الفصل الثاني

نماذج البرمجة الخطية (Linear Programming Models (LPM

٢-١ مقدمة Introduction

يعتقد الكثيرون أن الموارد المتاحة للبشرية كثيرة وقابلة للاستدامة، والحقيقة أنها محدودة وتندر أحياناً، فموارد المياه الصالحة للشرب محدودة، البترول الخام محدود وقابل للنفاذ في المستقبل القريب، الأرض الصالحة للزراعة أو السكن محدودة، محدودية الوقت والموظفين والأموال المتاحة للشركات لإنجاز أعمالها، أضف إلى ذلك محدودية مساحات التخزين والمواد الخام.

من هنا يأتي الدور الفاعل لنماذج البرمجة الخطية لاستخدام الموارد المتاحة بالشكل الأمثل والملائم سواءً على صعيد الأشخاص أو الشركات أو الحكومات التي تعيش في بيئة تنافسية. تُعتبر البرمجة الخطية إحدى نماذج البرمجة الرياضية التي تُعالج مسألة تخصيص أو توزيع الموارد أو الطاقات المحددة لتحقيق هدف مُعين، ويُعبر عن هذا الهدف بدالة خطية تُستخدم لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر وهذهِ العلاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة، وتسمى هذهِ الدالة بدالة الهدف (Objective Function)، وقد تكون دالة تعظيم الربح (Maximum Function)، أو دالة تقليل الكلفة أو الخسائر إلى أقل حد ممكن (Minimum Function)، أو دالة إنتاج، وتخضع هذهِ الدالة إلى قيود عبارة عن معادلات أو متباينات تعبر عن (المواد الأولية الخام، عدد ساعات العمل أو التشغيل، طاقة المكائن، كمية المبالغ المستثمرة في نشاط معين، الأيدي العاملة، مساحات الاراضي النادرة (التي تحتوي النفط أو مناجم الفحم والذهب)....ألخ).

٢-٢ الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية[1] .Basic assumpations for L.P

١. أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقهُ (مثلاً تحقيق أقصى ربح، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد مُمكن).

٢. أن تكون هنالك بدائل مُختلفة للوصول إلى الهدف أو طرق مختلفة لاستغلال الموارد المتاحة والمحدودة.

٣. أن تكون الموارد المُستخدمة محدودة لأن طريقة البرمجة الخطية تتمثل في كونها طريقة علمية تهدف إلى استخدام الموارد المحدودة أفضل استخدام لتحقيق هدف مُعين.

٤. يجب أن تكون هناك علاقة بين المُتغيرات أي توفر عنصر التأكيد وغياب الاحتمالات.

٥. التعبير عن دالة الهدف والقيود بمُعادلات أو مُتباينات خطية.

٦. أن يُعبر النموذج الخطي عن المشكلة قيد الدراسة، وليس العكس بأن تُصاغ المشكلة لتناسب النموذج المُعد مسبقاً.

(1) Ruhul A. Sarker & Charles S. Newton, (2008), "Optimization Modeling – A Practical Approach", CRC Press – Taylor & Francis Group, USA, p. 39.

٢-٣ البرمجة الخطية وبعض مجالات تطبيقها[١]

L.P. and some of its application fields

١. **العسكرية**: تلعب دوراً هاماً في التخطيط العسكري واتخاذ القرار والتوزيع الأمثل للقدرات العسكرية المتاحة.

٢. **التحليل المالي**: كالمصارف وميزانية الدولة للحصول على التوزيع الأمثل حيث يحتاج المحلل المالي إلى اختيار سياسة مالية من بين عدة اختيارات، بهدف تحقيق أقصى عائد من الاستثمار.

٣. **الإدارية**: يوفر المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

٤. **توزيع ونقل البضائع**: لمعرفة كمية البضائع الواجب شحنها من كل مستودع إلى كل زبون بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن، وهذا يساعد العديد من الشركات التي لديها مستودعات في عدة مواقع مختلفة، لتحقيق طلبات الزبائن الذين يطلبون بضائع تلك الشركة.

٥. **الصناعة**: لتعظيم الربح وتخفيض تكلفة التصنيع والانتاج والنقل ووضع جدول انتاج وسياسة مخزون لمقابة الطلب مستقبلاً، الحالة المثلى أن يتم تحقيق كل من الجدول والسياسة والطلب.

٦. **الإنشاءات**: لبناء المشاريع الضخمة لتوفير الوقت المستخدم للمشروع.

٧. **التسويق**: لمعرفة ما هي أفضل طريقة لتوزيع ميزانية إعلان بين أنواع وسائل الإعلام المختلفة مثل الإذاعة، والتلفزيون، والصحف، والمجلات، وذلك لتحديد المزيج الإعلامي الذي يحقق أعلى عائد من الإعلان.

---

(١) الصفدي، محمد سالم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٢١.

٨. **إدارة المستشفيات:** لضبط عملية التغذية والأدوية ضمن الإمكانيات المتاحة.

٩. **التخطيط:** من خلال متابعة المشـــاريع وإعداد الخطة الزمنية اللازمة لتنفيذ تلك المشاريع.

٢-٤ أمثلة لصياغة المشاكل باستخدام نماذج البرمجة الخطية

Examples of formulation problems using L.P. models

مثال (٢-١): من أجل تحضير نوعين من المُنتجات P_1 و P_2 نستخدم ثلاث أنواع من مُستلزمات الأنتاج S_1 و S_2 و S_3، حيثُ إن إحتياطي هذهِ المواد الأولية والمُتوفره لدينا معلوم، وكذلك المُعدلات اللازمة من هذهِ المواد لإنتاج كل وحدة من P_1 و P_2، وبما إن هذهِ المنتجات ستنزل للسوق للتصريف فإن الربح المتوقع من تصريف كل وحدة منتجة معلوم لدينا أيضاً ومعطى بالجدول الآتي:

أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في الانتاج	كمية مُستلزمات الانتاج اللازمة لانتاج وحدة واحدة من البضاعة P_1	P_2	احتياطي مُستلزمات الانتاج المتوفر والمُتاح للأستخدام
S_1	2	5	20
S_2	6	5	45
S_3	4	6	30
الربح الذي يُمكن تحقيقهُ من انتاج وحدة واحدة مقدراً بالوحدات النقدية	32	40	

والمطلوب وضع الخطة المثالية للانتاج بحيث نحصل على أكبر ربح مُمكن مراعين في ذلك الاحتياطي المتوفر أو المُتاح من مُستلزمات الانتاج، وإن السوق مفتوحة وتستوعب كامل الانتاج.

الحل: من إجل تصميم النموذج نفترض أن:

X_1 تُمثل كمية الانتاج من النوع الأول P_1 حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2 تُمثل كمية الانتاج من النوع الثاني P_2 حيثُ $X_2 \geq 0$.

إن انتاج هذهِ الكميات يتطلب كمية من المواد الأولية التي ندعوها بمُستلزمات الانتاج، والتي لا يُمكن أن تُستهلك إلا بإطار ما هو متوفر لدينا حيثُ إن الكمية المُتاحة محدودة ويجب إستغلالها لانتاج البضائع الأكثر ربحية، أي البضائع التي توفر لنا فائض وأعظم مقدار من الربح، وهذا ما عبرنا عنهُ من خلال الكمية المنتجة X_1 و X_2، ومن خلال الاحتياطي المتوفر والذي يُمكن التعبير عنهُ بالمتباينات الخطية الآتية:

قيد المادة الأولية S_1 ..... $2X_1 + 5X_2 \leq 20$

قيد المادة الأولية S_2 ..... $6X_1 + 5X_2 \leq 45$

قيد المادة الأولية S_3 ..... $4X_1 + 6X_2 \leq 30$

نُلاحظ من العلاقات الرياضية الموضوع كقيود لحل المُشكلة، أنهُ لا يجوز أن تتجاوز كمية مُستلزمات الانتاج الضرورية لعمليات الانتاج حجم الاحتياطي المُتاح الموجود لدينا من المواد الأولية.

وبناء على القيود الموضوعة فإن نوع المنتج الذي لا نرغب بإنتاجه لضعف ربحيته سوف يأخذ القيمة صفر $(X_i = 0)$، وهذا يعني إن الانتاج من البضاعة ذات النوعية (i) سيكون معدوماً، وإذا رغبنا بانتاج البضاعة P_i حتى لو كانت بكميات قليلة فإن $(X_i>0)$، وأنطلاقاً من هذا فإن الكميات التي يُمكن إنتاجها $(X_1, X_2, \dots , X_n)$ يُمكن أن تأخذ إحدى حالتين هُما: أما حالة إنعدام الانتاج، أو حالة الانتاج، ولا ثالث لهاتين الحالتين، أي لا يوجد لدينا الحالة السلبية لأن الانتاج السلبي ليس لهُ معنى اقتصادي في مسألتنا.

لذلك يجب أن نُعبر في النموذج الرياضي عن رفضنا للانتاج السالب بقيود خاصة نُضيفها للنموذج وندعوها بقيود عدم السلبية بالصيغة الآتية:

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ \dots\ ,\ X_n \geq 0$$

إن الهدف النهائي للحل في مثل هذهِ المسائل هو الحصول على الحد الأعظم من الربح بشرط أن يتوفر لنا في السوق المُفتوحة تصريف وبيع كامل للبضائع المُنتجة، ونُعبر عن ذلك من خلال تابع يحتوي على (n) عدد من المتغيرات تُمثل الانتاج البضائعي، والذي يُمكن تحديدهُ في مثالنا بالمتغيرين $(X_1\ ,\ X_2)$ وإن بيع الكمية X_1 من البضاعة P_1، والكمية X_2 من البضاعة P_2 تُعطي ربحاً يتناسب طردياً مع كميات الوحدات من البضائع $(X_1\ ,\ X_2)$، فنحصل على ربحاً من كمية المنتج الأول مقدارهُ $(32X_1)$، وربحاً من كمية المنتج الثاني مقدارهُ $(40X_2)$ وحدة نقدية، ويكون إجمالي الأرباح من مُختلف البضائع المُنتجة مساوياً للعلاقة[١]:

$$Z(x) = 32X_1 + 40X_2 \qquad \text{(وحدة نقدية)}$$

وبما إن النموذج لا يحدد الكميات الواجب انتاجها من البضائع فإن هنالك عدداً كبيراً من الحلول التي يُمكن أن تحقق قيود المسألة، ولكن لا تُحقق الحالة المثلى، والحل الوحيد الذي يُحقق مثلوية المسألة هو الحل الذي تُبنى على أساسهِ خُطة الانتاج، ويكون هو البديل المثالي الذي يجب أن نتخذ بهِ القرار المثالي، بحيث يُحقق كامل قيود المسألة ويُعطينا أعظم ربح مُمكن (Maximum)، الشيء الذي نعتبرهُ هدفاً أساسياً للمشكلة المطروحة والذي نبحث عنه لاتخاذ القرار المثالي وذلك من خلال أهم توابع النموذج

---

(١) نستخدم عادة الرمز $Z(x)$ أو Z أو X_0 أو أي رمز أخر للدالة على رمز دالة الهدف.

الرياضي وهو التابع الهدفي، والذي يشكل مع باقي قيود النموذج وقيد عدم السلبية النموذج الرياضي للمسألة الآتي:

Max. $Z(x) = 32 X_1 + 40 X_2$ (دالة الهدف)

Sub. to

(القيود الهيكلية)

$2 X_1 + 5 X_2 \leq 20$ ..... S_1 قيد المادة الأولية

$6 X_1 + 5 X_2 \leq 45$ ..... S_2 قيد المادة الأولية

$4 X_1 + 6 X_2 \leq 30$ ..... S_3 قيد المادة الأولية

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ ..... قيد عدم السلبية

عند هذهِ المرحلة يُمكن تعميم مسائل انتاج البضائع ونموذجها الخطي أعلاه في مختلف القطاعات المنتجة الصناعية والزراعية والتجارية، وذلك بافتراض إن المؤسسة لديها (n) نوع من البضائع أو المنتجات، ولديها (m) نوع من مُستلزمات الانتاج الواجب توفرها للعملية الانتاجية بما فيه المواد الأولية والأصول الثابتة والأيدي العاملة والأراضي الزراعية وغيرها، وسنستخدم الرموز الآتية(١):

S_i تمثل أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في العملية الانتاجية حيثُ يُمكن أن تأخذ قيم (i) عدداً من الأنواع تساوي (m) حيثُ $(i=1,2,3,\ldots,m)$.

B_i تمثل الاحتياطي المُتاح أو المتوفر من كل نوع من أنواع مستلزمات الأنتاج (m) حيثُ $(i=1,2,3,\ldots,m)$.

P_j تُمثل أنواع البضائع التي يُمكن انتاجها من خلال المؤسسة الانتاجية وعددها (n) حيث $(j=1,2,3,\ldots,n)$.

---

(١) البلخي، زيد تميم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٥.

a_{ij} هي كمية المواد الأولية أو مستلزمات الانتاج أو ساعات العمل (عوامل الانتاج المختلفة) من النوع (i) والتي تُنفق لانتاج وحدة بضائعية واحدة من النوع (j) حيثُ $(i=1,2,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n)$ إذ أن كل نوع من البضائع تحتاج إلى كميات مُختلفة من مستلزمات الانتاج ندعوها بمُعدلات الانتاج.

بهذا يُمكن وضع الشكل العام لمسائل انتاج البضائع كما في جدول (٢-١) الآتي(١)(٢):

أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في الانتاج	كمية مُستلزمات الانتاج اللازمة لانتاج وحدة واحدة من البضاعة $P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n$	احتياطي مُستلزمات الانتاج المتوفر والمتاح للاستخدام
S_1 S_2 . . . S_m	$a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}$ $a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}$ . . . . $a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}$	b_1 b_2 . . . b_m
الربح الذي يُمكن تحقيقهُ من انتاج وحدة بضاعة واحدة مقدراً بالوحدات النقدية	$C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n$	

جدول (٢-١) يوضح الشكل العام لمسائل انتاج البضائع

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 32.

(2) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 9.

وباعتبار أن X_j هي كمية وحدات البضائع من النوع (j) الواجب إنتاجها من كل الأنواع، وأن هذهِ الكميات من البضائع يجب أن تتفق مع قيد عدم السلبية.

بهذا يُمكن وضع الصيغة العامة للنموذج الرياضي الخطي على النحو الآتي:

$$\text{Max.} \quad Z(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \qquad (\text{دالة الهدف})$$

Sub. to

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \le b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \le b_m$$
$$X_j \ge 0 \quad \forall (j = 1,2, \dots,n)$$

مثال (٢-٢): أستلمت الشركة العامة للصناعات البتروكيمياوية في البصرة طلب للحصول على 1400 كغم من خليط حبيبات بلاستيكية (بولي آثيلين) عالي الكثافة (HDPE) التي تتكون من ثلاث مركبات وبالمواصفات الآتية:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الأول.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كغم من المركب الثاني.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كغم من المركب الثالث.

وأن كلفة الكغم من المركب الأول والثاني والثالث هي 2 و3 و4 ألف دينار على التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذه المسألة والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

المتغيرات التي ترتبط بالمسألة عبارة عن عدد الكيلوغرامات من كل مركب والتي ستدخل في تكوين الخليط البتروكيمياوي، حيثُ نفرض أن:

X_1: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الأول حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$.

X_3: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثالث حيثُ $X_3 \geq 0$.

دالة الهدف: كلفة الكغم الواحد من المركب الأول تساوي 2 ألف دينار فإذا استخدمنا (X_1) كغم من هذا المركب فستكون الكلفة $2X_1$ ألف دينار، بنفس الطريقة إذا استخدمنا X_2 كغم من المركب الثاني فستكون الكلفة $3X_2$ ألف دينار، كذلك إذا استخدمنا (X_3) كغم من المركب الثالث ستكون التكلفة $4X_3$ ألف دينار.

وحيث أن الهدف هو تقليل الكلفة (.Min) لذا فإن دالة الهدف ستكون على الصورة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

القيود الفنية:

- القيد الفني الأول: شرط الطلبية أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الأول لذا يتم صياغة القيد الأول بالشكل $X_1 \leq 400$.
- القيد الفني الثاني: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كغم من المركب الثاني أي أن $X_2 \geq 200$.
- القيد الفني الثالث: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كغم من المركب الثالث أي أن $X_3 \geq 150$.
- القيد الفني الرابع: كمية الطلب من الخليط يجب أن تساوي 1400 كغم، عندها سيكون القيد الرابع هو $X_1 + X_2 + X_3 = 1400$.

مما سبق نجد أن نموذج البرمجة الخطية والذي سيؤدي إلى تخفيض التكاليف بالصيغة الآتية:

$$Min.\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

Sub. to.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \leq 400 \\ X_2 \geq 200 \\ X_3 \geq 150 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1400 \end{array}\right\} \text{القيود الفنية}$$

$X_j \geq 0$ where $j = 1,2,\ldots,n$ قيود عدم السالبية

مثال (٢-٣): تنتج شركة آسيا لصناعة الأصباغ المحدودة – فرع بغداد نوعين من مواد الأصباغ آسيا (A) و كريستال (B)، حددت الشركة إن انتاجها من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر، كما إن طلب العميل الرئيسي من المادة الأولى 125 لتر يجب تحقيقها، ويحتاج انتاج لتر من المادة A إلى ساعتين ومن المادة B إلى ساعة واحدة، علماً أن عدد ساعات الانتاج المتاحة الشهر القادم 600 ساعة فقط، وأن تكلفة انتاج اللتر الواحد من المادة A وB هو ألفين وثلاثة ألاف دينار على التوالي، أن هدف الشركة هو تحقيق المتطلبات السابقة بأقل تكلفة إنتاج مُمكنة.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المادة A حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المادة B حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق متطلبات العميل بأقل تكلفة انتاج مُمكنة، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من ثلاث قيود هي:

١. قيد الانتاج من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر:

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

٢. يجب تحقيق قيد طلب العميل الرئيسي من المادة الأولى وهو 125 لتر:

$$X_1 \geq 125$$

٣. قيد عدد ساعات الإنتاج المتاحة الشهر القادم 600 ساعة فقط:

$$X_1 + X_2 \leq 600$$

٤. قيد عدم السالبية لجميع متغيرات القرار:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sub to

$$X_1 + X_2 \geq 350$$
$$X_1 \geq 125$$
$$X_1 + X_2 \leq 600$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

مثال (٢–٤): تقوم إحدى مُنشآت وزارة التجارة العراقية بوضع خطة لاستيراد ثلاثة أنواع من السلع لغرض تسويقها في السوق المحلي، علماً أن نفقات الشراء والنفقات الأخرى موضحة بالجدول الآتي:

النفقات	المبالغ بآلاف الدنانير للسلعة			المبالغ المُخصصة للسلعة
	الأولى	الثانية	الثالثة	
نفقات التسويق	2	2	1	مساوية لـ 400000 دينار
نفقات إدارية	2	1	2	على الأقل مساوية لـ300000 دينار
نفقات متنوعة	4	2	2	على الأكثر مساوية لـ100000 دينار
سعر الشراء	5	4	6	

المطلوب: تحديد الحجم الأمثل للاستيراد والذي يحقق أقل كلفة مُمكنة.

الحل: لصياغة النموذج الخطي يجب وضع الفرضيات الآتية:

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الأول حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض X_3 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الثالثة حيثُ $X_3 \geq 0$

Min. $X_0 = 5X_1 + 4X_2 + 6X_3$ (دالة الهدف)

Sub. to

$$\left.\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + X_3 &= 400000 \quad \text{.....} \quad \text{قيد نفقات التسويق} \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 &\geq 300000 \quad \text{.....} \quad \text{قيد النفقات الأدارية} \\ 4X_1 + 2X_2 + 2X_3 &\leq 100000 \quad \text{.....} \quad \text{قيد نفقات متنوعة} \end{aligned}\right\} \text{(القيود الهيكلية)}$$

$X_1 \geq 0 ,\ X_2 \geq 0 ,\ X_3 \geq 0$ ..... قيد عدم السلبية

مثال (٢-٥): ينتج مصنع ميديا للمناديل الورقية في السليمانية ثلاثة نماذج (I, II, III) من المناديل، باستخدام نوعين من المواد الخام A و B، علماً بأن الكميات المُتاحة من كل نوع هي 12000 و 15500 وحدة من المادة A و B على التوالي، والجدول التالي يبين الكميات المطلوبة من كل نوع من الخامات لانتاج المنتجات الثلاثة. إذا كان الوقت المطلوب لكل وحدة من النموذج الأول هو ضعف الوقت المطلوب لوحدة من النموذج الثاني وثلاثة أمثال الوقت المطلوب لوحدة من النموذج الثالث.

المواد الخام	المتطلبات لكل وحدة من أنواع النماذج الثلاث I	II	III	ما مُتاح من كل نوع من الماده الخام
A	7	3	5	12000
B	4	2	7	15500

إن الطاقة التشغيلية للمعمل تستطيع أن تنتج ما يكافيء 700 وحدة من النموذج الأول، ولقد أشارت دراسة السوق لمحافظات العراق إلى أن الحد الأدنى المطلوب من كل نوع هو 200 و 200 و 150 وحدة على التوالي، فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من الأنواع الثلاث على التوالي هي 3 و 2 و 6 ألف دينار. المطلوب كتابة المسألة أعلاه بصيغة برمجة خطية لتحديد عدد الوحدات المصنعة من كل نموذج بحيث تحصل الشركة على أعظم ربح مُمكن.

الحل: لصياغة النموذج الرياضي يجب إعادة تنظيم المعلومات التي بحوزتِنا وفق الجدول التالي ووضع الفرضيات الآتية:

المواد الخام	المتطلبات لكل وحدة من أنواع النماذج الثلاث I	II	III	ما مُتاح من كل نوع من الماده الخام
A	7	3	5	12000
B	4	2	7	15500
ربح الوحدة الواحدة (بالآلاف)	3	2	6	
الحد الأدنى المطلوب من كل نوع	200	200	150	

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول I حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني II حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض X_3 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثالث III حيثُ $X_3 \geq 0$

Max. $X_0 = 3 X_1 + 2 X_2 + 6 X_3$ (دالة الهدف)

Sub. to

$7X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 12000$ ..... قيد المادة الخام من نوع A

$4X_1 + 2X_2 + 7X_3 \leq 15500$ ..... قيد المادة الخام من نوع B

$X_1 + 0.5 X_2 + (1/3) X_3 \leq 700$ ..... قيد الطاقة التشغيلية للمعمل

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq 200 \\ X_2 \geq 200 \\ X_3 \geq 150 \end{array}\right\} \text{-----}$$

قيود متطلبات السوق من المنتجات
(وهو نفسه قيد عدم السالبية)

مثال (٢-٦): تنتج شركة صناعات الأصباغ الحديثة التابعة لوزارة الصناعة والمعادن في بغداد أربعة مُنتجات يتم انتاجها باستخدام نوعين من المكائن، الوقت المطلوب لكل وحدة مُنتجة مقدراً بالساعة على الماكنة الأولى هو (2، 3، 4، 2) والوقت على الماكنة

الثانية هو (3، 2، 1، 2)، إذا علمت أن الكلفة الكلية لانتاج كل وحدة مُعتمد على التكاليف المباشرة لوقت الماكنة، وإن كلفة الساعة الواحدة للماكنة الأولى والثانية تساوي 10 و 15 ألف دينار على التوالي، وإن عدد الساعات الكلي المخصص للمنتجات الأربعة على الماكنتين يساوي 500 و380 ساعة، أما سعر البيع للوحدة الواحدة فهو على الترتيب: 80 , 70 , 55 , 45 ألف دينار.

المطلوب: صياغة المسألة بصورة برمجة خطية لتعظيم الربح الصافي من بيع المنتجات الأربعة.

الحل: في البداية يتم وضع الفرضيات الخاصة بالمسألة وهي:

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 1 حيثُ $X_1 \geq 0$.

و X_2 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 2 حيثُ $X_2 \geq 0$.

و X_3 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 3 حيثُ $X_3 \geq 0$.

و X_4 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 4 حيثُ $X_4 \geq 0$.

هامش الربح لكل وحدة من المنتجات الأربعة = سعر البيع – تكاليف الإنتاج

$X_1 = 80 - (2(10) + 3(15)) = 15$

$X_2 = 70 - (3(10) + 2(15)) = 10$

$X_3 = 55 - (4(10) + 1(15)) = 0$

$X_4 = 45 - (2(10) + 2(15)) = -5$

بهذا يُمكن صياغة دالة الهدف (دالة تعظيم للربح الصافي) وقيود المسألة بالصيغة الآتية:

$$\text{Max. } X_0 = 15X_1 + 10X_2 + 0X_3 - 5X_4$$

Sub. to

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \leq 500$$ قيد عدد الساعات المُخصصة على الماكنة الأولى

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 380$$ قيد عدد الساعات المُخصصة على الماكنة الثانية

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$ قيد عدم السلبية

مثال (٢-٧): ترغب الشركة العامة للصناعات الجلدية – بغداد في انتاج نوعين من الحقائب النسائية، وذلك بعد أن عُلم من إدارة التسويق أن هناك طلباً عليها إذا أمكن انتاجها بسعر منافس للأنواع المماثلة في السوق، وبعد دراسة جيدة لمراحل انتاج هذه الحقائب أتضح أن انتاج الحقيبة الواحدة يتطلب المراحل الآتية:

١. قص وصبغ الجلود.
٢. الخياطة.
٣. التشطيبات (إضافة سحاب، الإقفال، إلخ...).
٤. الفحص والتغليف.

كما تمكنت الشركة من الحصول على المعلومات المعطاة في الجدول إدناه عن الوقت اللازم بالساعة لانتاج كل نوع في كل مرحلة والطاقة الانتاجية المتوفرة في الشركة محسوبة بالساعة أيضاً:

نوع العملية / نوع الحقيبة	القص والصبغ	الخياطة	التشطيب	الفحص
حقيبة عادية	5	1.25	1	1.4
حقيبة ممتازة	3	2.5	1.5	1
الطاقة الإنتاجية المتوفرة	لا تقل عن 525	لا تزيد عن 600	لا تزيد عن 585	لا تزيد عن 315

وبدراسة مواصفات وتكاليف الحقائب المطلوب انتاجها قررت ادارة المحاسبة أن يكون الربح للحقيبة العادية 10 ألاف دينار وللحقيبة الممتازة 9 ألاف دينار.

المطلوب: كم يجب أن تنتج الشركة من كل نوع بحيث يحقق أقصى ربح ممكن.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من الحقيبة العادية حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من للحقيبة الممتازة حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق متطلبات السوق لتحقيق أقصى ربح ممكن، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة التالية علماً إن ربح الشركة سوف يأتي من مصدرين:

ربح من انتاج X_1 من الحقائب العادية = $10\ X_1$

ربح من انتاج X_2 من الحقائب الممتازة = $9\ X_2$

$$\text{Max. } Z = 10\ X_1 + 9\ X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من 4 قيود هي:

١. قيد الطاقة الانتاجية لعملية القص والصبغ لا تقل عن 525 ساعة:

$$5\ X_1 + 3\ X_2 \geq 525$$

٢. قيد الطاقة الانتاجية لعملية الخياطة لا تزيد عن 600 ساعة:

$$1.25\ X_1 + 2.5\ X_2 \leq 600$$

٣. قيد الطاقة الانتاجية لعملية التشطيب لا تزيد عن 585 ساعة:

$$X_1 + 1.5\ X_2 \leq 585$$

٤. قيد الطاقة الانتاجية لعملية الفحص لا تزيد عن 315 ساعة:

$$1.4\ X_1 + X_2 \leq 315$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 10\,X_1 + 9\,X_2$$

Sub. to

$$5\,X_1 + 3\,X_2 \ge 525 \quad \ldots(1)$$
$$1.25\,X_1 + 2.5\,X_2 \le 600 \quad \ldots(2)$$
$$X_1 + 1.5\,X_2 \le 585 \quad \ldots(3)$$
$$1.4\,X_1 + X_2 \le 315 \quad \ldots(4)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

٢-٥ الصيغة العامة لنماذج البرمجة الخطية(*)

General formulation of L.P. models

بعد العرض السابق لأمثلة تتعلق بالبرمجة الخطية، يُمكن صياغة البرنامج الخطي الذي يتضمن دالة الهدف (Z or X_0) والقيود التي من المُمكن أن تأخذ العلاقة ($\le$, = , $\ge$)، وأن جميع متغيرات القرار X_j تكون غير سالبة ($X_j \ge 0$) لأنها متغيرات تتصل بالواقع لذلك فالنتيجة السالبة لها تصبح كميات غير حقيقية (لأنها قد تُعبر عن كمية منتجة، خليط، زبائن وغيرها – وهي كميات موجبة بطبيعة الحال ولا يسمح بأن تكون قيمة سالبة)، ولذلك يُمكن وضع الصيغة العامة بدلالة أشارة المجموع(١):

(*) راجع المصدر:

الفضل، مؤيد عبد الحسين، "المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، **مصدر سبق ذكره**، الفصل الثاني، ص ٦٥، للمزيد من نماذج البرمجة الخطية المستخدمة في أتخاذ القرار الأمثل.

(1) Winston Wayne L., (2004), "Operations Research: Application and Algorithms", Thomson Learning, USA, p. 23.

$$Max.\ or\ Min.\quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Sub.to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.X_j \le b_i \quad \forall \quad (i=1,2,\dots,m)\&(j=1,2,\dots,n)$$

$$X_j \ge 0 \quad \forall \quad (j=1,2,\dots,n)$$

حيثُ C_j , a_{ij} , b_i ثوابت تُحدد من سياق المسألة لكل قيم i و j.

X_j المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بشأنها.

أو باستخدام إشارة المصفوفات والمُتجهات:

Max. or Min. Z = C X

Sub. to

A X (≤ , = , ≥) B

X ≥ 0

حيثُ $C = [C_1 \ \ C_2 \ \dots \ C_n]$ متجه صفي عدد عناصرهُ n، ويُمثل عناصر مُعاملات دالة الهدف.

وإن $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$ مُتجه عمودي عدد عناصرهُ n، ويُمثل مُتغيرات القرار.

وإن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة (m × n) تُمثل مُعاملات مُتغيرات القرار في القيود.

إن الخطوة الرئيسية التالية بعد صياغة نموذج البرمجة الخطية هي تحليل النموذج رياضياً، لكن نظراً لاختلاف صيغ البرمجة الخطية فُمن الضروري تعديل هذهِ الصيغ لتحديد نموذج حل مناسب، لهذا توجد صيغتان هما الشكل أو الصيغة القانونية (Canonical Form)، والصيغة القياسية أو المعيارية (Standard Form)، وكما موضح بالشكل الآتي:

٢-٥-١ الصيغة القانونية Canonical Form

يُمكن وضع الشكل القانوني التالي للصيغة العامة للبرمجة الخطية التي تم الإشارة إليها أعلاه:

$$Max.\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Sub.to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.X_j \ \le \ b_i \quad \forall \ \ (i = 1,2,\dots,m)\&(j = 1,2,\dots,n)$$

$$X_j \ge 0 \quad \forall \ \ (j = 1,2,\dots,n)$$

وخصائص هذهِ الصيغة هي[١] [٢]:

١. يتم تحويل جميع متغيرات القرار X_j إلى الإشارة $\geq$ (لأنها كمية موجبة).

٢. يتم تحويل إشارة جميع قيود المسألة إلى نوع أقل أو يساوي $\leq$.

٣. جعل دالة الهدف من نوع .Max.

وبالإمكان وضع أي صيغة للبرمجة الخطية بالشكل القانوني أو العام باستخدام عمليات التحويل الأولية (Elementary Transformation) والتي يتم أستعراضها بالشكل المُبسط الآتي:

1. $\text{Min. } Z \xrightarrow{\times(-1)} \text{Max. } (-Z) = \text{Max. } W, \text{ Where } W = (-Z)$

2. $a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \xrightarrow{\times(-1)} -a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b$

3. قيد المُساواة يتحول إلى مُتباينتين مُتعاكستين بالاتجاه هما ≤ و ≥ ثم تُحول الـ ≥ إلى ≤ وذلك بضربها بالإشارة السالبة كما في المثال الآتي:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 = b \longrightarrow \begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b \\ a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \xrightarrow{\times(-1)} -a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b \end{cases}$$

4. بالنسبة للقيد المُتكون من قيمة مُطلقة في الطرف الأيسر منهُ فيتحول إلى مُتباينتين بالشكل الآتي:

$$| a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b | \longrightarrow \begin{cases} +(a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b) \\ -(a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b) \end{cases}$$

(١) صادق، ثناء رشيد، (٢٠٠١)، "بحوث العمليات – البرمجة الخطية"، منشورات جامعة عمر المختار – البيضاء – ليبيا، ص ٢٥.

(2) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 10.

5. بالنسبة للمتغير غير المُقيد بالإشارة (أي أن إشارتهُ غير مُحددة فيما أذا كانت موجبة أو سالبة أو صفر) فيُمثل بالفرق بين متغيرين إشارة كل منهما غير سالبة، كما في المثال الآتي:

$$If \quad X_1 \quad Unrestricted\ in\ Sign$$

$$\therefore \quad let \quad X_1 = \left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1\right) \qquad Where \qquad \bar{X}_1 \ , \bar{\bar{X}}_1 \ \geq 0$$

مُلاحظة (٢-١): يتحول قيد القيمة المُطلقة والمُساواة إلى أربع قيود كما في القاعدة الآتية:

If $\left| a_1 X_1 + a_2 X_2 \right| = b$ $\longrightarrow$

- $+\,(a_1 X_1 + a_2 X_2) = b$
  - $a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$
  - $-\,a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -\,b$
- $-\,(a_1 X_1 + a_2 X_2) = b$
  - $-\,(a_1 X_1 + a_2 X_2) \leq b$
  - $+\,(a_1 X_1 + a_2 X_2) \leq -\,b$

مثال (٢-٨): حول مُشكلة البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القانونية (Convert the L.P.P. below to the Canonical Form)

Min. $Z = 3\,X_1 - 3\,X_2 + 7\,X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + 3\,X_3 \geq 50$$

$$5\,X_1 + 3\,X_2 = 20$$

$$\left| 5\,X_1 + 8\,X_3 \right| \leq 100$$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign

الحل: يجب تحويل الـ(.L.P.P) إلى الصيغة القانونية باستخدام عمليات التحويل الأولية الآتية:

$\because X_3 \quad Unrestricted\ in\ Sign$

$\therefore \quad let \quad X_3 = (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \quad Where \quad \bar{X}_3 , \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$

Min. $Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \xrightarrow{\times(-1)}$ Max. W = Max. $(-Z)$

Where $W = -Z = -3X_1 + 3X_2 - 7(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3)$

Sub. to

$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 50 \xrightarrow{\times(-1)} -X_1 - X_2 - 3(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq -50$

$5X_1 + 3X_2 = 20 \longrightarrow \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 20 \\ -5X_1 - 3X_2 \leq -20 \end{cases}$

$|5X_1 + 8X_3| \leq 100 \longrightarrow \begin{cases} 5X_1 + 8(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100 \\ -5X_1 - 8(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100 \end{cases}$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign $\longrightarrow X_1, X_2, \bar{X}_3, \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$

٢-٥-٢ الصيغة القياسية Standard Form

تُعتبر هذهِ الصيغة أفضل من السابقة لأنها تُستخدم في الطريقة العامة (Simplex Method) المعتمدة في تحليل البرامج الخطية، وأهم خصائصها هي[1]:

١. تحويل جميع القيود الواردة بالمسألة إلى معادلات ماعدا القيد الخاص بإشارة المتغيرات.

٢. عناصر الطرف الأيمن ((.Right Hand Side (R.H.S) من كل قيد تكون بالصيغة $b_i \geq 0$.

٣. جميع متغيرات القرار تكون بالصيغة أكبر أو يساوي للصفر $X_j \geq 0$.

٤. دالة الهدف تكون من نوع Minimum أو Maximum.

مُلاحظة (٢-٢): يتم تحويل قيود المُتباينات إلى مُساواة (معادلات) وذلك بإضافة أو طرح متغيرات وهمية ($S_i \geq 0$) إلى الطرف الأيسر من كل قيد، وهذهِ المتغيرات تضاف للقيود من نوع أصغر أو يساوي ($\leq$)، وتطرح من القيود من نوع أكبر أو يساوي ($\geq$)، وكما موضح في القاعدة الآتية:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \\ \underline{\text{or}} \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{القياسية}} \begin{array}{l} a_1 X_1 + a_2 X_2 - S_1 = b \\ a_1 X_1 + a_2 X_2 + S_2 = b \end{array}$$

حيثُ $S_i \geq 0$ متغيرات وهمية لا تؤثر على الحل.

مُلاحظة (٢-٣): يُدعى المتغير الوهمي بالمتغير المُهمل (.Slack Var) عندما يضاف للطرف الأيسر للقيد من نوع ($\leq$) وذلك لأن b هي طاقة أو أمكانية متوفرة، لذا فإن S_i

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 32.

تُمثل طاقة أو أمكانية غير مُستهلكة أو مُهملة ينبغي أضافتها للطرف الأيسر لتصبح المتباينة مُساواة، ويُدعى المتغير الوهمي بالمتغير الفائض (Surplus Var.) عندما يطرح من الطرف الأيسر للقيد من نوع (≥) وذلك لأن b تُمثل كمية مطلوبة لذا S_i هي كمية فائضة أو زائدة عن الكمية المطلوبة ينبغي طرحها من الطرف الأيسر لتصبح المُتباينة مُساواة.

تلعب الصيغة القياسية دوراً مهماً في حل مسائل L.P.P. وبصورة عامة إذا كانت لدينا المسألة الآتية:

$$\begin{aligned} &Max.Z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ &\textbf{Sub.to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \le b_i \\ &X_j \ge 0 \ , b_i \ge 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{القياسية}} \quad \begin{aligned} &Max.Z - \textstyle\sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0S_i = 0 \\ &\textbf{Sub.to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j + S_i = b_i \\ &X_j \ge 0 \ , b_i \ge 0 \ , S_i \ge 0 \end{aligned}$$

مثال (٢-٩): أكتب مسألة البرمجة الخطية التالية بالصيغة القياسية:

Max. $Z = 3X_1 - 2X_2$

Sub. to

$$X_1 - 2X_2 \ge 3$$
$$3X_1 + 4X_2 \le 2$$
$$X_1 + 3X_2 = 5$$

X_1, X_2 Unrestrected in sign.

الحل: يتم في البداية الاستعاضة عن المتغيرين X_1, X_2 بمتغيرات موجبة وذلك بسبب أنهما غير محددان بإشارة (Unrestricted in sign) كما ورد في قيد عدم السالبية في المسألة: