الوحدة الثانية : المتتاليات والمتسلسلات

المتتاليات:

نشاط: قام موظف اتصالات بتسجيل عدد المكالمات الدولية الواردة من مكتبه خلال ١٠ أيام حسب الجدول

اليوم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد المكالمات	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

هذا الجدول يمكن تمثيله على شكل أزواج مرتبة مساقطها الأولى (أرقام الأيام) ومساقطها الثانية (عدد المكالمات)

{(١ ، ٣) ، (٢، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧) ، (٦ ، ٨) ، (٧ ، ٩) ، (٨ ، ١٠) ، (٩ ، ١١) ، (١٠، ١٢) }

هذه المجموعة تمثل اقتران مجاله { ١، ٢ ، ٣ ، ، ... ، ١٠ }

والمدى = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ... ، ١٢ }

نلاحظ أن المجال مجموعة الأعداد الطبيعية ط* ، والمدى مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تسمى مجموعة الأعداد في مجموعة المدى : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ,,, ، ١٢ متتالية .

وكل عدد فيها يسمى : (حد المتتالية)

تعريف : المتتالية : هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية ط* ، أو مجموعة جزئية منها ، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ، بحيث عناصر المدى تسمى حدود المتتالية .

ويرمز لحدود المتتالية: ح$_١$ ، ح$_٢$ ، ح$_٣$ ، ..... ، ح$_ن$

الحد الأول ، الحد الثاني ، الحد النوني

بحيث ن : رتبة الحد

مثال (١) : في المتتالية : $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٦}$ ، $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٦}{٨}$ ، $\frac{٧}{٩}$

فإن ح$_١$ = $\frac{١}{٣}$

ح$_٥$ = $\frac{٥}{٧}$

$$ع_ن = \frac{ن}{٢+ن}$$

المتتاليات قد تكون : ١) منتهية : وهي التي يكون مجالها مجموعة جزئية منتهية من ط* .
٢) غير منتهية : وهي التي يكن مجالها مجموعة غير منتهية .

مثال (٢) : -٢ ، -٤ ، -٦ ، -٨ ، ..... متتالية غير منتهية
بينما ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ متتالية منتهية

الحد العام للمتتالية :

مثال (٣) : أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الآتية الي حدها العام :

$ع_ن = ٤ن - ٣$

$ع_ن = ن^٣$

الحل : ١) $ح_١ = ٤(١) - ٣ = ١$ / $ح_٢ = ٤(٢) - ٣ = ٥$ /
$ح_٣ = ٤(٣) - ٣ = ٩$ / $ح_٤ = ٤(٤) - ٣ = ١٣$ / $ح_٥ = ٤(٥) - ٣ = ١٧$

٢) $ح_١ = (١)^٣ = ١$ / $ح_٢ = (٢)^٣ = ٨$ / $ح_٣ = (٣)^٣ = ٢٧$
$ح_٤ = (٤)^٣ = ٦٤$ / $ح_٥ = (٥)^٣ = ١٢٥$

مثال (٣) : في المتتاليات التالية جد $ح_ن$

١) ٣ ، ٨ ، ١٣ ، .....
٢) ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، .....
٣) ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، .....

الحل : ١) $ح_ن = ٥ ن - ٢$
٢) $ح_ن = ٣ ن - ١$
٣) $ح_ن = ن^٣$

مثال (٤) :
في المتتالية : ٣ ، ٨ ، ١٦ ، ..... ، ٥ن - ٢ ، هل العدد ١٧٧ هو أحد حدود المتتالية؟

الحل : اذا كان العدد ١٧٧ أحد حدود المتتالية فهو يحقق المعادلة :
$٥ن - ٢ = ١٧٧$ بحيث ن عدد طبيعي غير الصفر ⟵ $٥ ن - ٢ = ١٧٧$
⟵ $٥ن = ١٧٧ + ٢$ ⟵ $٥ن = ١٧٩$ ⟵ $ن = \frac{١٧٩}{٥} = ٣٥\frac{٤}{٥} \notin ط$ *
⟵ العدد ١٧٧ ليس من حدود المتتالية.

المتتالية الحسابية : هي المتتالية التي يكون الفرق بين الحد وسابقه هو مقدارا ثابتاً دائماً ، ويسمى هذا الثابت أساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز (د) ويرمز للحد الأول الرمز (أ)

الصورة العامة للمتتالية الحسابية :
أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ..... ، أ + (ن – ١)د

مثال (٥) : ميز المتتاليات الآتية حسابية أم لا .

١) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ..... ، ٣١
٢) ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، .....

الحل : ١) نجد الفرق بين كل حدين متتالين (٥ – ٣ = ٢ ، ٧ – ٥ = ٢)
طالما الفرق مقدار ثابت ⟵ المتتالية حسابية

.

٢) ٣ – ٢ = ١ ، ٥ – ٣ = ٢ ، طالما الفرق بين كل حدين متتالين ليس مقداراً ثابتا ⟵ المتتالية ليست حسابية .

مثال (٦) : في المتتالية الحسابية الآتية : -٥ ، -٨ ، -١١ ، -١٤ ، .....

١) جد الحد الأول للمتتالية . (الحل : الحد الأول = أ = -٥)
٢) جد أساس المتتالية .(الحل : أساس المتتالية = د = -٨ - -٥ = -٣)
٣) جد الحد الخامس.
الحل : ح٥ = أ + (ن – ١) د = -٥ + (٥ – ١) (-٣)
= -٥ + (٤)(-٣)
= -٥ + -١٢ = -١٧

مثال (٧) : بين أن المتتالية الآتية حسابية ، وجد الحد العاشر
٢ ، -١ ، -٤ ، -٧ ، .....

الحل : نجد الفرق بين كل حدين متتالين : -١ – ٢ = -٣ / -٤ - -١ = -٣
طالما الفرق بين الحدود المتتالية مقدارا ثابتا = -٣
⟵ المتتالية حسابية .

الحد العاشر = $ح_{١٠}$ = ٢ + (١٠– ١) (-٣) =٢+ (٩) (-٣)
=٢ + -٢٧= -٢٥

<u>سؤال</u> : أوجد الحد الخامس في المتتالية التي حدها الأول = ٢ ، وأساسها = ٥ .

<u>مثال (٨)</u> : متتالية حسابية مجموع الحدين الثاني والثالث منها = ٤٣ وحدها الثامن = ٥ ، جد الحد الأول والاساس .

<u>الحل</u> : $ح_{٢}$ = أ + (٢ – ١) د = أ + د

$ح_{٣}$ = أ + (٣ – ١) د = أ +٢ د

$ح_{٢}$ + $ح_{٣}$ = أ + د + أ + ٢د ⟵ ٢أ + ٣د = ٤٣ ..... (١)

$ح_{٨}$ = أ + ٧د ⟵ أ + ٧د = ٥ ..... (٢)

بحل المعادلتين بالحذف والتعويض : ٢أ + ٣د =٤٣ ⟵ ٢أ + ٣د = ٤٣
-٢ / أ + ٧د = ٥ ⟵ -٢ أ + -١٤د = -١٠

⟵ -١١ د = ٣٣
⟵ د = -٣ بتعويض قيمة د في المعادلة الثانية :

⟵ أ + ٧ (-٣) = ٥ ⟵ أ + -٢١ = ٥ ⟵ أ = ٥ + ٢١ = ٢٦