الفصل الرابع

النموذج المقابل

The Dual Model

4-1: مقدمة:

إن لكل نموذج أولي (Primal Model) من نماذج البرمجة الخطية (LP)، يوجد نموذج آخر يدعى بالنموذج المقابل (Dual Model)، وللنموذج المقابل يوجد حل أمثل (Optimal Solution) يتطابق مع الحل الأمثل للنموذج الأولي.

وتتمثل أهمية النموذج المقابل في حل مسائل البرمجة الخطية، بما يأتي:

1- تقليص الجهد الحسابي عند احتواء نموذج البرمجة الخطية الأولي على عدد كبير من القيود، وسرعة الحصول على الحل الأمثل بموجبه، عندما يصعب الحصول عليه في حالة النموذج الأولي.

2- يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل النهائي للنموذج الأولي، والعكس صحيح.

4-2: خطوات تحويل النموذج الأولي (Primal) إلى النموذج المقابل (Dual):

1- عكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (.Max) فإنها تصبح تقليل (.Min)في النموذج المقابل، أما إذا كانت دالة الهدف تقليل (.Min) فإنها تصبح تعظيم (.Max) في النموذج المقابل، مع مراعاة تحويل رمز الدالة للنموذج من (Z) إلى (W) في النموذج المقابل.

2- إبدال متغيرات النموذج الأولي من (X_j) إلى (Y_j) في النموذج المقابل.

3- جعل قيم الثوابت (b_i) التي تقع في الطرف الأيمن (.R.H.S) من قيود النموذج الأولي، كمعاملات (C_j) للمتغيرات (Y_j) في دالة الهدف (W) للنموذج المقابل.

4- جعل معاملات متغيرات دالة الهدف (Z) للنموذج الأولي، كقيم للثوابت التي تقع في الطرف الأيمن (.R.H.S) من القيود الجديدة للنموذج المقابل.

5- إبدال مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود النموذج الأولي (a_{ij})، بحيث تصبح الصفوف أعمدة، والأعمدة صفوف، بمعنى آخر إيجاد [مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات (X_{ij})].

6- إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة، أي أن ($Y_j \geq o$, $\forall_j$).

7- تحويل علامات القيود من أصغر من أو يساوي (≤) إلى أكبر من أو يساوي (≥)، وبالعكس.

ملاحظات:

1- في حالة النموذج الأولي، إذا كان [عدد المتغيرات= n، وعدد القيود = m]، فإنه سيصبح في حالة النموذج المقابل [عدد المتغيرات= m، وعدد القيود = n].

2- عند تحويل النموذج الأولي (Primal)، إلى النموذج المقابل (Dual)، يجب مراعاة ما يأتي:

أ - يجب أن تكون جميع علامات القيود أصغر من أو يساوي (≤)، عندما تكون دالة الهدف (.Max).

ب- يجب أن تكون جميع علامات القيود أكبر من أو يساوي (≥)، عندما تكون دالة الهدف (.Min).

3- يتطابق الحل الأمثل (Optimal Solution) للنموذج الأولي مع الحل الأمثل للنموذج المقابل، أي أن [$W^* = Z^*$].

4- عند إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual)، فإنه بالإمكان الحصول على الحل الأمثل للنموذج الأولي (Primal) مباشرة من جدول الحل النهائي للنموذج المقابل

(Dual)، ويتمثل هذا الحل بمعاملات دالة الهدف (W) التي تقع تحت المتغيرات: الراكدة (S_i) أو الاصطناعية (R_i) في الجدول.

مثال (1):

أكتب النموذج المقابل (Dual) للنماذج الأولية (Primal) الآتية:

1) Max. $Z = X_1 + 3X_2 - 2X_3$

Sub. to:

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \le 10$$
$$X_1 + 4X_2 \le 12$$
$$3X_1 + 5X_3 \le 18$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

ل:

قبل البدء بكتابة النموذج المقابل، نقوم أولاً بإيجاد مبدلة مصفوفة معاملات
ـات (X_j) كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Min. $W = 10Y_1 + 12Y_2 + 18Y_3$

Sub. to :

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \ge 1$$
$$Y_1 + 4Y_2 \ge 3$$
$$2Y_1 + 5Y_3 \ge -2$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0$$

2) Min. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub to:

$$10X_1 + 20X_2 \ge 100$$
$$15X_1 + 12X_2 \ge 150$$
$$16X_1 + 18X_2 \ge 200$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

نقوم أولاً بإيجاد مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات (X_j) كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 12 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 16 \\ 20 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Max. $W = 100Y_1 + 150Y_2 + 200Y_3$

Sub. to:

$$10Y_1 + 15Y_2 + 16Y_3 \le 3$$
$$20Y_2 + 12Y_2 + 18Y_3 \le 2$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0$$

3) Max. $Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$

Sub. to:

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 \le 20$$
$$X_1 + 3X_2 \le 18$$
$$2X_2 - 2X_3 \ge 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

الحل:

نقوم أولاً بجعل علامات جميع القيود أقل من أو يساوي (≤)، أي أن:

$$\text{Max. } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

Sub. to:

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 \le 20$$
$$X_1 + 3X_2 \le 18$$
$$-2X_2 + 2X_3 \le -10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

عليه يكتب النموذج المقابل (Dual)، على النحو الآتي:

$$\text{Min. } W = 20Y_1 + 18Y_2 - 10Y_3 \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sub. to:

$$2Y_1 + Y_2 \ge 1$$
$$2Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \ge 2$$
$$-Y_1 + 2Y_3 \ge -3$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0$$

(2):

لديك نموذج البرمجة الخطية (LP) الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \ge 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \ge 40$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

أكتب النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الأولي أعلاه.

2- جد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام الطريقة المبسطة.

الحل:

1- يكتب النموذج المقابل (Dual)، على النحو الآتي:

$$\text{Max. } W = 30Y_1 + 40Y_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Sub. to:

$$Y_1 + 4Y_2 \le 2$$
$$3Y_1 + 2Y_2 \le 1$$
$$Y_1, Y_2 \ge 0$$

2- إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل، كالآتي:

$$\text{Max. } W - 30Y_1 - 40Y_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

Sub. to:

$$Y_1 + 4Y_2 + S_1 = 2$$
$$3Y_1 + 2Y_2 + S_2 = 1$$
$$Y_1, Y_2 \ge 0,\ S_1, S_2 \ge 0$$

الآن نعمل جدول الحل الابتدائي، على النحو الآتي:

B.V.	Non- B.V.				الثوابت	النسبة
	Y_1	Y_2	S_1	S_2	b_i^s	Ratio
S_1	1	4	1	0	2	½
S_2	3	2	0	1	1	½
W	-30	-40	0	0	0	

الصف المحوري   العنصر المحوري   العمود المحوري

$$\therefore \text{Pivot equation} = \left[\frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{4}, \frac{0}{4}, \frac{2}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{New}(W) = \begin{bmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-40) * \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(S_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (2) * \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثاني، كالآتي:

Basic	Non- B.V.				الثوابت	النسبة
	Y_1	Y_2	S_1	S_2	(b_i')	Ratio
Y_2	$1/4$	1	$1/4$	0	$1/2$	2
S_2	$5/2$	0	$-1/2$	1	0	0
W	-20	0	10	0	20	

الصف المحوري العنصر المحوري العمود المحوري

$$\therefore \text{Pivot equation} = \left[1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right]$$

$$\text{New}(W) = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} - (-20) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Y_2) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} - (1/4) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/10 \\ -1/10 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثالث، على النحو الآتي:

B.V.	Non- B.V.				الثوابت
	Y_1	Y_2	S_1	S_2	(b_i')
Y_2	0	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
Y_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
W*	0	0	6	8	20

بما أن جميع معاملات دالة الهدف (W*) أكبر وتساوي الصفر، أي أن $[C_j \geq 0, \forall j]$، عليه يكون الحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual) كالآتي:

$Y_1 = 0$

$Y_2 = 1/2$

$W^* = 20$

مثال (3):

لديك نموذج البرمجة الخطية (LP) الآتي:

$$\text{Max.} \quad Z = 2X_1 + 5X_2$$

Sub.to:

$$3X_1 + 5X_2 \le 8$$

$$2X_1 + 7X_2 \le 12$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

المطلوب:

1- كتابة النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الأولي السابق.

2- إيجاد الحل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

الحل:

1- يكتب النموذج المقابل (Dual) كالآتي:

$$\text{Min. } W = 8Y_1 + 12Y_2 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Sub. to. :

$$3Y_1 + 2Y_2 \ge 2$$

$$5Y_1 + 7Y_2 \ge 5$$

$$Y_1, Y_2 \ge 0$$

2- إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأولي (Primal Model):

$$\text{Max.} \quad Z - 2X_1 - 5X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

Sub.to:

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 \quad = 8$$

$$2X_1 + 7X_2 \quad + S_2 = 12$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \ge 0$$

نقوم بعمل جدول الحل الأولي كالآتي:

B.V.	Non- B.V.				الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	(b_i)	Ratio
S_1	3	5	1	0	8	$\frac{8}{5}$
S_2	2	7	0	1	12	$\frac{12}{7}$
Z	−2	−5	0	0	20	

الصف المحوري العنصر المحوري العمود المحوري

$$\therefore \text{ Pivot equation} = \left[\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}, 0, \frac{8}{5}\right]$$

$$\text{New}(S_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix} - (7) * \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \\ 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ 0 \\ -7/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{New}(Z) = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} - (-5) * \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \\ 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول حل ثاني كالآتي:

B.V.	Non- B.V.				الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	(bi')
X_2	$3/5$	1	$\frac{1}{5}$	0	$8/5$
S_2	$-11/5$	0	$-7/5$	1	$4/5$
Z^*	1	0	1	0	8

بما أن جميع قيم المعاملات أكبر وتساوي الصفـر، أي أن $[C_j \geq 0, \forall_j]$ ، عليه يكون الحل الأمثل للنموذج الأولي، كالآتي:

$X_1 = 0$

$X_2 = 8/5$

$Z^* = 8$

أما بالنسبة للحل الأمثل للنموذج المقـابل (Dual) فنحصـل عليـه مباشـرة مـن جدول الحل الأمثـل النـهائي للنمـوذج الأولي (Primal) حيـث يتمثـل الحـل الأمثـل عاملات دالة لهدف (Z^*) التي تقع أسفل المتغيرات الراكدة (S_2, S_1) إذ إن:

$Y_1 = 1$

$Y_2 = 0$

$\therefore W^* = Z^* = 8$

أسئلة حول الفصل الرابع

س1: وضح مفهوم النموذج المقابل (Dual Model)، ذاكراً أهم فوائد استخداماته.

س2: وضح خطوات تحويل النمـوذج الأولي (Primal Model) إلى النمـوذج المقـابل (Dual Model).

س3: أكتب النموذج المقابل، لنماذج البرمجة الخطية (LP) الآتية:

1) Max. $Z = X_1 - 2X_2$

Sub. to:

$X_1 + 2X_2 = 8$

$2X_1 - X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

2) Min. $Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3$

Sub. to:

$X_1 + 2X_3 \geq 4$

$2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 6$

$3X_1 + X_2 + 2X_3 = 5$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

3) Max. $Z = 2X_1 + 3X_2$

Sub. to:

$X_1 + 2X_2 \geq 20$

$2X_1 + X_2 = 12$

$X_1, X_2 \geq 0$