اختبارات التقارب :

١) اختبار النسبة: Ratio Test

نظرية : ليكن $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}}$ متسلسلة موجبة الحدود فإن المتسلسلة متقاربة إذا كان :

$$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{\text{ع}_{\text{ن}+١}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \text{ل} < ١$$

وتكون المتسلسلة متباعدة إذا كان : $\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{\text{ع}_{\text{ن}+١}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \text{ل} > ١$

أما إذا كانت $\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{\text{ع}_{\text{ن}+١}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = ١$ فإن اختبار النسبة يفشل

مثال (١) : حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{\text{ن}!}$ متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب.

الحل : بما أن جميع الحدود موجبة ⟵ باستخدام اختبار النسبة فان

$$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{\text{ع}_{\text{ن}+١}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{\frac{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+٣)}{(\text{ن}+١)!}}{\frac{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{\text{ن}!}} = \text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+٣)\text{ن}!}{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)!}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{(\text{ن}+٣)}{(\text{ن}+١)(\text{ن}+١)} = \text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty^{+}} \frac{(\text{ن}+٣)}{(\text{ن}+١)^{٢}} = ٠ < ١$$

⟵ المتسلسلة متقاربة

مراجعة فى مضروب المقادير

$$(\text{ن}+١)! = (\text{ن}+١)\,\text{ن}!$$

$$(\text{ن}+٢)! = (\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)! = (\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)\,\text{ن}!$$

$$\text{ن}! = \text{ن}(\text{ن}-١)!$$

مراجعة فى الاسس

$$(\text{أ})^{(\text{ن}+١)} = (\text{أ})^{\text{ن}}\,(\text{أ})^{١}$$

$$(\text{أ})^{٢\text{ن}} = ((\text{أ})^{\text{ن}})^{٢} = ((\text{أ})^{٢})^{\text{ن}}$$

<u>مثال (٢) :</u> حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{1}{\text{ن}}$ متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب.

<u>الحل</u> : بما أن جميع الحدود موجبة ⟵ باستخدام اختبار النسبة فان

$$\lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{\text{ع}_{\text{ن}+1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{\frac{1}{(\text{ن}+1)}}{\frac{1}{\text{ن}}} = \lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} = 1$$

⟵ اختبار النسبة يفشل.

<u>مثال (٣) :</u> حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{1}{\text{ن}!}$ متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب.

<u>الحل</u> : بما أن جميع الحدود موجبة ⟵ باستخدام اختبار النسبة فان

$$\lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{\text{ع}_{\text{ن}+1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{\frac{1}{(\text{ن}+1)!}}{\frac{1}{\text{ن}!}} = \lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}+1)!} = \lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} \frac{1}{(\text{ن}+1)} = 0 < 1$$

⟵ المتسلسلة متقاربة

٢) **<u>الاختبار الجذري</u>: The nth root tst**

<u>نظرية</u> : ليكن $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}}$ متسلسلة موجبة الحدود فإن المتسلسلة متقاربة إذا كان :

$$\lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} (\text{ع}_{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ل} < 1$$

وتكون المتسلسلة متباعدة إذا كان : $\lim_{\text{ن} \to \infty^{+}} (\text{ع}_{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ل} > 1$

أما إذا كانت $\underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(ع_{ن}\right)^{\frac{١}{ن}} = ١$ فإن اختبار الجذر النوني يفشل

<u>مثال (٤) :</u> حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٢ن+٣}{٤ن+٥}\right)^{ن}$ **متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب.**

<u>الحل</u> : بما أن جميع الحدود موجبة ⟵ باستخدام الاختبار الجذري فان

$$\underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(ع_{ن}\right)^{\frac{١}{ن}} = \underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(\left(\frac{٢ن+٣}{٤ن+٥}\right)^{ن}\right)^{\frac{١}{ن}} = \underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢ن+٣}{٤ن+٥} = \frac{٢}{٤} < ١$$

⟵ المتسلسلة متقاربة

<u>مثال (٥) :</u> حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن^{ن}}$ **متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب.**

<u>الحل</u> : بما أن جميع الحدود موجبة ⟵ باستخدام الاختبار الجذري فان

$$\underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(ع_{ن}\right)^{\frac{١}{ن}} = \underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{ن^{ن}}\right)^{\frac{١}{ن}} = \underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١}{ن} = ٠ < ١$$

⟵ المتسلسلة متقاربة

<u>مثال (٦) :</u> حدد فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢^{٣ن+١}}{ن^{ن}}$ **متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب.**

<u>الحل</u> : بما أن جميع الحدود موجبة ⟵ باستخدام الاختبار الجذري فان

$$\underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(ع_{ن}\right)^{\frac{١}{ن}} = \underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢^{٣ن+١}}{ن^{ن}}\right)^{\frac{١}{ن}} = \underset{ن \leftarrow \infty^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢^{٣+\frac{١}{ن}}}{ن} = ٠ < ١$$

⟵ المتسلسلة متقاربة

سؤال:_ حدد فيما إذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة باستخدام احدى اختبارات التقارب:

١) $$\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٤ن-٣}{٢ن+١}\right)^{ن}$$

٢) $$\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن!}{١٠^{ن}}$$