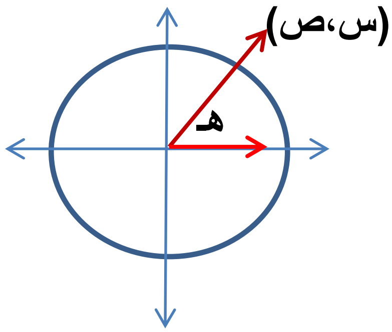
الاقترانات المثلثية :

* الدائرة التي مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة تسمى (دائرة الوحدة)

تعريف: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية هـ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة (س،ص) فانه يمكن تعريف الاقترانات المثلثية :



جا هـ = ص ، جتا هـ = س ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

وتسمى الاقترانات المثلثية الأساسية للزاوية هـ .

ملاحظة : بما أن النقطة (س،ص) تقع على دائرة الوحدة

-١ ≤ س ≤ ١ ، -١ ≤ ص ≤ ١

-١ ≤ جتا هـ ≤ ١ ، -١ ≤ جا هـ ≤ ١

مثال (١): أجد قيمة الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية الآتية :

٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠

الحل : ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١ ، ٠)، وينتج : جا ٠ = ٠ ، جتا ٠ = ١ ، ظا ٠ = ٠

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٩٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠ ، ١)،

وينتج : جا ٩٠ = ١ ، جتا ٩٠ = ٠ ، ظا ٩٠ قيمة غير معرفة

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ١٨٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (-١ ، ٠)،

وينتج : جا ١٨٠ = ٠ ، جتا ١٨٠ = -١ ، ظا ١٨٠ = ٠

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠ ، -١)،

وينتج : جا ٢٧٠ = -١ ، جتا ٢٧٠ = ٠ ، ظا ٢٧٠ قيمة غير معرفة

ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٣٦٠ ، يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١ ، ٠)،

وينتج : جا ٣٦٠ = ٠ ، جتا ٣٦٠ = ١ ، ظا ٣٦٠ = ٠

مثال(٢): اذا قطع ضلع الانتهاء الزاوية بالوضع القياسي التي قياسها هـ دائرة الوحدة في النقطة

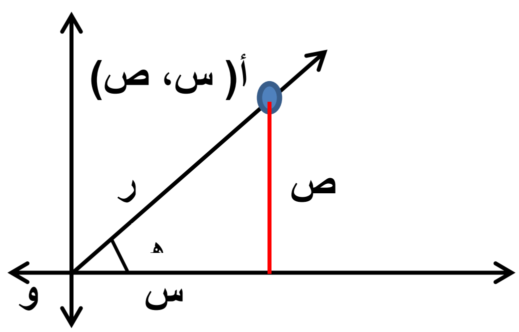
أ $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} \right)$ فإن :

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ (لأن جا هـ = الاحداثي الصادي للنقطة أ)

جتا هـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لأن جتا هـ = الاحداثي السيني للنقطة أ)

ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٢} \div -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{-٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

وبشكل عام اذا كانت هـ زاوية في الوضع القياسي، وكانت النقطة أ (س، ص) تقع على ضلع انتهائها ، وكان بعد النقطة أ (س ، ص) عن نقطة الأصل = ر ، فان :

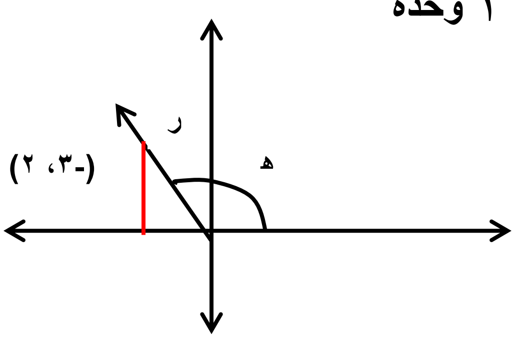


جا هـ = $\frac{ص}{ر}$

جتا هـ = $\frac{س}{ر}$

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ ٠

مثال (٣): في الشكل المجاور أجد قيم الاقترانات المثلثية جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ



الحل: ر = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$ وحدة

جا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ ، جتا هـ = $\frac{-٣}{\sqrt{١٣}}$ ، ظا هـ = $\frac{٢}{-٣}$

ملاحظة : * زاوية اسناد الزاوية (هـ) : هي الزاوية الحادة الناتجة عن اتحاد ضلع انتهاء الزاوية ومحور السينات الموجب

* قيم الاقترانات المثلثية لزاوية الاسناد هي ذاتها قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الأساسية، بينما تتحدد اشارة تلك القيم حسب موقع ضلع انتهاء الزاوية (أي ربع من المستوى الديكارتي).

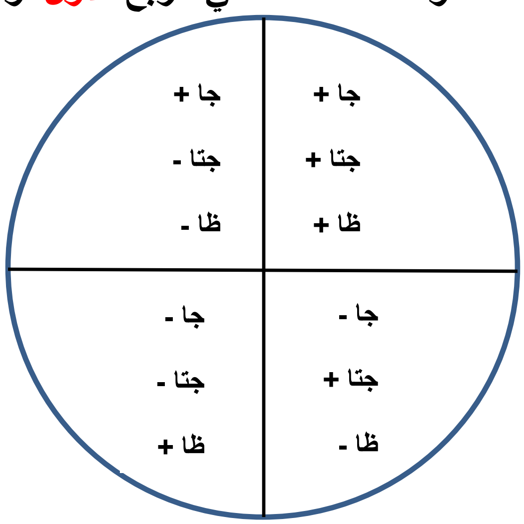
قياس الزاوية	جا س	جتا س	ظا س
٣٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$

ملاحظة : تتحدد اشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه

اذا كانت الزاوية هـ سالبة تعني انها باتجاه مع عقارب الساعة

*** تكون اشارة (س) موجبة اذا وقعت النقطة أ في الربع الأول او الربع الرابع من المستوى.**

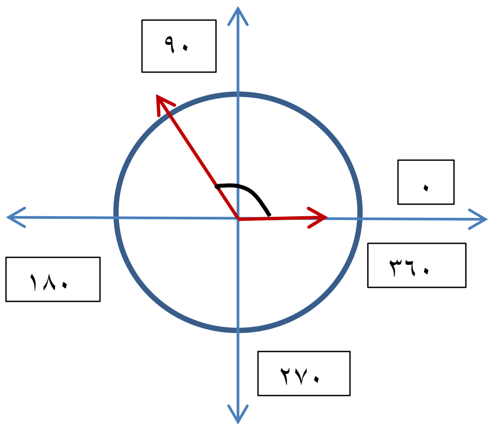
*** تكن اشارة (ص) موجبة اذا وقعت النقطة أ في الربع الأول او الربع الثاني من المستوى.**



مثال (٤) : **جد قيمة ما يلي :**

١) جا (١٢٠)

الحل : الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠ تقع في الربع الثاني



اشارة جا ١٢٠ موجبة

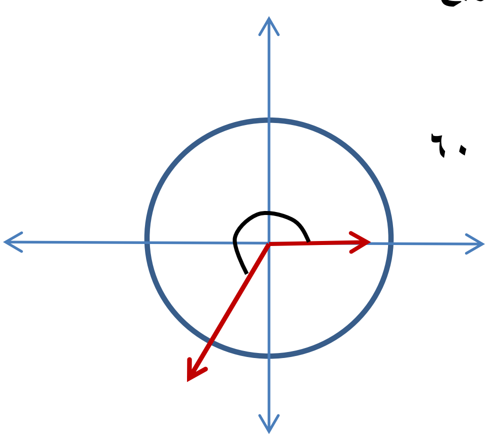
زاوية الاسناد في الربع الثاني = ١٨٠ – هـ

= ١٨٠ – ١٢٠ =٦٠

جا ١٢٠ = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) جتا ٢٤٠

الحل : الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ٢٤٠ تقع في الربع الثالث



اشارة جتا ٢٤٠ سالبة

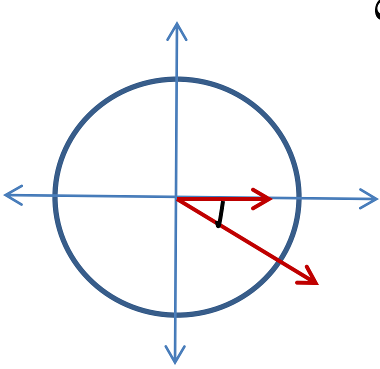
زاوية الاسناد في الربع الثالث = هـ – ١٨٠ = ٢٤٠ – ١٨٠ = ٦٠

جتا ٢٤٠ = - جتا ٦٠ = - $\frac{١}{٢}$

٣) جا -٣٠

الحل : الزاوية -٣٠ تكافىء ٣٦٠ – ٣٠ =٣٣٠

الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ٣٣٠ تقع في الربع الرابع



اشارة جا -٣٠ = جا ٣٣٠ سالبة

زاوية الاسناد في الربع الرابع = ٣٦٠ – هـ

= ٣٦٠ – ٣٣٠ = ٣٠

جا -٣٠ = - جا ٣٠ = - $\frac{١}{٢}$

ملاحظة : بشكل عام   جا – هـ = - جا هـ

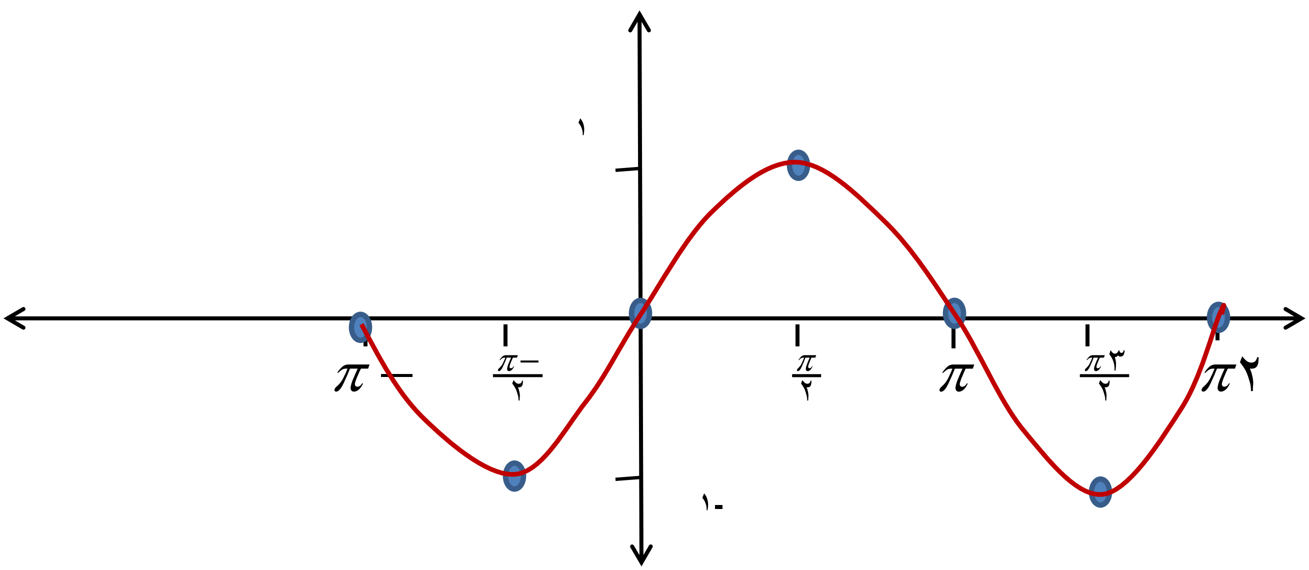
جتا – هـ = جتا هـ

تمثيل الاقترانات المثلثية :

مثال (٥): مثل الاقتران ق(س) = جا س بيانيا

الحل:

س	$-\pi$	$\frac{-\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س)	٠	-١	٠	١	٠	-١	٠



خصائص منحنى الاقتران ق(س) = جا س :

١) منحنى الاقتران ق(س) = جا س يكرر نفسه في فترات متساوية طول كل منها ٢π

ولذلك تسمى هذه الاقترانات اقترانات دورية ، ومقدار دورة هذا الاقتران ٢π

٢) مجاله : ح ، والمدى -١ $\leq$ ص $\leq$ ١

٣) أكبر قيمة للاقتران هي ١ ، أصغر قيمة هي -١

٤) سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له - أصغر قيمة له}}{٢}$

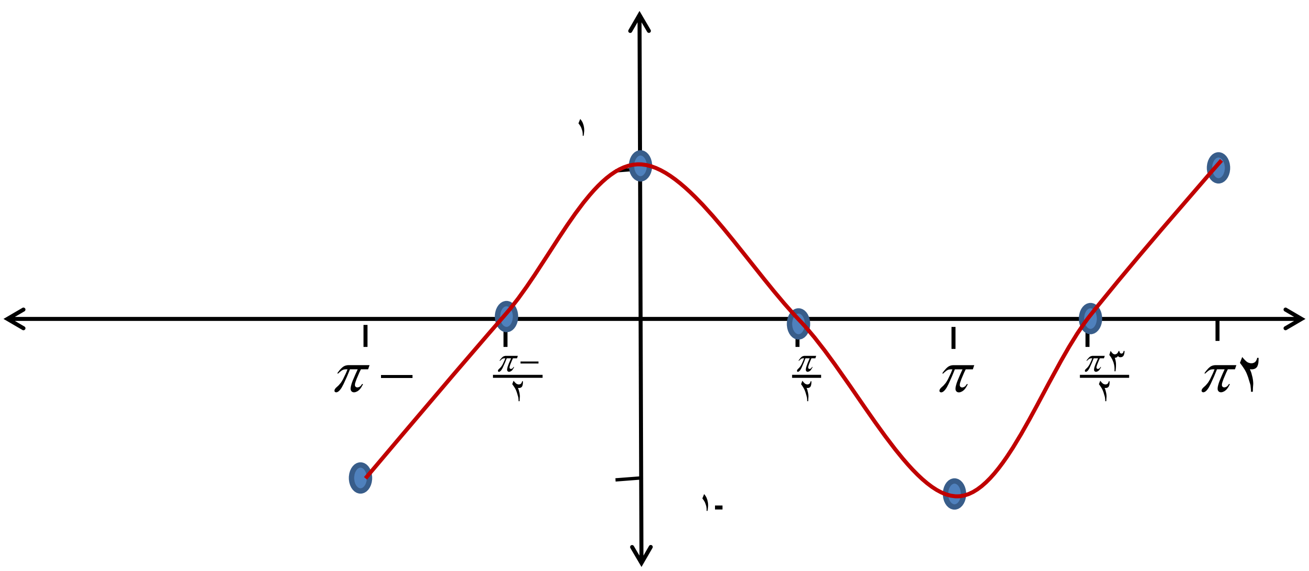
⟵ سعة الاقتران جا س = $\frac{١-—١}{٢}$ = ١

٥) منحنى الاقتران ق(س) = جا س متماثل حول نقطة الأصل .

مثال (٦): أمثل الاقتران ق(س) = جتا س بيانياً.

الحل:

س	$-\pi$	$\frac{-\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س)	١-	٠	١	٠	١-	٠	١



خصائص منحنى الاقتران ق(س) = جتا س :

١) منحنى الاقتران ق(س) = جتا س يكرر نفسه في فترات متساوية طول كل منها ٢π

ولذلك تسمى هذه الاقترانات اقترانات دورية ، ومقدار دورة هذا الاقتران ٢π

٢) مجاله : ح ، والمدى ١- $\leq$ ص $\leq$ ١

٣) أكبر قيمة للاقتران هي ١ ، أصغر قيمة هي ١-

٤) سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له - أصغر قيمة له}}{٢}$

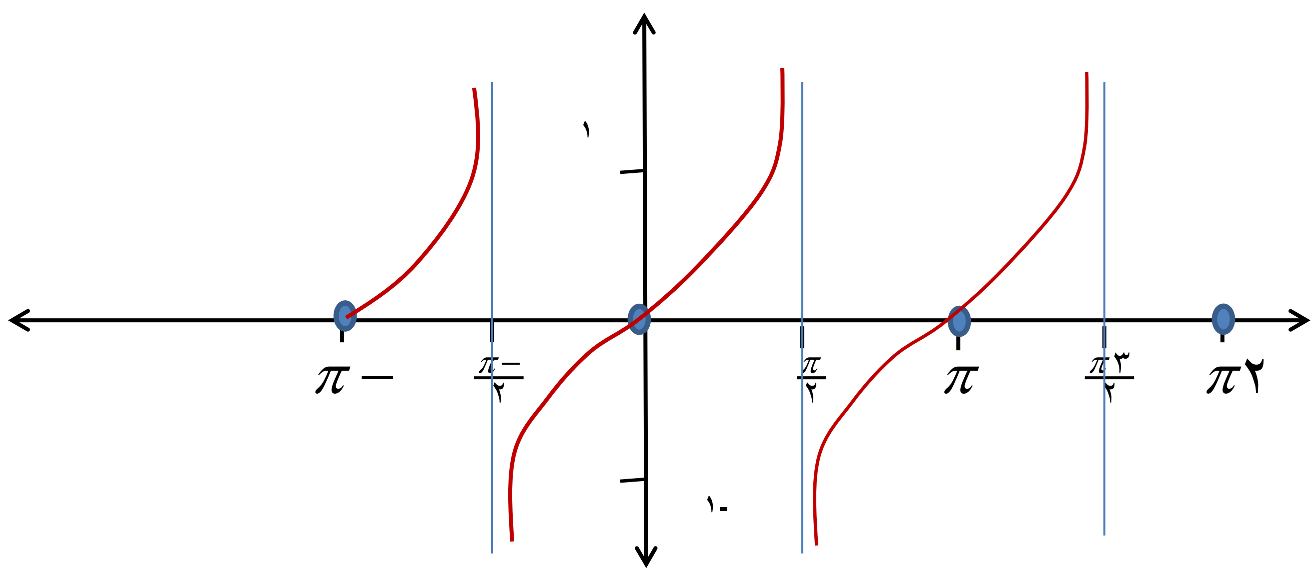
← سعة الاقتران جتا س = $\frac{1 - -1}{2}$ = ١

٥) منحنى الاقتران ق(س) = جتا س متماثل حول محور الصادات .

مثال (٧): مثل الاقتران ق(س) = ظا س بيانياً.

الحل:

س	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	٠	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ق(س)	٠	قيمة غير معرفة	٠	قيمة غير معرفة	٠	قيمة غير معرفة	٠



خصائص منحنى الاقتران ق(س) = ظا س :

١) مجاله : ح – { $\frac{n\pi}{2}$ ، حيث ن ∋ ص، ن عدد فردي } ، والمدى ح

٢) منحنى الاقتران ق(س) = ظا س متماثل حول نقطة الاصل .

٣) دورة الاقتران ق (س) = ظاس هي $\boxed{\pi}$