النهاية والصورة غير المعينة:

سوف نتطرق في هذا الدرس لحساب النهايات للاقترانات الكسرية ، وبشكل عام :

اذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ ، فانه يمكن حساب نهاية الاقتران ق(س)

عندما س تقترب من أ (حيث أ عدد حقيقي) من خلال التعويض المباشر وتكون النتيجة احدى الحالات الآتية:

١) عدد حقيقي ، ويكون هذا العدد هو قيمة النهاية المطلوبة ، وهذه القسم تناولناه في الدروس السابقة.

٢) $\frac{أ}{٠}$ ، أ $\neq$ ٠ ، وهنا نعتمد على النظرية الاتية :

اذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ك(س) = ل ، حيث ل عدد حقيقي ، ل $\neq$ صفر

وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ هـ(س) = ٠ فان $\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{ك(س)}{هـ(س)}$ غير موجودة

٣) $\frac{٠}{٠}$ ، كمية غير معينة، وفي هذه الحالة نبحث عن قيمة النهاية بإحدى الطرق الاتية

١)التحليل الى العوامل ٢) الضرب بالمرافق ٣) توحيد المقامات للكسور

٤) الفرض و الاستبدال

ملاحظة : لماذا يعتبر المقدار $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة ؟

الجواب : لانه لو كانت $\frac{٠}{٠}$ كمية معينة او محددة يمكن معرفتها ولنفرض انها = ٥ مثلا

هذا يتضمن ان $\frac{٠}{٠}$ = $\frac{٥}{١}$ بالضرب التبادلي يكون ٠ = ٠

وكذلك لو فرضنا ان $\frac{٠}{٠}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، بالضرب التبادلي يكون ٠ = ٠

هكذا فانه يمكننا فرض انها تساوي أي قيمة ولذلك فهي قيمة غير معينة.

مثال (١) : جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{س - ١}$

الحل : بالتعويض المباشر لقيمة س = ١ في الاقتران نجد ان النتيجة : $\frac{١}{٠}$

$\longleftarrow \quad \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{س - ١}$ **غير موجودة**

مثال (٢): جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$

الحل: : بالتعويض المباشر لقيمة س = ٣ في الاقتران نجد ان النتيجة = $\frac{١}{٠}$

$\longleftarrow \quad \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$ **غير موجودة**

مثال (٣): جد $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣س-١٠}{س+٥}$

الحل : بالتعويض المباشر نحصل على نتيجة $\frac{٠}{٠}$ **لذلك نحاول معالجة المقدار بإحدى الطرق وهنا سوف تكون التحليل الى العوامل لكل من البسط والمقام**

$$\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣س-١٠}{س+٥} = \underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{(س+٥)(س-٢)}{س+٥} = \underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} س - ٢ = -٧$$

مثال (٤) : **جد** $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-٤}{س+٢}$

الحل : بالتعويض المباشر نحصل على نتيجة $\frac{٠}{٠}$ **لذلك نحاول معالجة المقدار بإحدى الطرق وهنا سوف تكون التحليل الى العوامل لكل من البسط والمقام**

$$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-٤}{س+٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)(س-٢)}{س+٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} س - ٢ = -٤$$

مثال (٥): جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - ٣}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س(س - ٣)}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} س = ٣$$

مثال (٦): جد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{٢س^{٢} - ٨}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{٢س^{٢} - ٨} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{٢(س^{٢} - ٤)} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{٢(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{٢(س + ٢)} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢(٤)} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

مثال (٧): جد $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - أ^{٤}}{س - أ}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - أ^{٤}}{س - أ} = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢} - أ^{٢})(س^{٢} + أ^{٢})}{س - أ} = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{(س - أ)(س + أ)(س^{٢} + أ^{٢})}{(س - أ)}$$

$$= \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} (س + أ)(س^{٢} + أ^{٢}) = (أ + أ)(أ^{٢} + أ^{٢}) = ٢أ \times ٢أ^{٢} = ٤أ^{٣}$$

استنتاج: $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-1}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب

مثال (٨): جد :

١) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ ، بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

الحل : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س - ٢} = ٥(٢)^{٤} = ٥ \times ١٦ = ٨٠$

٢) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٥} - ١}{س^{٤} - ١}$ (بقسمة كل من البسط والمقام على س – ١)

الحل : = $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٥} - ١}{س - ١} \div \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٤} - ١}{س - ١}$

= $٥(١)^{٤} \div ٤(١)^{٣} = ٥ \div ٤ = \frac{٥}{٤}$

مثال (٩): جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٦ س}{س - ٣}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$

$$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٦س}{س - ٣} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س(س^{٢} - ٥س + ٦)}{س - ٣} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س(س - ٣)(س - ٢)}{س - ٣}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} س(س - ٢) = ٣(٣ - ٢) = ٣$$

مثال (١٠): $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤}-٢\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٣}-١}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\dfrac{٠}{٠}$ لذلك نقم بتحليل كل من البسط والمقام

س ٤	س ٣	س ٢	س	الثابت	
١	٠	٢-	٠	١	
٠	١	١	١-	١-	$\boxed{١}$
١	١	١-	١-	٠	

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^{٣}+\text{س}^{٢}-\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}$$

$$= \frac{١+١-١-١}{١+١+١} = \frac{٠}{٣} = ٠$$

مثال (١٠): أجد $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٢}-٣}{\text{س}-٧}$

الحل : التعويض المباشر يعطي نتيجة $\dfrac{٠}{٠}$ ، لذلك نبحث عن النهاية من خلال الضرب بالمرافق

$$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+٢}-٣}{\text{س}-٧} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٢}+٣}{\sqrt{\text{س}+٢}+٣} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+٢-٩}{(\text{س}-٧)(\sqrt{\text{س}+٢}+٣)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-٧}{(\text{س}-٧)\sqrt{\text{س}+٢}+٣} = \underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\sqrt{\text{س}+٢}+٣)} = \frac{١}{\sqrt{٩}+٣} = \frac{١}{٦}$$

مثال (١١): جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٢}-٢}{\text{س}-١}$

الحل : التعويض المباشر يعطي نتيجة $\dfrac{٠}{٠}$ ، لذلك نبحث عن النهاية من خلال الضرب بالمرافق

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢\text{س}+٢}-٢}{\text{س}-١} \times \frac{\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢}{\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}+٢-٤}{(\text{س}-١)(\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}-٢}{(\text{س}-١)\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\sqrt{٢\text{س}+٢}+٢} = \frac{٢}{\sqrt{٤}+٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

مثال (١٢): جد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٣٤} - ٦}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ ولذلك نقوم بالضرب بالمرافق

$$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٣٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{س + ٣٤} + ٦}{\sqrt{س + ٣٤} + ٦} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{س + ٣٤} + ٦)}{س + ٣٤ - ٣٦}$$

$$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{س + ٣٤} + ٦)}{(س - ٢)} = \lim\limits_{س \to ٢} \sqrt{س + ٣٤} + ٦ = \sqrt{٣٦} + ٦ = ١٢$$