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)**

مثال(٤) : إذا كان ق(س) = س^{٣}(٤−س) ، س ∈ ح ، أوجد :

١) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق(س) ٢) نقطة / نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل: ق(س) = ٤س^{٣} −س^{٤}

ق′(س) = ١٢ س^{٢} − ٤س^{٣}

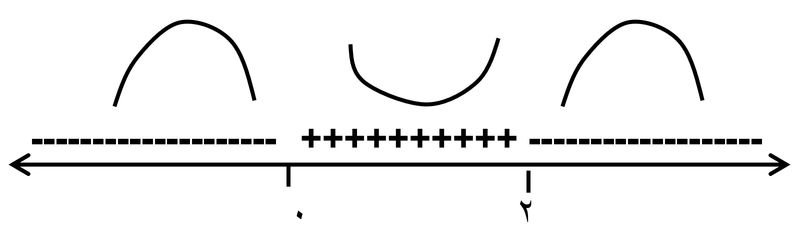
ق″(س) = ٢٤س − ١٢ س^{٢}

ق″(س) = ٠ ← ٢٤س − ١٢ س^{٢} = ٠ ← ١٢ س(٢ − س) = ٠

← **س = ٠ ، س =٢**

تقعر منحنى ق(س)

إشارة ق″(س) -------------------- ++++++++++ -------------------



* ق″(س) > ٠ على الفترة]٠،٢[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [٠،٢]

* ق″(س) < ٠ على الفترة]−∞،٠[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة]−∞،٠]

وكذلك على الفترة]٢،∞[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [٢،∞[

* النقطة (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

النقطة (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١٦) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال(٥) : إذا كان ق(س) = س − جاس ، س ∈ [٠،٢π] ، أوجد :

١) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق(س) ٢) نقطة / نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل: ق′(س) = ١ − جتاس

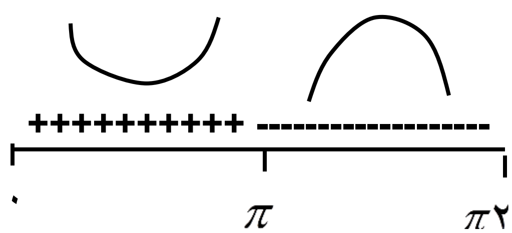
ق″(س) = جاس

ق″(س) = ٠ ⟵ جاس = ٠ ⟵ س = ٠ ، π

(اقتران الجيب موجب في الربع الاول والثاني وسالب في الربع الثالث والرابع)

تقعر منحنى ق(س)

إشارة ق″(س)



* ق″(س) > ٠ على الفترة]٠،π[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [٠،π]

* ق″(س) < ٠ على الفترة]π،٢π[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [π،٢π]

بما أن الاقتران متصل عند س = π ويغير اتجاه تقعره في جوارها ⟵

النقطة (π، ق(π)) = (π،π) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال (٦) : اذا كان ق(س) = ⅓س^{٣} − ½س^{٢} − ٢س ، س ∈ [−٥،٥]

١) جد النقط الحرجة ٢) حدد فترات (مجالات) التزايد والتناقص

٣) حدد القيم القصوى (العظمى والصغرى)   ٤) عين مجالات التقعر

٥) جد نقطة/ نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل : ق′(س) = س^{٢} − س − ١٢

ق′(س) = ٠ ← س^{٢} − س − ١٢ = ٠ ← (س − ٤)(س + ٣) = ٠

← (س − ٤) = ٠ ← س = ٤ ∈ [$^{-}$٥، ٥]

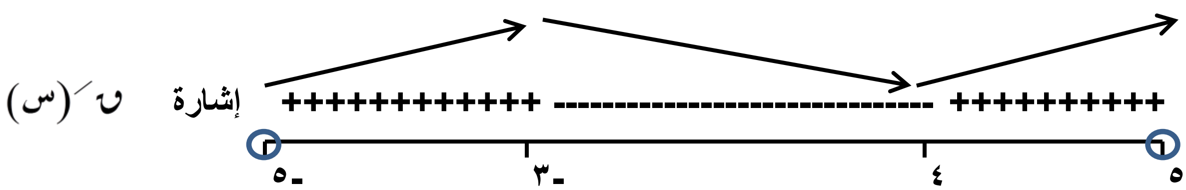
← (س + ٣) = ٠ ← س = $^{-}$٣ ∈ [$^{-}$٥، ٥]

ق′(س) غير موجودة عند الأطراف ← س = -٥ ، ٥

١) النقط الحرجة : (-٥، ق(-٥)) ، (٥ ، ق(٥)) ، (٤ ، ق(٤)) ، (-٣ ، ق(-٣))

: ($^{-}$٥، $\frac{٣٥}{٦}$) ، (٥، $\frac{^{-}١٨٥}{٦}$) ، (٤، $\frac{^{-}٢٠٤}{٦}$) ، ($^{-}$٣، $\frac{٤٥}{٢}$)

٢)



ق متزايد على الفترة [-٥ ، -٣] ، [٤ ، ٥]

ق متناقص على الفترة [-٣ ، ٤]

٣) يوجد للاقتران ق(س) قيم عظمى محلية ومطلقة عند س = -٣ وقيمتها ق(-٣) = $\frac{٤٥}{٢}$

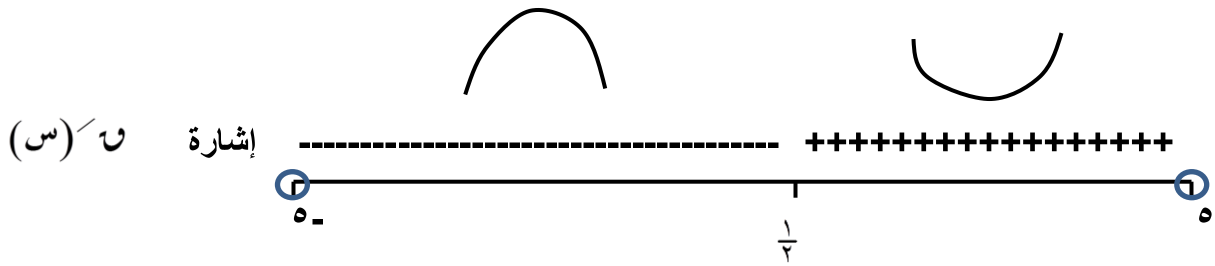
يوجد للاقتران ق(س) قيم عظمى محلية عند س = ٥ وقيمتها ق(٥) = $\frac{^{-}١٨٥}{٦}$

يوجد للاقتران ق(س) قيم صغرى محلية ومطلقة عند س = ٤ وقيمتها ق(٤) = $\frac{^{-}٢٠٨}{٦}$

يوجد للاقتران ق(س) قيم صغرى محلية عند س = -٥ وقيمتها ق(-٥) = $\frac{٣٥}{٦}$

٤) ق″(س) = ٢س − ١

ق″(س) = ٠ ← ٢س − ١ = ٠ ← ٢س = ١ ← س = $\frac{١}{٢}$



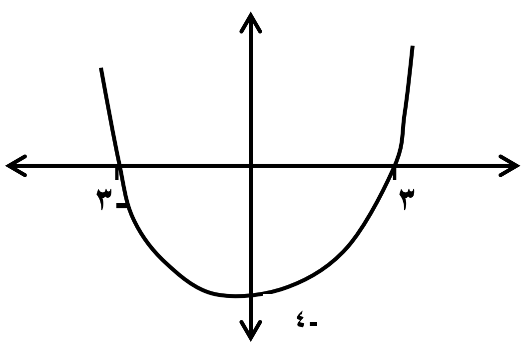
* $ق''(س) > ٠$ على الفترة $]\frac{1}{2}،٥[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة $[\frac{1}{2}،٥]$

* $ق''(س) < ٠$ على الفترة $]^{-}٥،\frac{1}{2}[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة $[^{-}٥،\frac{1}{2}]$

بما أن الاقتران متصل عند $س = \frac{1}{2}$ ويغير اتجاه تقعره في جوارها ⟵

النقطة $(\frac{1}{2}،ق(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}،\frac{^{-}١٤٦}{٢٤})$ نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال (٧) : استخدم الشكل التالي الذي يمثل منحنى $ق'(س)$ لإيجاد ما يلي :



١) قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتران ق(س) .

٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

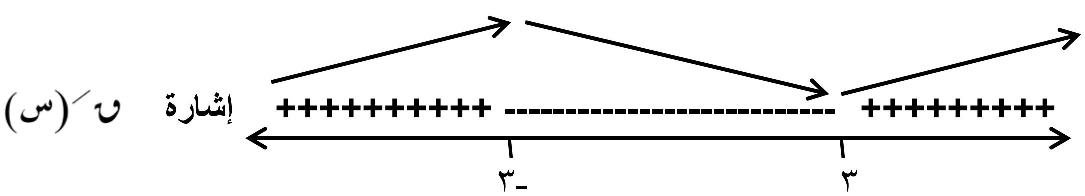
٣) نقط القيم القصوى للاقتران ق(س).

٤) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) .

٥) نقطة/ نقط الانعطاف للاقتران ق(س).

الحل : ١) $ق'(س) = ٠$ عند س = -٣ ، ٣ (نقط حرجة)

٢)



ق(س) متزايد على الفترة $]^{-}\infty،^{-}٣]$ ، $[٣،\infty[$

ق(س) متناقص على الفترة $[^{-}٣،٣]$

٣) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = -٣ وقيمتها ق(-٣) ، نقطة قيمة عظمى (-٣،ق(-٣))

للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٣ وقيمتها ق(٣) ، نقطة قيمة صغرى (٣،ق(٣))

٤) ق′(س) متزايد على الفترة [٠،∞[⟵ ق″(س) > ٠

ق′(س) متناقص على الفترة]−∞،٠] ⟵ ق″(س) < ٠

إشارة ق″(س)   +++++++++++++++++ --------------------------------- (٠)

* ق″(س) > ٠ على الفترة]٠،∞[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [٠،∞[

* ق″(س) < ٠ على الفترة]−∞،٠[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة]−∞،٠]

بما أن الاقتران متصل عند س = ٠ ويغير اتجاه تقعره في جوارها ⟵

النقطة (٠،ق(٠)) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

تطبيقات على القيم القصوى:

مثال(١) : عددان مجموعهما ١٢ ، جد العددين بحيث يكون مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن .

الحل : نفرض أن العددين : س ، ص

س + ص = ١٢ ⟵ ص = ١٢ – س

مجموع مربعيهما = م = س^{٢} + ص^{٢} ⟵ م = س^{٢} + (١٢ – س)^{٢}

م = س^{٢} + ١٤٤ – ٢٤س + س^{٢}

م = ٢س^{٢} – ٢٤س + ١٤٤

م′ = ٤س – ٢٤

نجعل م′ = ٠ ⟵ ٤س – ٢٤ = ٠ ⟵ ٤س = ٢٤ ⟵ س = ٦

إشارة م′(س)   +++++++++++++++++ ٠ --------------------------------- (٦)

يوجد للاقتران م قيمة صغرى عند س = ٦ ⟵ ص = ١٢ – ٦ = ٦

<u>أو يمكن الحل باستخدام اختبار المشتقة الثانية :</u>

م″ = ٤ ⟵ م″(٦) = ٤ $>$ ٠ ⟵ يوجد قيمة صغرى عند س=٦

<u>مثال(٢)</u> : ما مساحة أكبر مستطيل يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع بعديه ٢٠ سم ؟

<u>الحل</u> : نفرض أن بعدي المستطيل : س ، ص

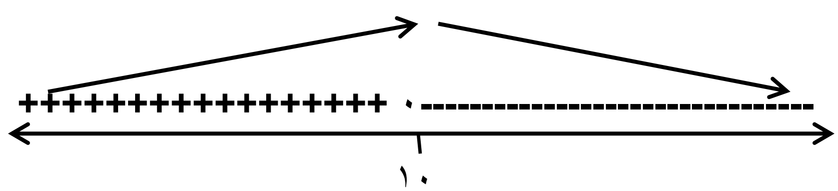
س + ص = ٢٠ ⟵ ص = ٢٠ – س

مساحة المستطيل = م = س × ص = س(٢٠ – س) = ٢٠س – س^{٢}

م′ = ٢٠ – ٢س

نجعل م′ = ٠ ⟵ ٢٠ – ٢س = ٠ ⟵ ٢س = ٢٠ ⟵ س = ١٠

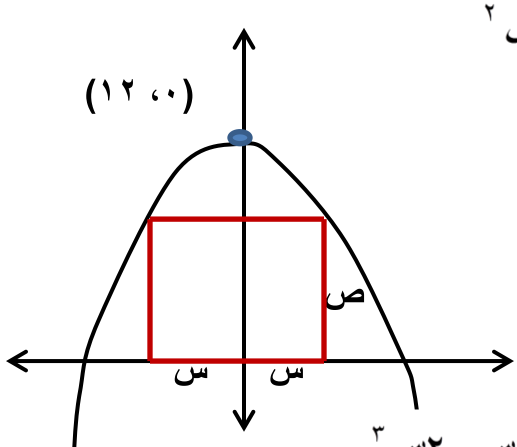
إشارة م′(س)



يوجد للاقتران م قيمة عظمى عند س = ١٠سم ⟵ ص = ٢٠ – ١٠ = ١٠ سم

مساحة أكبر مستطيل يمكن تكوينه = ١٠×١٠ = ١٠٠ سم^{٢}

<u>مثال (٣)</u> : أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يقع أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى ص = ١٢ – س^{٢}



<u>الحل</u> : المنحنى هو قطع مكافىء

نقطة رأسه = $\left(\frac{-ب}{٢أ}, ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$ = (٠، ١٢)

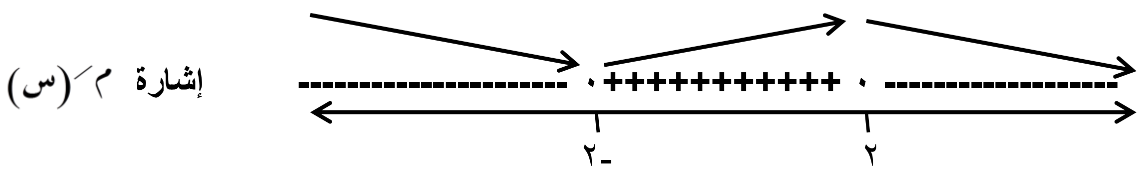
مقعر للأسفل لان معامل س^{٢} سالب

مساحة المستطيل = م = ٢س × ص = ٢س(١٢ – س^{٢}) = ٢٤س – ٢س^{٣}

م′ = ٢٤ – ٦س^{٢}

نجعل م′ = ٠ ⟵ ٢٤ − ٦س^{٢} = ٠ ⟵ ٦س^{٢} = ٢٤ ⟵ س^{٢} = ٤

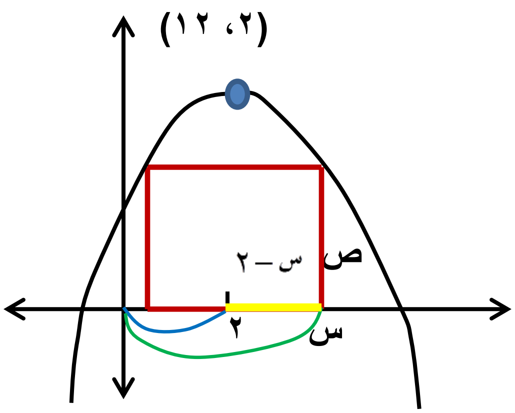
⟵ س = ٢ ، -٢



يوجد للاقتران م قيمة عظمى عند س = ٢ ⟵ ص = ١٢ − (٢)^{٢} = ١٢ − ٤ = ٨

مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه = ٢(٢) (٨) = ٣٢ وحدة مربعة

مثال (٤) : جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الاخران على منحنى ص = ٨ − س^{٢} + ٤س



الحل : : المنحنى هو قطع مكافىء

نقطة رأسه = ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق($\frac{-ب}{٢أ}$)) = (٢، ١٢)

مقعر للأسفل لان معامل س^{٢} سالب

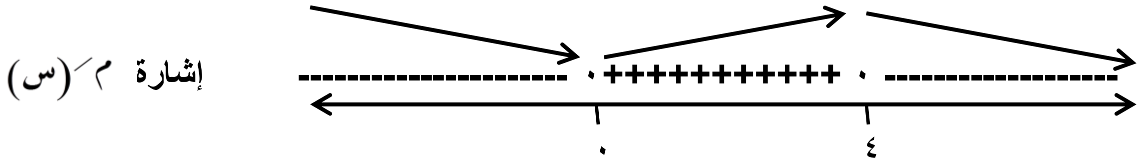
مساحة المستطيل = م = ٢(س − ٢) × ص = (٢س − ٤)(٨ − س^{٢} + ٤س)

= ١٦س − ٢س^{٣} + ٨س^{٢} − ٣٢ + ٤س^{٢} − ١٦س = −٢س^{٣} + ١٢س^{٢} − ٣٢

م′ = −٦س^{٢} + ٢٤س

نجعل م′ = ٠ ⟵ −٦س^{٢} + ٢٤س = ٠ ⟵ −٦س(س − ٤) = ٠

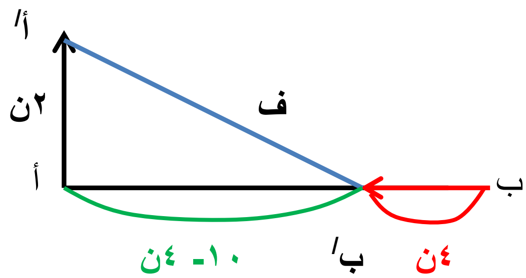
⟵ س = ٠ ، ٤



يوجد للاقتران م قيمة عظمى عند س = ٤ ⟵ ص = ٨ – (٤)^{٢} + ٤(٤) = ٨ – ١٦+١٦ = ٨

مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه = ٢(٤ -٢) (٨) = ٣٢ وحدة مربعة

مثال (٥) : **انطلق جسيم للأعلى من النقطة أ بسرعة ٢ م/ث ، وفي نفس اللحظة انطلق جسيم من النقطة ب يساراً بسرعة ٤ م/ث . جد الزمن الذي يجعل المسافة بين الجسيمين أقل ما يمكن علماً أن المسافة بين النقطتين أ ، ب تساوي ١٠ م.**



الحل : **للجسم أ :** $ع = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢ \longleftarrow \text{ف} = ٢\text{ن}$

للجسم ب : $ع = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٤ \longleftarrow \text{ف} = ٤\text{ن}$

حسب نظرية فيثاغورس : $\text{ف}^{٢} = (١٠ - ٤\text{ن})^{٢} + (٢\text{ن})^{٢}$

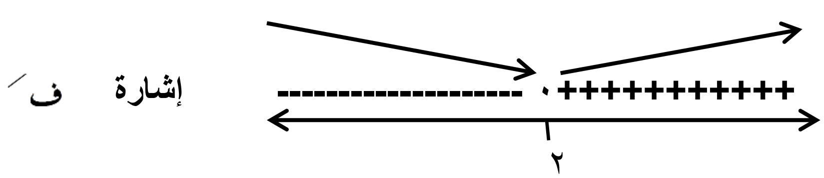
نشتق ضمنيا ف بالنسبة لـ ن : $٢\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢(١٠ - ٤\text{ن}) \times {}^{-}٤ + ٢(٢\text{ن}) \times ٢$

$$٢\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = {}^{-}٨٠ + ٣٢\text{ن} + ٨\text{ن} = {}^{-}٨٠ + ٤٠\text{ن}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{{}^{-}٨٠ + ٤٠\text{ن}}{٢\text{ف}}$$

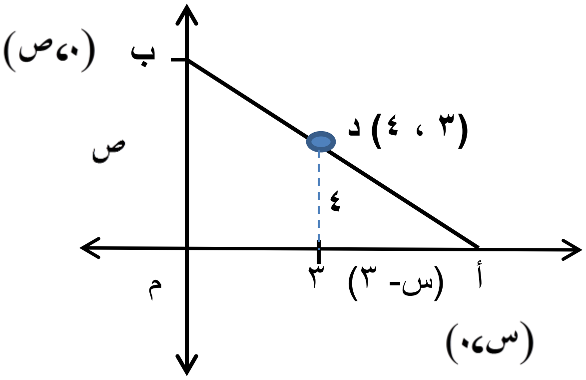
نجعل $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٠ \longleftarrow \frac{{}^{-}٨٠ + ٤٠\text{ن}}{٢\text{ف}} = ٠ \longleftarrow {}^{-}٨٠ + ٤٠\text{ن} = ٠ \longleftarrow \text{ن} = ٢\text{ث}$

أو $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ **غير موجودة ⟵ المقام = ٠ ⟵ ٢ف = ٠ ⟵ ف= ٠ (مرفوضة)**



المسافة أقل ما يمكن عندما ن = ٢ ث

مثال (٦) : ما مساحة أصغر مثلث يمكن رسمه في الربع الأول ، بحيث يكون وتره ماراً بالنقطة (٣ ، ٤) وضلعاه الآخران منطبقان على المحورين .



الحل :

من تشابه المثلثات : $\frac{\text{س}-٣}{\text{س}} = \frac{٤}{\text{ص}}$

$(\text{س}-٣)\text{ص} = ٤\text{س}$

$\text{ص} = \frac{٤\text{س}}{\text{س}-٣}$

مساحة المثلث = م = $\frac{١}{٢} \times \text{ق} \times \text{ع} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \text{ص} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \frac{٤\text{س}}{\text{س}-٣}$

$\text{م} = \frac{٢\text{س}^٢}{\text{س}-٣}$

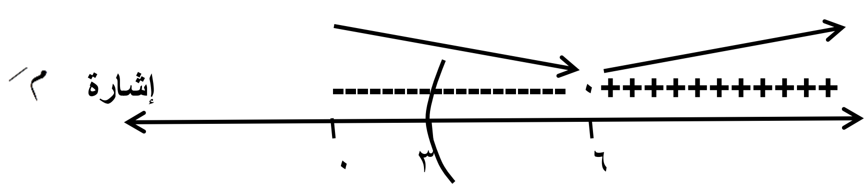
$\text{م}' = \frac{(\text{س}-٣)\times ٤\text{س} - ٢\text{س}^٢ \times ١}{(\text{س}-٣)^٢} = \frac{٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} - ٢\text{س}^٢}{(\text{س}-٣)^٢} = \frac{٢\text{س}^٢ - ١٢\text{س}}{(\text{س}-٣)^٢}$ **، س > ٣**

$\text{م}' = ٠ \longleftarrow ٢\text{س}^٢ - ١٢\text{س} = ٠ \longleftarrow ٢\text{س}(\text{س} - ٦) = ٠$

⟵ س = ٠ (نهملها) ، س = ٦

م' **غير موجودة ⟵ المقام = ٠** ⟵ $(\text{س} - ٣)^٢ = ٠ \longleftarrow \text{س} - ٣ = ٠$

⟵ س = ٣ (نهملها لأنها لا تنتمي للمجال)

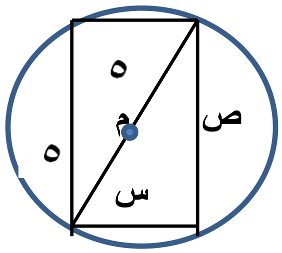


أصغر مساحة عندما س = ٦ ⟵ $\text{ص} = \frac{٤\text{س}}{\text{س}-٣} = \frac{٤\times٦}{٦-٣} = \frac{٢٤}{٣} = ٨$

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٨ = ٢٤$ **وحدة مربعة**

مثال (٧) : جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة قطرها ١٠ سم .

الحل :



$$ص^{٢} + س^{٢} = (١٠)^{٢}$$

$$ص^{٢} + س^{٢} = ١٠٠$$

$$ص^{٢} = ١٠٠ - س^{٢}$$

$ص = \pm\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$ **(نهمل القيمة السالبة)**

$$ص = \sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$$

مساحة المستطيل = $م = س \times ص = س\left(\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}\right)$

$$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}} + \sqrt{١٠٠ - س^{٢}} \times ١$$

$$م' = \frac{-س^{٢}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}} + \frac{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}} \times \sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}} = \frac{-س^{٢} + ١٠٠ - س^{٢}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}$$

$م' = \dfrac{-٢س^{٢} + ١٠٠}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}$ ، $٠ < س < ١٠$

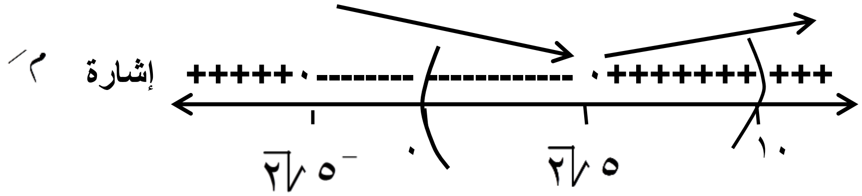
$م' = ٠$ ⟵ $-٢س^{٢} + ١٠٠ = ٠$ ⟵ $٢س^{٢} = ١٠٠$ ⟵ $س^{٢} = ٥٠$

⟵ $س = \pm\sqrt{٥٠}$ **(القيمة السالبة نهملها)**

⟵ $س = \sqrt{٥٠}$ ⟵ $س = ٥\sqrt{٢}$

$م'$ **غير موجودة** ⟵ **المقام = ٠** ⟵ $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}} = ٠$ ⟵ $١٠٠ - س^{٢} = ٠$

⟵ $س^{٢} = ١٠٠$ ⟵ $س = \pm ١٠$ **القيمة السالبة (نهملها)**



$$ص = \sqrt{١٠٠ - (٥\sqrt{٢})^{٢}}$$

أصغر مساحة عندما $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}} = ٠$ $\longleftarrow$

$$ص = \sqrt{١٠٠ - ٥٠} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$$

$$م = ٥\sqrt{٢} \times ٥\sqrt{٢} = ٥٠ \text{ سم}^{٢}$$

الوحدة السادسة (التكامل) :

التكامل غير المحدود

تعريف معكوس المشتقة : إذا كان الاقتران ق(س) متصلا على الفترة [أ ، ب] فان م(س) يسمى معكوس المشتقة (أو الاقتران الاصلي أو الاقتران البدائي) للاقتران ق(س)

إذا كان : $م^{\prime}(س) = ق(س)$ ، $\forall س \in [أ،ب]$

مثال(١) : تحقق من أن الاقتران م (س) = $\frac{1}{4}$ س^{٤} اقتران بدائي للاقتران ق(س) = س ^{٣}

الحل : $م^{\prime}(س) = س^{٣}$ = ق(س) ⟵ م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س)

مثال(٢) : جد اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) = ٢س

الحل : حسب التعريف يمكن أن يكون $م(س) = س^{٢}$ اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) لأن

$م^{\prime}(س) = ٢س$

ويمكن أن يكون أيضاً $م_{١}(س) = س^{٢} + ١$ اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) لأن

$م_{١}^{\prime}(س) = ٢س$

قاعدة : إذا كان م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) فإن : م(س) + جـ هي الصورة العامة لأي اقتران بدائي للاقتران ق(س) حيث جـ ثابت.

ملاحظة :(الفرق بين أي اقترانين بدائيين لاقتران معين يساوي ثابتاً دائماً)

مثال(٣) : إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانيين بدائيين للاقتران المتصل ق(س) وكان

ل(س) = م(س) – هـ (س) ، جد $ل^{\prime}(٣)$

الحل : بما أن م(س) ، هـ (س) اقترانيين بدائيين للاقتران ق(س) ⟵ م(س) – هـ(س) = جـ

⟵ ل(س) = جـ (ثابت) ⟵ $ل^{\prime}(س) = ٠$ ⟵ $ل^{\prime}(٣) = ٠$

مثال(٤) : بين فيما إذا كان الاقتران $م(س) = \frac{س^{٣}-١}{س^{٢}}$ اقتراناً بدائياً للاقتران $ق(س) = ١ + \frac{٢}{س^{٣}}$ ، س $\neq ٠$

الحل : $م^{\prime}(س) = \frac{س^{٢}(٣س^{٢}) - (س^{٣}-١)(٢س)}{س^{٤}} = \frac{٣س^{٤} - ٢س^{٤} + ٢س}{س^{٤}} = \frac{س^{٤} + ٢س}{س^{٤}} = ١ + \frac{٢}{س^{٣}}$

⟵ م(س) اقتران بدائي للاقتران ق٠س)

تعريف : ١) تُسمى مجموعة كل من الاقترانات البدائية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة لـ س ، ويُرمز له بالرمز : $\int ق(س)ءس$

٢) إذا كان $م'(س) = ق(س) \longrightarrow \int ق(س)ءس = م(س)+جـ$ جـ ثابت (ثابت التكامل)

٣) إذا كان ق(س) اقترانا متصلا فان : $\frac{ء}{ءس}\int ق(س)ءس = ق(س)$

مثال(٥) : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان : $\int ق(س)ءس = س^{٣} - ٣س + ٥$

جد ق(٢) ، $ق'(٢)$

الحل : بما أن ق (س) اقتران متصل $\longrightarrow \frac{ء}{ءس}\int ق(س)ءس = ق(س)$

$\longrightarrow ق(س) = ٣س^{٢} - ٣ \longrightarrow ق(٢) = ١٢ - ٣ = ٩$

$\longrightarrow ق'(س) = ٦س \longrightarrow ق'(٢) = ١٢$

مثال (٦) : إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانيين بدائيين للاقتران ق(س) ، وكان $م(س) = س^{٢} - ٤س + ٦$

هـ (٣) = ٤ ، جد هـ (١)

الحل : الفق بين م(س) ، هـ (س) = ثابت = جـ

م(س) – هـ (س) = جـ $\longrightarrow س^{٢} - ٤س + ٦ - هـ(س) = جـ$

$\longrightarrow هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٦ - جـ$

$\longrightarrow هـ(٣) = ٩ - ١٢ + ٦ - جـ = ٤ \longrightarrow جـ = {}^{-}١$

$\longrightarrow هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٦ - {}^{-}١ \longrightarrow هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٧$

$\longrightarrow هـ(١) = ١ - ٤ + ٧ = ٤$

مثال (٧) : إذا كان م(س) ، هـ (س) اقترانيين بدائيين للاقتران المتصل ق(س) ، وكان ق(٤) ٧،

$ق'(٤) = ١٠$ ، فما قيمة $(٣م - هـ)'(٤)$

الحل: $(٣م - هـ)'(٤) = ٣م'(٤) - هـ'(٤) = ٣ق(٤) - ق(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$

قواعد التكامل غير المحدود :

١) $\int أ\,ءس = أس + جـ$ ، أ، جـ $\in$ ح

٢) $\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$ ، $ن \neq -١$

٣) $\int جاس\,ءس = -جتاس + جـ$

٤) $\int جتاس\,ءس = جاس + جـ$

١) $\int قا^{٢}س\,ءس = ظاس + جـ$

٢) $\int قتا^{٢}س\,ءس = -ظتاس + جـ$

٣) $\int قاس ظاس\,ءس = قاس + جـ$

٤) $\int قتاس ظتاس\,ءس = -قتاس + جـ$

خواص التكامل غير المحدود :

إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل ، فإن:

١) $\int أق(س)\,ءس = أ\int ق(س)\,ءس$ ، $أ \neq ٠$

٢) $\int (ق(س) \pm هـ(س))\,ءس = \int ق(س)\,ءس \pm \int هـ(س)\,ءس$ ، $أ \neq ٠$

ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين .

مثال (٨) : جد كلا من التكاملات الآتية :

١) $\int قاس(قاس + ظاس)\,ءس = \int (قا^{٢}س + قاس ظاس)\,ءس = \int قا^{٢}س\,ءس + \int قاس ظاس\,ءس = ظاس + قاس + جـ$

٢) $\int (٢ - ظا^{٢}س)\,ءس = \int ٢\,ءس - \int (قا^{٢}س - ١)\,ءس = ٢س - \int قا^{٢}س\,ءس + \int ١\,ءس = ٢س - ظاس + س + جـ = س - ظاس + جـ$

٣) $\int \frac{(س^{٢}+١)^{٢}}{س^{٢}}\,ءس = \int \left(\frac{س^{٢}+١}{س}\right)^{٢}\,ءس = \int \left(\frac{س^{٢}}{س} + \frac{١}{س}\right)^{٢}\,ءس = \int (س + س^{-١})^{٢}\,ءس$

$\int (س + س^{-١})^{٢}\,ءس = \int (س^{٢} + ٢ \times س \times س^{-١} + س^{-٢})\,ءس = \int (س^{٢} + ٢ + س^{-٢})\,ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س + \frac{س^{-١}}{-١} + جـ = \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س + \frac{-١}{س} + جـ$

٤) $\int (٧س^٢ - ٤س + \frac{٣}{س^٤}) ءس = \int (٧س^٢ - ٤س + ٣س^{-٤}) ءس = \frac{٧س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} + \frac{٣س^{-٣}}{-٣} + جـ$

$= \frac{٧س^٣}{٣} - ٢س^٢ - \frac{١}{س^٣} + جـ$

٥) $\int \frac{١}{جتا^٢س} ءس = \int قا^٢س ءس = ظاس + جـ$

٦) $\int \frac{جاس}{جتا^٢س} ءس = \int \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{١}{جتاس} ءس = \int ظاس قاس ءس = قاس + جـ = \frac{١}{جتاس} + جـ$

مثال (٩) : **إذا كان** $ق^{\prime}(س) = ٥س^٤ - ١$ **، وكان ق(١) = ٥ ، جد ق(٢)**

الحل : $ق(س) = \int ق^{\prime}(س) ءس = \int (٥س^٤ - ١) ءس = \frac{٥س^٥}{٥} - س + جـ = س^٥ - س + جـ$

$ق(س) = س^٥ - س + جـ$

$ق(١) = ١ - ١ + جـ = جـ = ٥ \longrightarrow جـ = ٥$

$ق(س) = س^٥ - س + ٥ \longrightarrow ق(٢) = ٢^٥ - ٢ + ٥ = ٣٢ + ٣ = ٣٥$

مثال(١٠) : **إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠ ، وكان** $ق^{\prime\prime}(س) = ٦س$ **، جد قاعدة الاقتران ق(س) .**

الحل : $ق^{\prime}(س) = \int ق^{\prime\prime}(س) ءس = \int ٦س ءس = \frac{٦س^٢}{٢} + جـ_١ = ٣س^٢ + جـ_١$

$ق^{\prime}(٠) = ١$ **(مشتقة الاقتران نقطة التماس عند نقطة التماس)**

$٣(٠)^٢ + جـ_١ = ١ \longrightarrow جـ_١ = ١ \longrightarrow ق^{\prime}(س) = ٣س^٢ + ١$

$ق(س) = \int ق^{\prime}(س) ءس = \int (٣س^٢ + ١) ءس = \frac{٣س^٣}{٣} + س + جـ_٢ = س^٣ + س + جـ_٢$

نقطة التماس تحقق معادلة التماس $\longrightarrow$ **ص = ٠ + ٢ = ٢**

(٠ ، ٢) أيضا تحقق معادلة قاعدة الاقتران ق(س) $\longrightarrow$ **ق(٠) = ٢** $\longrightarrow$

٠ + ٠ + جـ٢ = ٢ $\longrightarrow$ **جـ٢ = ٢** $\longrightarrow$ $ق(س) = س^٣ + ٦س + ٢$

مثال (١١) : إذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = ١٢\text{س}$ **، جد معادلة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ١)**

الحل :- $\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int ١٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{١٢\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}^{٢} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (٦\text{س}^{٢} + \text{جـ}_{١})\,\text{دس} = \frac{٦\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}_{١}\text{س} + \text{جـ}_{٢} = ٢\text{س}^{٣} + \text{جـ}_{١}\text{س} + \text{جـ}_{٢}$

ق(١) = ٣ ← ٢ + جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ٣ ← جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ١

ق(-١) = ١ ← -٢ + جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ١ ← - جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ٣

٢ جـ$_{٢}$ = ٤ ← جـ$_{٢}$ = ٢

جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ١ ← جـ$_{١}$ + ٢ = ١ ← جـ$_{١}$ = -١

← $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - \text{س} + ٢$

***** العلاقة بين البعد ف(ن) والسرعة ع(ن) والتسارع ت(ن) في التفاضل والتكامل :**

$$\text{ف(ن)} \underset{\text{بالاشتقاق}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\rightleftarrows}} \text{ع(ن)} \underset{\text{بالاشتقاق}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\rightleftarrows}} \text{ت(ن)}$$

مثال (١٢) : بدأ جسم بالتحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تُعطى بالعلاقة $\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}$ **، فما بُعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة.**

الحل : $\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\,\text{دن} = \int (٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن})\,\text{دن} = \frac{٣\text{ن}^{٣}}{٣} + \frac{٢\text{ن}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢} + \text{جـ}$

وبما أن ف(٠) = ٠ ← جـ = ٠

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢}$

$\text{ف}(٢) = ٨ + ٤ = ١٢$ متراً

مثال (١٣) : تحرك جسم من السكون من نقطة الأصل في خط مستقيم وبتسارع ت = ٢ن + ١ سم /ث^{٢}

جد: ١) سرعة الجسم عند ن = ٣ ٢) إزاحة الجسم من نقطة الأصل عند ن = ٣ ث

الحل : ١) $ع = \int ت(ن)\,ءن = \int (٢ن + ١)\,ءن = \frac{٢ن^{٢}}{٢} + ن + جـ$

$ع(ن) = ن^{٢} + ن + جـ_{١}$

بما أن الجسم تحرك من السكون ← ع (٠) = ٠ ← ٠ + ٠ + جـ$_{١}$ = ٠ ← جـ$_{١}$ = ٠

← $ع(ن) = ن^{٢} + ن$ ⟵ **ع(٣) = ٩ + ٣ = ١٢ سم / ث**

٢) الازاحة $ف(ن) = \int ع(ن)\,ءن = \int (ن^{٢} + ن)\,ءن = \frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢} + جـ_{٢}$

تحرك الجسم من نقطة الأصل ← ف(٠) = ٠ ← ٠ + ٠ + جـ$_{٢}$ = ٠ ← جـ$_{٢}$ = ٠

$ف(ن) = \frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢}$ $ف(٣) = \frac{٢٧}{٣} + \frac{٩}{٢} =$ **١٣.٥ سم**

التجزئة ومجموع ريمان :

تعريف : إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة ، وكانت $\sigma_{ن}$ = { أ = $س_٠$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ،.... ، $س_ن$ = ب}

حيث $س_٠$ < $س_١$ < $س_٢$ <.... < $س_ن$ ، فإننا نسمي $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

وتسمى الفترة $[س_{ر-1} ، س_ر]$ الفترة الجزئية الرائية ، وطولها = $\Delta س_ر = س_ر - س_{ر-1}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

بالرموز $\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - س_{ر-1}) = ب - أ$

نلاحظ من التعريف ، أنه لأي تجزئة $\sigma_{ن}$ لفترة ما يجب أن يكون :

١) الفترة مغلقة . ٢) تبدأ التجزئة من بداية الفترة وتنتهي بنهايتها .

٣) عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

ملاحظة : عدد الفترات الجزئية الناتجة عن التجزئة $\sigma_{ن}$ يساوي ن ،

وعدد عناصر التجزئة = ن + ١

مثال(١) : أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة [-١ ، ٣]

١) $\sigma_{٤}$ = { -١ ، ١ ، ١.٥ ، ٢ ، ٣ } تعتبر تجزئة

٢) $\sigma_{٤}$ = { ٠ ، ١ ، ١.٥ ، ٢ ، ٣ } ليست تجزئة لأنها لا تبدأ ببداية الفترة -١

٣) $\sigma_{٤}$ = { -١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ليست تجزئة لأن ٤ لا تنتمي للفترة

٤) $\sigma_{٤}$ = { -١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ } ليست تجزئة لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال (٢) : أكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة [٢ ، ٧]

الحل : $\sigma_{٥}$ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

$\sigma_{٥}$ = { ٢ ، ٢.٥ ، ٤ ، ٤.٥ ، ٦ ، ٧ }

$\sigma_{٥}$ = { ٢ ، ٢.٥ ، ٣ ، ٤.٥ ، ٦ ، ٧ }

مثال(٣) : إذا كانت $\sigma_{٣}$ = {-١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } تجزئة ثلاثية للفترة [-١ ، ٦] . أكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ ثم احسب طول كل منها .

الحل : الفترات الجزئية : [-١ ، ٣] ، [٣ ، ٤] ، [٤ ، ٦]

أطوالها على الترتيب : ٤ ، ١ ، ٢

نلاحظ أن عدد عناصر التجزئة $\sigma_{٣}$ = ٤

عدد الفترات الجزئية = ٣

مجموع أطوال الفترات الجزئية = ٤ + ١ + ٢ = ٧ = طول الفترة الكلية

تعريف : تُسمى التجزئة $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب] ، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية ، ويكون طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}}$ = $\frac{ب-أ}{ن}$

مثال (٤) : أكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة [-٢ ، ١٣]

الحل : ن = ٥ ، أ = -٢ ، ب = ١٣

طول الفترة الجزئية = $\frac{ب-أ}{ن} = \frac{١٣-^{-}٢}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

$\longleftarrow$ $\sigma_{٥}$ = { -٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ }

مثال(٥) : إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئة منتظمة للفترة [٥ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٣}$ جد قيمة ب .

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب-٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ $\longleftarrow$ ٣(ب - ٥) = ٦ $\longleftarrow$ ب – ٥ = ٢

$\longleftarrow$ ب = ٧

لايجاد أي عنصر في التجزئة المنتظمة ($\sigma_{ن}$) -

يكون العنصر الأول $س_{٠}$ = أ

العنصر الثاني $س_{١}$ = أ + $\frac{ب-أ}{ن}$

العنصر الرائي $س_{ر-١} = أ + (ر-١)(\frac{ب-أ}{ن})$

وبشكل عام فإن $\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \left(\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\right) \times \text{ر}$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي $[\text{س}_{\text{ر}-1} ، \text{س}_{\text{ر}}]$

مثال (٦) : لتكن $\sigma_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [-١ ، ١٩] ، جد كل مما يلي :

١) $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٩}$ ٢) العنصر الثامن ٣) الفترة الجزئية الخامسة

الحل : ن = ١٢ ، أ = -١ ، ب = ١٩

١) $\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \left(\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\right) \times \text{ر}$

$$\text{س}_{٢} = {}^{-}١ + \left(\frac{١٩ - {}^{-}١}{١٢}\right) \times ٢ = {}^{-}١ + \frac{٢٠}{٦} = \frac{١٤}{٦} = \frac{٧}{٣}$$

$$\text{س}_{٩} = {}^{-}١ + \left(\frac{١٩ - {}^{-}١}{١٢}\right) \times ٩ = {}^{-}١ + \frac{٢٠}{١٢} \times ٩ = {}^{-}١ + ١٥ = ١٤$$

٢) العنصر الثامن = $\text{س}_{٧} = {}^{-}١ + \left(\frac{١٩ - {}^{-}١}{١٢}\right) \times ٧ = {}^{-}١ + \frac{٢٠}{١٢} \times ٧ = {}^{-}١ + \frac{٣٥}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$

٣) الفترة الجزئية الخامسة هي $[\text{س}_{٤} ، \text{س}_{٥}] = \left[\frac{١٧}{٣} ، \frac{٢٢}{٣}\right]$

تعريف : إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ ، ب] ، وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب] ، فإن المقدار $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})(\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-1})$ ، $\text{س}^{*}_{\text{ر}} \in [\text{س}_{\text{ر}-1} ، \text{س}_{\text{ر}}]$

يسمى مجموع ريمان ، ويرمز له بالرمز $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$

وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن : $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})$

مثال (٧) : أوجد مجموع ريمان للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٩$ بالنسبة للتجزئة المنتظمة $\sigma_{٤}$ للفترة [-٢ ، ٦] في الحالتين :

١) باتخاذ $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ ٢) باتخاذ $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \frac{\text{س}_{\text{ر}-1} + \text{س}_{\text{ر}}}{٢}$

الحل : طول الفترة الجزئية $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٦-^{-}٢}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

$\sigma_{٤}$ = {-٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦}

الفترات الجزئية : [-٢ ، ٠] ، [٠ ، ٢] ، [٢ ، ٤] ، [٤ ، ٦]

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}،\text{ق}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})$$

١) $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} \longleftarrow \text{م}(\sigma_{٤}،\text{ق}) = ٢\sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}})$

= ٢(ق(٠) + ق(٢) + ق(٤) + ق(٦))
= ٢ (٩ + ١٧ + ٣٣ + ٥٧)
= ٢ (١١٦) = ٢٣٢

٢) $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \frac{\text{س}_{\text{ر}-١}+\text{س}_{\text{ر}}}{٢}$: [-٢ ، ٠] $\longleftarrow \text{س}^{*}_{\text{ر}} = \frac{^{-}٢+٠}{٢} = ^{-}١$

: [٠ ، ٢] $\longleftarrow \text{س}^{*}_{\text{ر}} = \frac{٠+٢}{٢} = ١$

: [٢ ، ٤] $\longleftarrow \text{س}^{*}_{\text{ر}} = \frac{٢+٤}{٢} = ٣$

: [٤ ، ٦] $\longleftarrow \text{س}^{*}_{\text{ر}} = \frac{٤+٦}{٢} = ٥$

$\text{م}(\sigma_{٤}،\text{ق}) = ٢\sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}\left(\frac{\text{س}_{\text{ر}-١}+\text{س}_{\text{ر}}}{٢}\right) =$ ٢(ق(-١) + ق(١) + ق(٣) + ق(٥))

= ٢ (٨ + ١٢ + ٢٤ + ٤٤) = ٢ (٨٨) = ١٧٦

مثال(٨) : أكتب التجزئة المنتظمة الخماسية للفترة [-١ ، ٣]

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٣-^{-}١}{٥} = \frac{٤}{٥}$

$\sigma_{٥}$ = { $^{-}١ ، \frac{^{-}١}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٧}{٥} ، \frac{١١}{٥} ، ٣$ }

مثال (٩) : إذا كانت $\sigma_{٢٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [-٢ ، ٣] . فأوجد الفترة الجزئية السادسة عشر الناتجة عن هذه التجزئة .

الحل : طول الفترة الجزئية . $= \frac{٣-^{-}٢}{٢٠} = \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$

الفترة الجزئية السادسة عشر هي [س١٥ ، س١٦]

$\text{س}_{١٥} = ^{-}٢ + \frac{١}{٤} \times ١٥ = \frac{٧}{٤}$ $\qquad$ $\text{س}_{١٦} = ^{-}٢ + \frac{١}{٤} \times ١٦ = ٢$

$\longleftarrow [\frac{٧}{٤}،٢]$

التكامل المحدود

تعريف : إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدوداً في الفترة [أ ، ب] ، وكانت

$$\lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \text{ل} \quad \text{لجميع قيم} \quad \text{س}^*_{\text{ر}} \in [\text{س}_{\text{ر}} ، \text{س}_{\text{ر}-1}]$$

فإن الاقتران ق(س) قابلا للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، ويكون :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{ل}$$ **وتسمى أ ، ب حدود التكامل .**

ملاحظة : **يكون الاقتران ق(س) محدوداً، إذا وجد عددان حقيقيان م ، ن حيث** $\text{م} \le \text{ق}(\text{س}) \le \text{ن}$

$\forall \text{س} \in$ **مجال الاقتران.**

مثال (١) : استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{0}^{2} 4\, \text{ءس}$

الحل : لتكن $\sigma_{\text{ن}}$ **تجزئة نونية منتظمة على الفترة [٠ ، ٢]**

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$$

$$= \frac{2-0}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} 4 = \frac{2}{\text{ن}} \times 4\text{ن} = 8$$

$$\int_{0}^{2} 4\, \text{ءس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \lim_{\text{ن} \to \infty} 8 = 8$$

لاحظ أن $\int_{0}^{2} 4\, \text{ءس} = 4(2-0) = 8$ **= قيمة الثابت (الحد العلوي – الحد السفلي)**

قابلية الاقتران ق(س) للتكامل في الفترة [أ ، ب]:

نظرية (١) : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] فإنه يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] .

مثال(٢) : هل الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٥$ قابلاً للتكامل على الفترة [-١ ، ٤] ؟ ولماذا ؟

الحل : ق(س) كثير حدود ⟵ ق(س) متل على ح ⟵ ق (س) متصل على [-١ ، ٤]

⟵ قابلاً للتكامل على الفترة [-١ ، ٤] .

نظرية (٢) : إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان الاقتران

هـ (س) = ق(س) لجميع قيم $س \in [أ،ب]$ ما عدا عند مجموعة منتهية

من قيم س في الفترة ، فإن هـ (س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

ويكون $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$

مثال (٣) : ابحث في قابلية تكامل الاقتران $ق(س) = [\frac{١}{٢}س]$ في الفترة [٤ ، ٦]

الحل : نعيد تعريف $[\frac{١}{٢}س] = \begin{cases} ٢ ، & ٤ \le س < ٦ \\ ٣ ، & س = ٦ \end{cases}$

نفرض أن هـ (س) = ٢ ، في الفترة [٤ ، ٦] ⟵ قابلاً للتكامل لأنه متصل .

وبما أن هـ (س) = ق(س) لجميع قيم س في الفترة [٤ ، ٦] ما عدا س = ٦ ، فإن

الاقتران $ق(س) = [\frac{١}{٢}س]$ قابلاً للتكامل على الفترة [٤ ، ٦] .

قاعدة (١) : $\int_{أ}^{ب} جـ\,ءس = جـ(ب - أ)$

قاعدة (٢) : إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{ن}$ معرفاً على الفترة [أ ، ب] ،

$ن \in ح$ ، $ن \ne -١$ فإن :

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن}\,ءس = \left.\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\right|_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن+١}$$

مثال (٤) : جد قيمة كل من التكاملات الآتية :

أ) $\int_{-١}^{٢} ٦\,\text{ءس} = ٦(٢ - {}^{-}١) = ٦ \times ٣ = ١٨$

ب) $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٤}\,\text{ءس} = \left. \frac{\text{س}^{٥}}{٥} \right|_{١}^{٣} = \frac{٣^{٥} - ١^{٥}}{٥} = \frac{٢٤٣ - ١}{٥} = \frac{٢٤٢}{٥}$

ج) $\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} = \left. \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right|_{١}^{٤} = \left. \frac{٢\sqrt{\text{س}^{٣}}}{٣} \right|_{١}^{٤}$

$$= \frac{٢\sqrt{٤^{٣}} - ٢\sqrt{١^{٣}}}{٣} = \frac{٢\sqrt{٦٤} - ٢}{٣} = \frac{٢ \times ٨ - ٢}{٣} = \frac{١٦ - ٢}{٣} = \frac{١٤}{٣}$$

د) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{٢}^{٨} \text{س}^{-٢}\,\text{ءس} = \left. \frac{\text{س}^{-١}}{-١} \right|_{٢}^{٨} = \frac{٨^{-١} - ٢^{-١}}{-١} = -\left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{٢}\right) = -\left(\frac{١}{٨} - \frac{٤}{٨}\right) = \frac{٣}{٨}$

هـ) $\int_{٢}^{٢} \text{س}^{٣}\,\text{ءس} = ٠$

و) $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٢} + \text{س})\,\text{ءس} = \left. \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \right|_{-٢}^{٢} = \left(\frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢}\right) - \left(\frac{-٨}{٣} + \frac{٤}{٢}\right) =$

$$= \frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢} + \frac{٨}{٣} - \frac{٤}{٢} = \frac{١٦}{٣}$$

مثال (٥) : جد قيمة الثابت (ب) إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ب}\,\text{ءس} = ٥$

الحل :

$\int_{١}^{٣} \text{ب}\,\text{ءس} = \text{ب}(٣ - ١) = ٥ \longrightarrow ٣\text{ب} - \text{ب} = ٥$

$\longrightarrow ٢\text{ب} = ٥ \longrightarrow \text{ب} = \frac{٥}{٢}$

خصائص التكامل المحدود :

إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، فإن :

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = ٠$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{ك}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$ ، ك∋ ح

٤) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

مثال (٦) : جد $\int_{١}^{٤} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ء}\text{س}$

الحل : $\int_{١}^{٤} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ء}\text{س} = ٣\int_{١}^{٤} \text{س}^{٢}\,\text{ء}\text{س} = ٣\,\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big|_{١}^{٤} = ٤^{٣} - ١^{٣} = ٦٣$

خاصية الإضافة : إذا كان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد تنتمي لفترة معرف عليها الاقتران ق(س) ، فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$$

مثال (٧) : **أوجد** $\int_{٠}^{٥} |\text{س} - ٢|\,\text{ء}\text{س}$

الحل : نعيد تعريف | س – ٢ |

-------------- ++++++++

٠ ٢ ٥

$$|س - ٥| = \begin{cases} ٢ - س \quad ، & ٠ \le س \le ٢ \\ س - ٢ \quad ، & ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{٥} |س - ٢| \, ءس = \int_{٠}^{٢} (٢ - س) \, ءس + \int_{٢}^{٥} (س - ٢) \, ءس$$

$$= \left(٢س - \frac{س^{٢}}{٢}\right)\Big|_{٠}^{٢} + \left(\frac{س^{٢}}{٢} - ٢س\right)\Big|_{٢}^{٥}$$

$$= \left(٢ \times ٢ - \frac{٤}{٢}\right) - (٠ - ٠) + \left(\frac{٢٥}{٢} - ٢ \times ٥\right) - \left(\frac{٤}{٢} - ٢ \times ٢\right)$$

$$= (٤ - ٢) + \left(\frac{٢٥}{٢} - ١٠\right) - (٢ - ٤) = ٢ + \frac{٥}{٢} + ٢ = \frac{١٣}{٢}$$

نظرية: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان $ق(س) \ge ٠$ ، $\forall س \in [أ، ب]$

فإن : $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس \ge ٠$

مثال (٨) : بدون حساب التكامل أثبت أن : $\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢}+٤} \, ءس \ge ٠$

الحل : نبحث في إشارة $\frac{٣س}{س^{٢}+٤}$ في الفترة [٠ ، ٥]

البسط : ٣ س :

--------------- ++++++++++
٠ ٥

المقام : $س^{٢} + ٤$

++++++++++++++++++++
٠ ٥

$\frac{٣س}{س^{٢}+٤}$:

--------------- ++++++++++
٠ ٥

$\longleftarrow \int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢}+٤} \, ءس \ge ٠$

خاصية المقارنة : إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان

$\text{ق}(\text{س}) \le \text{هـ}(\text{س})$ ، $\forall\ \text{س} \in [\text{أ}،\text{ب}]$ ، فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال (٩) : بدون إجراء عملية التكامل ، أثبت أن :

$$\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢} - ١)\,\text{دس} \le \int_{١}^{٢} (٢\text{س} + ٢)\,\text{دس}$$

الحل: نفرض أن $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ١) - (٢\text{س} + ٢)$

$= \text{س}^{٢} - ١ - ٢\text{س} - ٢ = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣$

نبحث في اشارة ق(س) $\longleftarrow$ (س – ٣) (س + ١) = ٠ $\longleftarrow$ س = ٣ ، -١

++++++++ ---------------------- +++++++

٣ ٢ ١ -١

$\longleftarrow$ $\text{ق}(\text{س}) \le ٠$ في الفترة [١ ، ٢]

$\longleftarrow$ $(\text{س}^{٢} - ١) - (٢\text{س} + ٢) \le ٠$ في الفترة [١ ، ٢]

$\longleftarrow$ $(\text{س}^{٢} - ١) \le (٢\text{س} + ٢)$ في الفترة [١ ، ٢]

$\longleftarrow$ $\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢} - ١)\,\text{دس} \le \int_{١}^{٢} (٢\text{س} + ٢)\,\text{دس}$

مثال (١٠) : إذا كان $\int_{٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٣$ ، وكان $\int_{٨}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٥^{-}$

جد $\int_{٢}^{٨} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل : $\int_{٢}^{٨} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢\int_{٢}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢(\int_{٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٦}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس})$

$$= ٢\left(\int_{٢}^{٦} \text{ن}(\text{س})\,\text{ءس} + -\int_{٨}^{٦} \text{ن}(\text{س})\,\text{ءس}\right) = ٢(٣ + - {}^{-}٥) = ٢ \times ٨ = ١٦$$

مثال (١١) : إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٤\text{ن}(\text{س}) + ٧\text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس} = ١٩$ ، وكان $\int_{١}^{٣} ٣\text{ن}(\text{س})\,\text{ءس} = ٩$

فما قيمة $\int_{١}^{٣} ٥\text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{١}^{٣} ٣\text{ن}(\text{س})\,\text{ءس} = ٣\int_{١}^{٣} \text{ن}(\text{س})\,\text{ءس} = ٩ \longrightarrow \int_{١}^{٣} \text{ن}(\text{س})\,\text{ءس} = ٣$$

$$\int_{١}^{٣} \left(٤\text{ن}(\text{س}) + ٧\text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس} = ١٩ \longrightarrow ٤\int_{١}^{٣} \text{ن}(\text{س})\,\text{ءس} + ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ١٩$$

$$٤ \times ٣ + ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ١٩ \longrightarrow ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ١٩ - ١٢ = ٧$$

$$\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ١ \longrightarrow \int_{١}^{٣} ٥\text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ٥\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ٥ \times ١ = ٥$$