التقارب والتباعد للمتسلسلات:

تعريف : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=\text{١}}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}}$ و جـ $_{\text{ن}}$ هو مجموع أول (ن) من حدود المتسلسلة

فإنه :

إذا كانت المتتالية التي حدها العام جـ $_{\text{ن}}$ متقاربة ، فإن المتسلسلة متقاربة ، وإذا كانت المتتالية التي حدها العام جـ $_{\text{ن}}$ متباعدة ، فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال (١) : حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=\text{١}}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}} = \text{١} + \text{٢} + \text{٣} + \cdots + \text{ن}$

الحل : نلاحظ أن المتسلسلة حسابية $\longleftarrow$ $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}(\text{أ} + \text{ل})$

$\longleftarrow$ $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}(\text{١} + \text{ن}) = \frac{\text{ن}(\text{ن}+\text{١})}{\text{٢}}$

$\longleftarrow$ $\lim_{\text{ن} \to \infty} \text{جـ}_{\text{ن}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ن}(\text{ن}+\text{١})}{\text{٢}} = \infty$

$\longleftarrow$ المتسلسلة متباعدة

نتيجة : إذا كانت المتسلسلة هندسية على شكل : $\sum_{\text{ن}=\text{٠}}^{\infty} \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} = \text{أ} + \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{\text{٢}} + \cdots + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}}$

حيث أن أساس المتسلسلة = ر

فإن المتسلسلة تكون متقاربة فقط إذا كان $|\text{ر}| < \text{١}$

وتكون متباعدة إذا كان $|\text{ر}| \geq \text{١}$

<u>مثال (٢)</u> : حدد أي المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة أو متباعدة :

١) ٥٤ + ٣٦ + ٢٤ + ...

<u>الحل</u> : $ر = \frac{٣٦}{٥٤} = \frac{٢}{٣} < ١$ $\longleftarrow$ **المتسلسلة متقاربة**

٢) ٨ + ١٢ + ١٨+ ....

<u>الحل</u> : $ر = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢} > ١$ $\longleftarrow$ **المتسلسلة متباعد أي لا يمكن ايجاد مجموعها**

<u>مثال (٣)</u> : حدد أى من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة

١) $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٥^{ن+١}}{٢^{ن-١}}$

<u>الحل</u> : $ح_{١} = \frac{٥^{١+١}}{٢^{١-١}} = \frac{٥^{٢}}{٢^{٠}} = ٢٥$

$ح_{٢} = \frac{٥^{٢+١}}{٢^{٢-١}} = \frac{٥^{٣}}{٢^{١}} = \frac{١٢٥}{٢}$

$ح_{٣} = \frac{٥^{٣+١}}{٢^{٣-١}} = \frac{٥^{٤}}{٢^{٢}} = \frac{٦٢٥}{٤}$

$\frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{١٢٥}{٢} \div ٢٥ = \frac{١٢٥}{٢} \times \frac{١}{٢٥} = \frac{٥}{٢}$ $\longleftarrow$ **المتسلسلة هندسية**

$\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٦٢٥}{٤} \div \frac{١٢٥}{٢} = \frac{٦٢٥}{٤} \times \frac{٢}{١٢٥} = \frac{٥}{٢}$

$\longleftarrow$ $ر = \frac{٥}{٢}$ $\longleftarrow$ $|ر| > ١$ $\longleftarrow$ **المتسلسلة متباعدة**

٢) $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢^{ن}}{٣^{ن-١}}$

<u>الحل</u> : $ح_{١} = \frac{٢^{١}}{٣^{١-١}} = \frac{٢}{٣^{٠}} = ٢$ $\quad\quad$ $ح_{٢} = \frac{٢^{٢}}{٣^{٢-١}} = \frac{٤}{٣^{١}} = \frac{٤}{٣}$

$ح_{٣} = \frac{٢^{٣}}{٣^{٣-١}} = \frac{٨}{٣^{٢}} = \frac{٨}{٩}$

$$\frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} = \frac{٤}{٣} \div ٢ = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٣}$$ ← المتسلسلة هندسية

$$\frac{\text{ع}_{٣}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{٨}{٩} \div \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٩} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٢}{٣}$$

← $\text{ر} = \frac{٢}{٣}$ ← $|\text{ر}| < ١$ ← المتسلسلة متقاربة

مثال (٤) :

حدد فيما اذا كانت المتسلسلة الاتية $\sum_{\text{ن}=١}^{٧} ٣\text{ن} + ٢$ **متقاربة او متباعدة**

الحل : نحدد اولا فيما اذا كانت المتسلسلة حسابية او هندسية لذلك نجد بعض حدودها

$$\text{ع}_{١} = ٣(١) + ٢ = ٥$$

$$\text{ع}_{٢} = ٣(٢) + ٢ = ٨$$

$$\text{ع}_{٣} = ٣(٣) + ٢ = ١١$$

نلاحظ ان المتسلسلة حسابية (لان الفرق بينن الحد و الذي يسبقه دائما ثابت)

نجد $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل}) = \frac{\text{ن}}{٢}(٥ + (٣\text{ن} + ٢)) = \frac{\text{ن}}{٢}(٣\text{ن} + ٧) = \frac{\text{ن}(٣\text{ن}+٧)}{٢} = \frac{٣\text{ن}^{٢}+٧\text{ن}}{٢}$

حتى نحدد التقارب او التباعد نجد

$$\lim_{\text{ن} \to \infty} \text{جـ}_{\text{ن}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{٣\text{ن}^{٢}+٧\text{ن}}{٢} = \infty$$ ← **المتسلسلة متباعدة**

المتتاليات

اذا كانت $\underset{ن \to \infty}{\text{نهــا}}\ ح_{ن} =$ عدد حقيقي

المتتالية متقاربة

إذا كانت $\underset{ن \to \infty}{\text{نهــا}}\ ح_{ن}$ غير موجودة

المتتالية متذبذبة

اذا كانت $\underset{ن \to \infty}{\text{نهــا}}\ ح_{ن} = \infty ، {}^{-}\infty$

المتتالية متباعدة

المتسلسلات

اذا كانت حسابية

$\underset{ن \to \infty}{\text{نهــا}}\ جـ_{ن} =$ عدد حقيقي

متقاربة

$\underset{ن \to \infty}{\text{نهــا}}\ جـ_{ن} = \infty ، {}^{-}\infty$

متباعدة

اذا كانت هندسية

$|ر| < ١$

متقاربة

$|ر| \geq ١$

متباعدة