المتسلسلة الهندسية :

تعريف : المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة المرتبطة بمتتالية هندسية

مجموع المتسلسلة الهندسية النهائية (معروف عدد حدودها) :

نظرية : مجموع أول (ن) من حدود المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول (أ) ، وأساسها (ر) :

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{أ(١-ر^{ن})}{١-ر} \quad ، \text{ بحيث } ر \neq ١$$

مثال (١) : جد مجموع المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول أ = ٦٤ ، وأساسها ر = $\frac{-١}{٢}$

وعدد حدودها (٦) حدود.

الحل :

$$\text{جـ}_{٦} = \frac{٦٤(١-(\frac{-١}{٢})^{٦})}{١-\frac{-١}{٢}} = \frac{٦٤(١-\frac{١}{٦٤})}{١+\frac{١}{٢}} = \frac{٦٤(\frac{٦٤}{٦٤}-\frac{١}{٦٤})}{\frac{٣}{٢}} = \frac{\frac{٦٣}{٦٤}\times٦٤}{\frac{٣}{٢}} = ٦٣\times\frac{٢}{٣} = ٤٢$$

مثال (٢) : جد مجموع الحدود السبعة الأولى للمتسلسلة الهندسية : -٧ + ١٤ + -٢٨ + ...

الحل :

$$أ = -٧ \quad ، ر = \frac{١٤}{-٧} = -٢ \quad ، ن = ٧ \quad ، ر \neq ١$$

$$\text{جـ}_{٧} = \frac{-٧(١-(-٢)^{٧})}{١-(-٢)} = \frac{-٧(١-(-١٢٨))}{٣} = \frac{-٧\times١٢٩}{٣} = -٧\times٤٣ = -٣٠١$$

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية :

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول (أ) ، وأساسها (ر) :

$$\text{جـ} = \frac{أ}{١-ر} \quad ، \text{ بحيث } |ر| < ١ \quad \text{أي } -١ < ر < ١$$

(هذا القانون يعني أن مجموع المتسلسلة اللانهائية موجود فقط إذا كانت ر تقع بين -١ ، ١)

مثال (٣) : جد مجموع المتسلسلة ١ + ٠.١ + ٠.٠١ + ٠.٠٠١ + ...

الحل : المتسلسلة هندسية لأنها مرتبطة بمتتالية هندسية حيث ناتج قسمة الحد والذي يسبقه

مقدار ثابت : $ر = \frac{٠.١}{١} = ٠.١$ ، **وبما أن** $-١ < ر < ١$

$$\longleftarrow \quad جـ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١}{١ - ٠.١} = \frac{١}{٠.٩} = \frac{١٠}{٩}$$

مثال (٤) : جد الحد الأول لمتسلسلة هندسية لانهائية أساسها $\frac{٣}{٤}$ **ومجموع حدودها = ١٢**

الحل : $جـ = \frac{أ}{١ - ر}$

$$١٢ = \frac{أ}{١ - \frac{٣}{٤}} \longleftarrow \quad ١٢ = \frac{أ}{\frac{١}{٤}} \longleftarrow \quad أ = ١٢ \times \frac{١}{٤} = ٣$$

الحد الأول = أ = ٣

مثال (٥) : جد $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٥^{ن+١}}{٢^{ن-١}}$ **ما أمكن .**

الحل : $ع_١ = \frac{٥^{١+١}}{٢^{١-١}} = \frac{٥^{٢}}{٢^{٠}} = \frac{٢٥}{١} = ٢٥$

$$ع_٢ = \frac{٥^{١+٢}}{٢^{١-٢}} = \frac{٥^{٣}}{٢^{١}} = \frac{١٢٥}{٢}$$

$$ع_٣ = \frac{٥^{١+٣}}{٢^{١-٣}} = \frac{٥^{٤}}{٢^{٢}} = \frac{٦٢٥}{٤}$$

ونلاحظ أن ناتج قسمة الحد والذي يسبقه مقدار ثابت :

$\frac{١٢٥}{٢} \div ٢٥ = \frac{١٢٥}{٢} \times \frac{١}{٢٥} = \frac{٥}{٢}$ **وكذلك** $\frac{٦٢٥}{٤} \div \frac{١٢٥}{٢} = \frac{٦٢٥}{٤} \times \frac{٢}{١٢٥} = \frac{٥}{٢}$

$\longleftarrow$ **المتسلسلة هندسية** $\longleftarrow \quad ر = \frac{٥}{٢}$

وبما أن $|ر| > ١ \longleftarrow$ **لا يمكن ايجاد المجموع**

مثال (٦) : جد $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢^{ن}}{٣^{ن-١}}$ ما أمكن .

الحل :

$$ع_{١} = \frac{٢^{١}}{٣^{١-١}} = \frac{٢}{٣^{٠}} = ٢$$

$$ع_{٢} = \frac{٢^{٢}}{٣^{٢-١}} = \frac{٤}{٣^{١}} = \frac{٤}{٣}$$

$$ع_{٣} = \frac{٢^{٣}}{٣^{٣-١}} = \frac{٨}{٣^{٢}} = \frac{٨}{٩}$$

ونلاحظ أن ناتج قسمة الحد والذي يسبقه مقدار ثابت :

$\frac{٤}{٣} \div ٢ = \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣}$ وكذلك $\frac{٨}{٩} \div \frac{٤}{٣} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٨}{٩} = \frac{٢}{٣}$

← المتسلسلة هندسية ← $ر = \frac{٢}{٣}$

وبما أن $|ر| < ١$ ← يمكن ايجاد المجموع

← $ج = \frac{أ}{١-ر} = \frac{٢}{١-\frac{٢}{٣}} = \frac{٢}{\frac{١}{٣}} = ٢ \times ٣ = ٦$

سؤال : جد مجموع المتسلسلة : $١ + \frac{٣}{٢} + \frac{٩}{٤} + \frac{٢٧}{٨} + ٠٠٠٠$