الفصل الثالث

البرمجة الخطية - الطريقة المبسطة

Linear Programming - The Simplex Method

3-1: مقدمة:

تُعد الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) اسلوب رياضي متقدم في حل مشكلات البرمجة الخطية (LP)، كونها تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر)، كما وتُعد هذه الطريقة أفضل وأدق من الطريقتين السابقتين [الطريقة البيانية والطريقة الجبرية].

أن البدايات التأريخية لتطبيق الطريقة المبسطة (Simplex Method) تعود إلى الجهود المبذولة من قبل العالم (Dantzig) عام (1947)، عندما تبين له قصور وعجز كل من الطريقة البيانية والطريقة الجبرية في معالجة مشكلات البرمجة الخطية (LP)، عندما تحتوي على أكثر من متغيرين.

لقد شاع استخدام الطريقة المبسطة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية (LP) في وقتنا الحاضر، نتيجة إنتشار الحاسبات الالكترونية وتطور البرمجيات الجاهزة (Soft wares) المتعلقة بهذا النوع من المشكلات.

ويتم إيجاد حل مشكلات البرمجة الخطية (LP) بموجب هذه الطريقة وفقاً إلى ثلاث مراحل أساسية ومتسلسلة يمكن وصفها، على النحو الآتي:

1- المرحلة الأولى: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي) (Feasible Solution).

2- المرحلة الثانية: تحسين الحل الممكن للحصول على الحل الأفضل (Best Solution).

3- المرحلة الثالثة: تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution)، وقد يتم الوصول إلى الحل الأمثل بخطوة واحدة (One Iteration) أو عدد من الخطوات (Many Iterations).

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لحل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالتي التعظيم (Maximize) والتقليل (Minimize) لدالة الهدف:

3-2: حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم (Maximize):

- لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) بموجب الطريقة المبسطة، نتبع الخطوات الآتية:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة القياسية (Standard Form)، بعد إضافة المتغيرات الفائضة أو الراكدة (S_i) إلى كل من دالة الهدف (Z) وقيود النموذج، مع مراعاة جعل دالة الهدف (Z) مساوية (للصفر).

2- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible Solution)، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات (X_j, S_i) في قيود النموذج ودالة الهدف (Z).

3- تحديد المتغير الداخل (Entering Variable)، على أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4- تحديد المتغير الخارج (Leaving Variable)، عن طريق قسمة القيم الواقعة في الجهة اليمنى في عمود (R.H.S)، على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot Column) والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارج القسمة في عمود النسبة (Ratio) يُعد هو المتغير الخارج، ليحل محله المتغير الداخل.

5- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (Pivot Column).

6- الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (Pivot Row).

7- العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج يسمى بالعنصر المحوري (Pivot Element)، بمعنى آخر [هو العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج].

8- يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري (Pivot Element).

9- لغرض تحسين الحل الممكن (Feasible Solution) والحصول على الحل الأفضل (Best Solution)، نتبع الآتي:

أ - إيجاد معاملات دالة الهدف الجديد (New Z) كالآتي:

معاملات (Z) الجديدة = معاملات (Z)القديمة - معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية.

ب- إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات (S_i)كالآتي:

معاملات (S_i) الجديدة = معاملات (S_i) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف (S_i)* المعادلة المحورية.

10- يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم (Maximization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات (C_j) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أكبر أو تساوي الصفر، أي أن ($C_j \geq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات (C_j) في دالة الهدف (سالبة)، أي ($C_j < 0$)، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

11- يعاد إجراء الخطوات السابقة من (3-10) حتى يتم الحصول على جميع معاملات (C_j) دالة الهدف (Z)، أكبر أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \geq 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (10):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$2X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \le 60$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

لحل مشكلة البرمجة الخطية أعلاه، نتبع ما يأتي:

الخطوة الأولى **First Iteration** :

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) السابق إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z - 5X_1 - 6X_2 - 0\,S_1 - 0\,S_2 = 0$$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2 \ge 0$$

2- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن)، كالآتي:

Basic Variables	Non- Basic Variables				الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	(b_i')	Ratio
S_1	2	3	1	0	30	$\frac{30}{3}=10$
S_2	5	4	0	1	60	$\frac{60}{4}=15$
Z	-5	-6	0	0	0	

الصف المحوري　　العمود المحوري　　العنصر المحوري

3- إن المتغير الداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة (6) بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4- إن المتغير الخارج هو (S_1)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).

ملاحظة: تهمل القيم السالبة أو القيم غير المعرفة (∞) في عمود النسبة (Ratio).

5- إن العنصر المحوري هو القيمة (3) والتي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري.

6- حساب المعادلة المحورية (Pivot Equation)، وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري (3)، أي أن:

$$\text{Pivot Eqution} = \left[\frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{0}{3}\ ,\ \frac{30}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3}\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 0\ ,\ 10\right]$$

7- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير (S_2) ودالة الهدف (Z)، على النحو الآتي:

$$\text{New}(S_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 60 \end{bmatrix} - (4) * \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \\ -4/3 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-6) * \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$$

8- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، على النحو الآتي:

Basic Variables	Non- Basic Variables				الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	(b_i^s)	Ratio
X_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10	15
S_2	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20	8.6
Z	-1	0	2	0	60	

9- بما إن بعض قيم المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) الجديدة (سالبة) أي إن ($C_j < 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية.

الخطوة الثانية Second Iteration:

1- إن المتغير الداخل هو (X_1)، كونه يقابل أكبر قيمة (1) بإشارة سالبة من بين القيم السالبة في صف دالة الهدف (Z) الجديدة.

2- إن المتغير الخارج هو (S_2)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (8.6) في عمود النسبة.

3- إن العنصر المحوري هو القيمة $\left(\frac{7}{3}\right)$.

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, 0, -\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 8.6\right]$$

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير (X_2) ودالة الهدف (Z) كالآتي:

$$New(X_2) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \left(\frac{2}{3}\right) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/7 \\ 3/7 \\ 8.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/7 \\ -2/7 \\ 4.3 \end{bmatrix}$$

$$New(Z) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} - (-1) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/7 \\ 3/7 \\ 8.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10/7 \\ 3/7 \\ 68.6 \end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثالث، على النحو الآتي:

Basic Variables	Non- Basic Variables				الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	(b_i^s)
X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$	4.3
X_1	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	8.6
Z	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$	68.6

7- يتضح من الجدول السابق، بأن جميع معاملات دالة الهدف (Z) أكبر وتساوي الصفر، أي أن ($C_j \geq 0$)، عليه فقد توصلنا للحل الأمثل، والذي يكون فيه.

$[\,X_1 = 8.6 \quad , \quad X_2 = 4.3 \quad , \quad Z^* = 68.6\,]$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج النهائية لحل المشكلة بأن المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (9) تسعة وحدات تقريباً من المنتج (X_1)، و (4) أربعة وحدات من المنتج (X_2)، بما يحقق للمنشأة أقصى الأرباح وبمقدار (68.6) دينار.

مثال (2):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 8X_2 + 4X_3$$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 \le 2$$
$$X_1 + 3X_3 \le 6$$
$$X_2 \le 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

الحل:

لحل مشكلة البرمجة الخطية أعلاه، نتبع ما يأتي:

الخطوة الأولى First Iteration:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية السابق إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z - 6X_1 - 8X_2 - 4X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 2$$
$$X_1 + 3X_3 + S_2 = 6$$
$$X_2 + S_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

2- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن)، كالآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	(b_i^s)	Ratio
S_1	1	1	0	1	0	0	2	2
S_2	1	0	3	0	1	0	6	∞
S_3	0	1	0	0	0	1	1	1
Z	-6	-8	-4	0	0	0	0	

الصف المحوري   العمود المحوري   العنصر المحوري

3- إن المتغير ا لداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة(8) بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4- إن المتغير الخارج هو (S_3)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (1) في عمود النسبة.

5- العنصر المحوري هو القيمة (1).

6- حساب المعادلة المحورية، كالآتي:

$$\text{PivotEquation} = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right]$$
$$= [0,1,0,0,0,1,1]$$

7- حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرين (S_2,S_1) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(S_1) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\2\end{bmatrix} - (1)^* \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$New(S_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}-(0)*\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}=Old(S_2)$$

$$New(Z)=\begin{bmatrix}-6\\-8\\-4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-(-8)*\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\0\\-4\\0\\0\\8\\8\end{bmatrix}$$

8- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، على النحو الآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	(b_i^s)	Ratio
S_1	1	0	0	1	0	-1	1	1
S_2	1	0	3	0	1	0	6	6
X_2	0	1	0	0	0	1	1	∞
Z	-6	0	-4	0	0	8	8	

9- بما إن بعض قيم المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) الهدف (Z) الجديدة قيم سالبة، أي إن ($C_j < 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية.

الخطوة الثانية Second Iteration:

1- إن المتغير الداخل هو (X_1).

2- إن المتغير الخارج هو (S_1).

3- إن العنصر المحوري هو القيمة (1).

4- إن المعادلة المحورية هي:

Pivot Equation = [1, 0, 0, 1, 0, -1, 1]

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرين (X_2, S_2) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$New(S_1)=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\6\end{bmatrix}-(1)*\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\-1\\1\\1\\5\end{bmatrix}$$

$$New(X_2)=Old(X_2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$New(Z)=\begin{bmatrix}-6\\0\\-4\\0\\0\\8\\8\end{bmatrix}-(-6)*\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\6\\0\\2\\14\end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابق في جدول الحل الثالث، على النحو الآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	(b_i^s)	Ratio
X_1	1	0	0	1	0	−1	1	∞
S_2	0	0	3	−1	1	1	5	$5/3$
X_2	0	1	0	0	0	1	1	∞
Z	0	0	−4	6	0	2	14	

7- يتضح من النتائج الواردة في الجدول السابق، بأن بعض قيم المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) الجديدة (سالبة) وهي (−4)، أي إن ($C_j < 0$) وهـذا يعني هناك إمكانية أخرى لتحسين الحل، عليه سيتم إعادة نفس الخطوات السابقة، كما موضح بالخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة Third Iteration:

1- المتغير الداخل هو (X_3).

2- المتغير الخارج هو (S_2).

3- العنصر المحوري هو القيمة (3).

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[0,0,1,-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{3}\right]$$

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغيرين (X_2,X_1) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(X_1)=\text{Old}(X_1)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(X_2)=\text{Old}(X_2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z)=\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\6\\0\\2\\14\end{bmatrix}-(-4)*\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-\tfrac{1}{3}\\\tfrac{1}{3}\\\tfrac{1}{3}\\\tfrac{5}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\tfrac{14}{3}\\\tfrac{4}{3}\\\tfrac{10}{3}\\\tfrac{62}{3}\end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الرابع، على النحو الآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	(b_i^s)
X_1	1	0	0	1	0	−1	1
X_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
X_2	0	1	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{62}{3}$

7- يتضح من الجدول السابق، بأن جميع معـاملات دالـة الهـدف (Z) أكبر وتساوي الصفر، أي إن ($C_j \geq 0$)، عليه فقد توصلنا للحل الأمثل، والذي يكون فيه:

$$\left[X_1=1\ ,\ X_2=1\ ,X_3=\frac{5}{3}=1.7\ \ ,\ Z=\frac{62}{3}=20.7\right]$$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج النهائية لحل المشكلة بأن المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قرارا بإنتاج (1) وحدة واحدة من المنتج (X_1)، وإنتاج (1) وحدة واحدة أيضا من المنتج (X_2)، ووحدتين (2) تقريبا من المنتج (X_3)، بما يحقق للمنشأة أقصى الأرباح وبمقدار (20.7) دينار.

3-3: حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التقليل (Minimize):

إن حل مشكلات البرمجة الخطية (LP) بموجب الطريقة المبسطة (SimpleX Method) في حالة تقليل دالة الهدف (Z)، أي عندما تكون علامات القيود بصيغة أكبر أو تساوي (≥)، أو تكتب علامات القيود بصيغة [المساواة (=)، أو أكبر من أو تساوي (≥)] في حالات خاصة جدا، يتم بواسطة أحد الطريقتين الآتيتين:

1- طريقة (M) الكبيرة (Big- M) Method.

2- طريقة المرحلتين (Two - Phase) Method.

وفيما يلي شرحا مفصلا لكل طريقة من الطرق أعلاه، وكالآتي:

3-3-1: طريقة (M) الكبيرة The (Big - M) Method:

❋ تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات اصطناعية (Artificial Variables) إلى جانب المتغيرات الراكدة (Slack Variables) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة التقليل (Minimization)، عندما تكون علامات القيود مكتوبة بصيغة [المساواة (=)، أو أكبر من أو تساوي (≥)]، وإلى دالة الهدف (Z)، على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية (R_i)في دالة الهدف (Z) بمعاملات كبيرة جدا تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التقليل (Minimization)، وإشارة سالبة في حالة التعظيم (Maximaization).

ولإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) بموجب هذه الطريقة، نتبع الخطوات الآتية:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، بعد إضافة المتغيرات الراكدة (S_i) إلى قيود النموذج ودالة الهدف (Z)، بعدها يتطلب إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) إلى القيود ودالة الهدف أيضاً.

2- صياغة دالة هدف جديدة (Z)، بدلالة المتغيرات (X_j) و (S_i) بعد التعويض عن قيم (R_i) بما يساويها من المتغيرات (X_j) و (S_i)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة (M) فقط.

3- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، اعتماداً على جميع معاملات المتغيرات (R_i, S_i, X_j) الموجودة في قيود النموذج، ودالة الهدف (Z).

4- تحديد المتغير الداخل، على أساس أكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف (Z).

5- اعتماد بقية الخطوات السابقة والواردة في حالة التعظيم (Maximization)، ما عدا بعض الاختلافات الطفيفة، يمكن توضيحها بالخطوة (6).

6- يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التقليل (Minimization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات (C_j) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، اقل أو تساوي الصفر، أي أن ($C_j \leq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات (C_j) في الدالة (موجبة)، أي أن ($C_j > 0$)، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

7- في حالة وجود أحد المعاملات (C_j) أكبر من الصفر ($C_j > 0$) في صف دالة الهدف (Z) يعاد إجراء الخطوات السابقة من (4-6) حتى يتم الحصول على جميع المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) أقل أو تساوي الصفر ($C_j \geq 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل.

مثال (3):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطيــة (LP) التـالي، باسـتخدام طريقـة (M) الكبيرة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الخطوة الأولى First Iteration:

1) أ- تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \ , \ S_1, S_2 \geq 0$$

يتضح من القيادين السابقين بأن قيم (S_1) و (S_2) ظهـرت سـالبة وهـي ($S_1 = -30$)، ($S_2 = -40$)، بما يتعارض ذلك مع شرط عدم السلبية ($S_1, S_2 \geq 0$)، ولمعالجة هذا الموضـوع يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية للقيود ودالة الهدف (Z).

ب- إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) لقيود النموذج ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30 \quad \text{..........(1)}$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40 \quad \text{............(2)}$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , S_1, S_2 \geq 0 \quad , \ R_1, R_2 \geq 0$$

M : Is very Large.

2- صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات القراريــة (X_j) والمتغيرات الراكـدة (S_i) فقط، وعلى النحو الآتي:

أ - من المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{.............(3)}$$

ب- نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف (Z)، ينتج:

$$\because \ Z = 2X_1 + X_2 + M\{R_1 + R_2\}$$
$$= 2X_1 + X_2 + M\{[30 - X_1 - 3X_2 + S_1] + [40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2]\}$$
$$= 2X_1 + X_2 + M\{70 - 5X_1 - 5X_2 + S_1 + S_2\}$$
$$= 2X_1 + X_2 + 70M - 5MX_1 - 5MX_2 + MS_1 + MS_2$$
$$= (2-5M)X_1 + (1-5M)X_2 + MS_1 + MS_2 + 70M$$
$$\therefore \ Z - (2-5M)X_1 - (1-5M)X_2 - MS_1 - MS_2 = 70M$$

3- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن)، كالآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	(b_i^s)	Ratio
R_1	1	3	-1	0	1	0	30	10
R_2	4	2	0	−1	0	1	40	20
Z	(-2+5M)	(-1+5M)	-M	-M	0	0	70 M	

العنصر المحوري   العمود المحوري   الصف المحوري

4- المتغير الداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة ($-1+5M$) في صف دالة الهدف (Z)، بعد التعويض عن ($M=10$) أو إحدى مضاعفاتها.

5- المتغير الخارج هو (R_1)، كونه يقابل أصغر قيمة موجبة (10) في عمود النسبة.

6- العنصر المحوري هو القيمة (3).

7- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

8- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير (R_2) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(R_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 40 \end{bmatrix} - (2) * \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix} -2+5M \\ -1+5M \\ -M \\ -M \\ 0 \\ 0 \\ 70M \end{bmatrix} - (-1+5M) * \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M \\ 0 \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M \\ (-M) \\ \frac{1}{3}-\frac{5}{3}M \\ 0 \\ 10+20M \end{bmatrix}$$

9- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، على النحو الآتي:

B.V	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	(b_i)	Ratio
X_1	[illegible]	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	10	30
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6
Z	[illegible]	0	$\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M\right)$	-M	$\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M\right)$	0	10+20 M	

10- بما إن بعض قيم المعاملات في صف دالة الهدف (Z) الجديدة (موجبة)، أي إن ($C_j > 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية:

الخطوة الثانية Second Iteration:

1- المتغير الداخل هو (X_1)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة $\left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right)$ في صف دالة الهدف (Z).

2- المتغير الخارج هو (R_2)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (6) في عمود النسبة (Ratio).

3- العنصر المحوري هو $\left(\frac{10}{3}\right)$.

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, 0, \frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right]$$

5- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير (X_2) ودالة الهدف (Z)، كالآتي:

$$\text{New}(X_2) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{3}\right) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/5 \\ -3/10 \\ -1/5 \\ 3/10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/5 \\ 1/10 \\ 2/5 \\ -1/10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$New(Z)=\begin{bmatrix} \left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right) \\ 0 \\ \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M\right) \\ -M \\ \left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M\right) \\ 0 \\ 10+20M \end{bmatrix} - \left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -M \\ \frac{1}{2}-M \\ 20 \end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثالث، على النحو الآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	(b_i^s)
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6
Z	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-M	$\left(\frac{1}{2}-M\right)$	20

7- بما إن جميع معاملات صف دالة الهدف (Z) أقل وتساوي الصفر، أي إن ($C_j \leq 0$)، عليه فقد توصلنا للحل الأمثل للنموذج والذي يكون فيه:

$$[\,X_1 = 6 \quad , \quad X_2 = 8 \quad , \quad Z^* = 20\,]$$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج النهائية المتعلقة بحل المشكلة بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قرارا بإنتاج (6) ستة وحدات من المنتج (X_1)، وإنتاج (8) ثمانية وحدات من المنتج (X_2)، بما يحقق للمنشأة أقل التكاليف الإنتاجية وبمقدار (20) دينار.

3-3-2: طريقة المرحلتين The (Two - Phase) Method:

تعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة (M) الكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة التقليل (Minimize)، إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن نتأكد بأن هناك حل للنموذج، وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (r) مساوية للصفر، أي أن ($r=0$)، وبعدمه فلا يوجد حل للنموذج.

ويتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين، يمكن توضيحهما على النحو الآتي:

اولاً: المرحلة الأولى:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) لقيود النموذج فقط.

2- صياغة دالة هدف جديدة (r) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية (R_i)، أي أن:

$$r = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \longrightarrow Min.$$

3- تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، اعتماداً على معاملات المتغيرات القرارية والراكدة والاصطناعية (R_i, S_i, X_j) في قيود النموذج؛ ودالة الهدف الجديدة (r).

4- نتبع الخطوات السابقة، حتى نحصل على قيمة ($r = 0$)، مما يعني وجود حل للنموذج، والمقترنة في كونه ($C_j \leq 0$) لجميع معاملات دالة الهدف (r).

ثانياً: المرحلة الثانية:

1- اعتماد الحل الأساسي النهائي في الخطوة (4) من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_i)، ودالة الهدف (r).

2- اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، وتحسين قيمتها، للحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

3- في حالة وجود أحد المعاملات (C_j) أكبر من الصفر ($C_j > 0$) في صف دالة الهدف (Z)، يعاد إجراء نفس الخطوات حتى يتم الحصول على جميع المعاملات (C_j) أقل أو تساوي الصفر، أي إن ($0 \le C_j$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل للنموذج.

مثال (4):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة المرحلتين:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \ge 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \ge 40$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

المرحلة الأولى: يمكن الوصول إلى حل النموذج في مرحلته الأولى، وفقاً للآتي:

الخطوة الأولى First Iteration:

1- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 \qquad = 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \qquad - S_2 = 40$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2 \ge 0$$

يتضح من القيدين أعلاه، بأن قيم (S_2, S_1) سالبة، وتساويان على الترتيب ($S_1=-30$، $S_2=-40$)، مما يتعارض ذلك مع شرط عدم السلبية ($S_1, S_2 \ge 0$)، عليه سيتم إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_2, R_1) للقيود، وعلى النحو الآتي:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 \qquad = 30 \qquad \text{.............(1)}$$

$$4X_1 + 2X_2 \qquad - S_2 + R_2 = 40 \qquad \text{...........(2)}$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad , \quad S_1, S_2 \ge 0 \quad , \quad R_1, R_2 \ge 0$$

2- صياغة دالة هدف جديدة (r)، اعتماداً على قيم (R_2, R_1)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذن:

$$r = R_1 + R_2 \longrightarrow \text{Min.}$$

من المعادلتين (1) و(2)، نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \text{.............(3)}$$

نعوض قيمة (R_1) و (R_2) الواردة بالعلاقة (3)، في دالة الهدف الجديدة (r)، وكالآتي:

$$r = (30 - X_1 - 3X_2 + S_1) + (40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2)$$

$$= 70 - 5X_1 - 5X_2 + S_1 + S_2 \longrightarrow \text{Min.}$$

$$\therefore r + 5X_1 + 5X_2 - S_1 - S_2 = 70$$

3- تصميم الحل الإساسي (الحل الأولي)، كالاتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	(b_i^s)	Ratio
R_1	1	3	−1	0	1	0	30	30
R_2	4	2	0	−1	0	1	40	10
r	5	5	−1	−1	0	0	70	

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

4- المتغير الداخل هو (X_1)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة (5) في صف دالة الهدف (r).

5- المتغير الخارج هو (R_2)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة.

6- العنصر المحوري هو القيمة (4).

7- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 10\right]$$

8- حساب القيم الجديدة للمتغير (R_1) ودالة الهدف (r)، كالآتي:

$$\text{New}(R_1) = \begin{bmatrix}1\\3\\-1\\0\\1\\0\\30\end{bmatrix} - (1)^* \begin{bmatrix}1\\ 1/2\\0\\-1/4\\0\\1/4\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 5/2\\-1\\1/4\\1\\-1/4\\20\end{bmatrix}$$

$$\text{New}(r) = \begin{bmatrix}5\\5\\-1\\-1\\0\\0\\70\end{bmatrix} - (5)^* \begin{bmatrix}1\\ 1/2\\0\\-1/4\\0\\1/4\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 5/2\\-1\\1/4\\0\\-5/4\\20\end{bmatrix}$$

9- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثاني، كالآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	(b_i^*)	Ratio
R_1	0	5/2	-1	1/4	1	-1/4	20	8
X_1	1	1/2	0	-1/4	0	1/4	10	20
r	0	5/2	-1	1/4	0	-5/4	20	

10- إن بعض قيم المعاملات في صف دالة الهدف (r) الجديدة (موجبة)، أي إن ($C_j > 0$)، وهذا يعني هناك إمكانية لتحسين الحل، حيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة، كما موضح بالخطوة الثانية.

الخطوة الثانية Second Iteration:

1- المتغير الداخل هو (X_2).

2- المتغير الخارج هو (R_1).

3- العنصر المحوري هو القيمة $\left(\frac{5}{2}\right)$.

4- إن المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[0, 1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8\right]$$

5- حساب القيم الجديدة للمتغير (X_1) ودالة الهدف (r)، كالآتي:

$$New\ (X_1)=\begin{bmatrix}1\\ 1/2\\ 0\\ -1/4\\ 0\\ 1/4\\ 10\end{bmatrix}-\left(\frac{1}{2}\right)*\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2/5\\ 1/10\\ 2/5\\ -1/10\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1/5\\ -3/10\\ -1/5\\ 3/10\\ 6\end{bmatrix}$$

$$New\ (r)=\begin{bmatrix}5\\ 5/2\\ -1\\ 1/4\\ 0\\ -5/4\\ 20\end{bmatrix}-\left(\frac{5}{2}\right)*\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2/5\\ 1/10\\ 2/5\\ -1/10\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

6- تفريغ النتائج السابقة في جدول الحل الثالث، كالآتي:

B.V.	Non . B.V.						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	(b_i^s)
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6
r	0	0	0	0	−1	−1	0

7- بما إن قيمة دالة الهدف $(r=0)$، والتي اقترنت بأن جميع المعاملات في صف دالة الهدف (r) سالبة ومساوية للصفر، أي أن $(C_j \le 0)$، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج وينبغي الاستمرار بالمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

للوصول إلى الحل الأمثل للنموذج، نتبع الخطوات الآتية:

1- إعتماد النتائج النهائية الواردة في جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، بعد إستبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_2, R_1) ودالة الهدف (r) من الجدول المذكور.

2- اعتماد دالة الهدف (Z) الأصلية للمشكلة، وهي:

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 \rightarrow Min.$$

نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف (Z) للحصول على الحل الأمثل النهائي، بعد إستبعاد المتغيرات (R_2, R_1) ودالة الهدف (r)، وإضافة دالة الهدف (Z) الأصلية إلى جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، وعلى النحو الآتي:

B.V.	Non . B.V.				الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	(b_i^s)
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6
Z	2	1	0	0	0

3- نقوم بكتابة القيود اعتماداً على النتائج النهائية الواردة بالجدول السابق، وعلى النحو الآتي:

$$X_2-\frac{2}{5}S_1+\frac{1}{10}S_2=8 \quad ....(1)$$

$$X_1+\frac{1}{5}S_1-\frac{3}{10}S_2=6 \quad ....(2)$$

من المعادلتين (1) و (2)، يمكن الحصول على قيم المتغيرين (X_2, X_1) كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 8+\frac{2}{5}S_1-\frac{1}{10}S_2 \\ X_1 &= 6-\frac{1}{5}S_1+\frac{3}{10}S_2 \end{aligned}\right\} \text{.................(3)}$$

نقوم بتعويض قيم المتغيرين (X_2, X_1) الواردة في العلاقة (3)، في دالة الهدف (Z) الأصلية ينتج:

$$\because\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$\therefore\ Z = 2\left[6-\frac{1}{5}S_1+\frac{3}{10}S_2\right]+\left[8+\frac{2}{5}S_1-\frac{1}{10}S_2\right]$$

$$=12-\frac{2}{5}S_1+\frac{6}{10}S_2+8+\frac{2}{5}S_1-\frac{1}{10}S_2$$

$$=20+\frac{5}{10}S_2$$

$$=20+\frac{1}{2}S_2$$

$$\therefore\ Z-\frac{1}{2}S_2=20$$

4- تفريغ نتيجة دالة الهدف (Z) في جدول الحل النهائي، كالآتي:

B.V.	Non . B.V.				الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	(b_i^s)
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6
Z	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	20

5- يتضح من النتائج النهائية الواردة في جدول الحل السابق، بأن جميع معاملات دالة الهدف (Z) هي أقل وتساوي الصفر، أي إن ($C_j \leq 0$) عليه فقد ترصلنا للحل الأمثل للمشكلة، والذي يكون فيه:

$$[\,X_1 = 6 \quad , \quad X_2 = 8 \quad , \ Z^* = 20]$$

إن النتائج أعلاه، هي نفس النتائج التي تم الحصول عليها بموجب طريقة (M) الكبيرة.

الاستنتاج:

يتضح من النتائج السابقة، بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قرارا بإنتاج (6) ستة وحدات من المنتج (X_1)، وإنتاج (8) ثمانية وحدات من المنتج (X_2)، بما يجعل التكاليف النهائية أقل ما يمكن وبمقدار (20) دينار.

Scanned with CamScanner

أسئلة حول الفصل الثالث

س1 : وضح بالتفصيل الطريقة المبسطة (Simplex Method)، شارحاً أهم مراحلها الأساسية في حل مشكلات البرمجة الخطية.

س2: وضح خطوات الحصول على الحل الأمثل بموجب الطريقة المبسطة في حالة:

1- التعظيم (Maximize).

2- التقليل (Minimize).

س3: وضح المفاهيم التالية بالتفصيل:

1- المتغير الداخل (Entering Variable).

2- المتغير الخارج (Leaving Variable).

3- الصف المحوري (Pivot Row).

4- العمود المحوري (Pivot Column).

5- العنصر المحوري (Pivot Element).

6- المعادلة المحورية (Pivot Equation).

س4: وضح بالتفصيل المبادئ العامة لكل من:

1- طريقة (M) الكبيرة.

2- طريقة المرحلتين.

س5: وضح ما يلي بالتفصيل:

1- خطوات المرحلة الأولى الخاصة بطريقة المرحلتين.

2- خطوات المرحلة الثانية الخاصة بطريقة المرحلتين.

س6: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام الطريقة المبسطة:

1) Max. $Z = 10X_1 + 10X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 4X_2 \le 20$$
$$3X_1 \le 15$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

2) Max. $Z = 2X_1 + 4X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 \le 4$$
$$X_1 + 4X_2 \le 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

3) Max. $Z = 80X_1 + 50X_2$

Sub. to:

$$4X_1 + 2X_2 \le 400$$
$$3X_1 + 5X_2 \le 750$$
$$5X_1 + X_2 \le 400$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

4) Max. $Z = 8X_1 + 5X_2$

Sub. to:

$$4X_1 + 2X_2 \le 20$$
$$4X_1 + 8X_2 \le 32$$
$$2X_1 \le 4$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

٤

الفصل الرابع

النموذج المقابل

The Dual Model

س7: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام الطريقة المبسطة:

1) Max. $Z = 10X_1 + 15X_2$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 \leq 300$$
$$X_2 = 200$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

2) Max. $Z = 3X_1 - X_2$

Sub. to:

$$X_1 - 2X_2 \geq 4$$
$$X_1 \geq 4$$
$$X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

س8: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام طريقة (M) الكبيرة:

1) Min . $Z = 20X_1 + 15 X_2$

Sub. to :

$$2X_1 + 3X_2 \geq 10$$
$$4X_1 \geq 10$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

2) Min. $Z = 50 X_1 + 100 X_2$

Sub. to:

$$X_1 + X_2 = 120$$
$$X_1 \leq 100$$
$$X_2 \geq 80$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

(3) Min. $Z = 6X_1 + 4X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 8$$
$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

س9: جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية، باستخدام طريقة المرحلتين:

1) Min. $Z = 30 X_1 + 20 X_2$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 \geq 16$$
$$X_1 \geq 5$$
$$X_1 + X_2 \geq 12$$
$$X_2 \geq 8$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

2) Min. $Z = 12 X_1 + 10 X_2$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 \geq 2$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

س10: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، باستخدام:

1- طريقة (M) الكبيرة.

2- طريقة المرحلتين.

Min. $Z = 600 X_1 + 400 X_2 + 400 X_3$

Sub. to:

$$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 60$$
$$5X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 40$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$