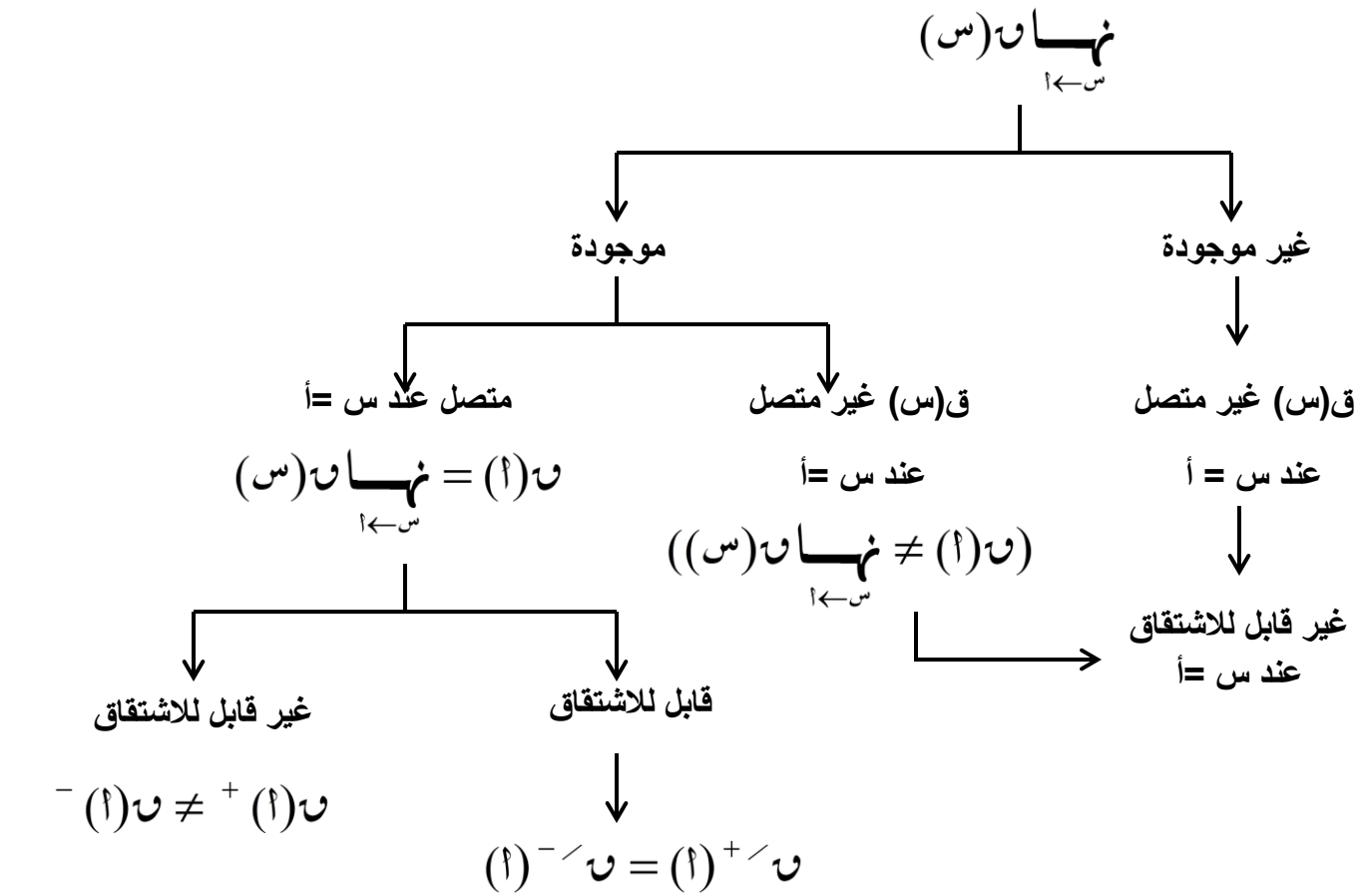
الاتصال والاشتقاق

مراجعة بسيطة لعلاقة الاشتقاق بالاتصال



مثال (١) : اذا كان ق(س) = { ٣ + √س ، س ≤ ٤ ؛ ٣س − ٧ ، س > ٤

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤

١) نبحث في اتصال ق(س) عند س = ٤

ق(٤) = ٥

نهـــا ق(س) = نهـــا ٣ + √س = ٥
س←٤+ س←٤+

نهـــا ق(س) = نهـــا ٣س − ٧ = ٥
س←٤− س←٤−

← نهـــا ق(س) = ٥
س←٤

ق(٤) = $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ٥ ⟵ ق (س) متصل عند س = ٤

٢) نجد مشتقة ق(س) باستخدام قواعد الاشتقاق

ق´(س) = { $\frac{١}{\sqrt{س}}$ ، س < ٤

٣ ، س > ٤

غير موجودة ، س = ٤

ق´$_{+}$(٤) = $\frac{١}{٤}$

ق´$_{-}$(٤) = ٣

ق´$_{+}$(٤) ≠ ق´$_{-}$(٤) ⟵ غير قابل للاشتقاق عند س=٤

مثال (٢) : اذا كان ق(س) = { $\frac{٦}{س}$ − ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٢

٣س + ١ ، ٢ < س ≤ ٥

جد ق´(س) على مجاله

الحل : المجال هو [١ ، ٥]

١) نبحث اتصال ق(س) عند نقاط تحول و الفترات الداخلية المفتوحة

عند س = ٢ (نقطة تحول)

ق(٢) = ١-

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ٣س + ١ = ٧

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ $\frac{٦}{س}$ − ٤ = ١$^{-}$

⟵ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

⟵ ق(س) غير متصل عند س = ٢

عند الفترات : (١ ، ٢) ق نسبي متصل على ح ما عدا اصفار المقام (س = ٠) ، لكن ٠ ∉ (١ ، ٢)

(٢ ، ٥) ق كثير حدود متصل على ح

٢) نبحث في قابلية ق (س) على الاشتقاق عند :

أ) الاطراف : المشتقة غير موجودة

٢) ق´(س) = { $\frac{-٦}{س^{٢}}$ ، ١ < س < ٢
٣ ، ٢ < س < ٥
غير موجودة ، س = ١ ، ٥ ، ٢

ق´(١) ، ق´(٥) غير موجودة لانهما اطراف فترة

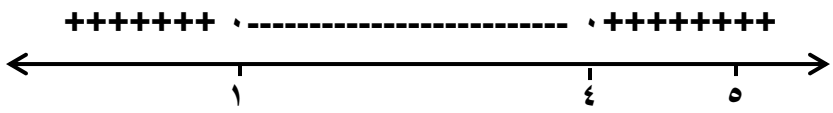
ق´(٢) غير موجودة لان ق(س) غير متصل عند س =٢

مثال (٣) : جد $\frac{ء ص}{ء س}$ ، $ص = \frac{|س^{٢} - ٥س + ٤|}{س(س-١)}$ ، $س \in [١ ، ٥)$

الحل : اعادة تعريف الاقتران على مجاله

$|س^{٢} - ٥س + ٤|$

$س^{٢} - ٥س + ٤ = (س - ٤)(س - ١) = ٠$ ← س = ١ ، س = ٥



ص = { $\frac{-(س^{٢} - ٥س + ٤)}{س(س-١)}$ ، ١ < س ≤ ٤
$\frac{(س^{٢} - ٥س + ٤)}{س(س-١)}$ ، ٤ ≤ س ≤ ٥

ص = { $\frac{-(س-٤)}{س}$ ، ١ < س ≤ ٤
$\frac{(س-٤)}{س}$ ، ٤ ≤ س ≤ ٥

نبحث في اتصال ص : ١) عند نقاط االتحول (عند س = ٤)

ق(٤) = ٠

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٤^{+}} \text{ق}(س) = ٠$$

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٤^{-}} \text{ق}(س) = ٠ \longleftarrow \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \text{ق}(س) = ٠$$

$$\text{ق}(٤) = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \text{ق}(س) = ٠$$ **ق متصل عند س = ٤**

٢) عند الفترات الداخلية المفتوحة : (١، ٤) اقتران نسبي متصل على ح ما عدا اصفار المقام

لكن الاصفار ٠ ∉ (١، ٤)

(٤، ٥) اقتران نسبي متصل على ح ما عدا اصفار المقام لكن الاصفار ٠ ∉ (١، ٤)

$$\text{ق}'(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{س^{٢}} \text{ ، } ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س^{٢}} \text{ ، } ٤ < س < ٥ \end{cases}$$

غير موجودة ، س = ٤ ، س = ٥

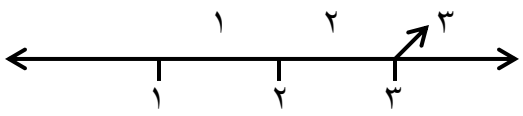
$$\text{ق}'(٤)^{+} = \frac{٤}{١٦}$$

$$\text{ق}'(٤)^{-} = \frac{-٤}{١٦} \longleftarrow \text{ق}'(٤)$$ **غير موجودة**

مثال (٤) : $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س + ٢ \text{ ، } ٠ \leq س < ١ \\ [س] + ٤س \text{ ، } ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

جد $\text{ق}'(س)$

الحل : **اعادة تعريف [س] على الفترة [١ ، ٣]**



$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س + ٢ & ، \ ٠ \leq س < ١ \\ ١ + ٤س & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٢ + ٤س & ، \ ٢ \leq س < ٣ \\ ٣ + ٤س & ، \ س = ٣ \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق(س) على مجاله:

١) الفترات الداخلية الاقتران عند جميعها كثيرات حدود لذلك هو متصل عندها .

٢) عند نقاط التحول :

عند س = ١

ق(١) = ٥

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^{+}} ق(س) = ٥$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^{-}} ق(س) = ٥$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ١} ق(س) = ٥$$

$$ق(س) = \text{نهـــا}_{س \to ١} ق(س) = ٥$$

ق(س) متصل عند س = ١

عند س = ٢

ق(٢) = ١٠

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ١٠$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ٩$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} ق(س)$$ **غير موجودة**

ق(س) غير متصل عند س =٢

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، \ ٠ < س < ١ \\ ٤ & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٤ & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

غير موجودة ، س = ٠ ، ٢ ، ٣

$$ق'(١)^{+} = ٤ \quad ، \quad ق'(١)^{-} = ٤$$ **ق(س) قابل للاشتقاق عند س=١**

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٠ ، ٣ (أطراف فترة)

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ (لأنه غير متصل عند س =٢)

مثال (٥) : ق(س) = { أس^{٣} + بس ، س < ٢

أس^{٢} + ٩بس − ١٢ ، س ≥ ٢

وكانت ن$'$(٢) موجودة ،، جد قيمة كل من أ ، ب

الحل : ن$'$(٢) موجودة ⟵ ١) ن$'$(٢)$^{+}$ = ن$'$(٢)$^{-}$

٢) ق(س) متصل عند س = ٢

ق(س) متصل عند س = ٢ ⟵ $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ن(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ن(س)

⟵ ١٤أ + ١٨أب − ١٢ = ١٨أ + ٢ب

⟵ $-$١٤أ + ١٦أب − ١٢ب = ٠ ⟵ $-$أ + ٤ب = ٣ ,,,,,,,,,,,,,,,,, (١)

ن$'$(س) = { ٣أس^{٢} + ب ، س < ٢

١٢أس + ٩ب ، س > ٢

ن$'$(٢)$^{+}$ = ن$'$(٢)$^{-}$

١٤أ + ٩ب = ١٢أ + ب ⟵ ٩ب − ب = ١٢أ − ١٤أ

⟵ ٨ب = ١٨أ ⟵ أ − ب = ٠ ,,,,,,,,,,,,(٢)

$-$أ + ٤ب = ٣

أ − ب = ٠

٣ب = ٣ ⟵ ب = ١

أ − ب = ٠ ⟵ أ − ١ = ٠ ⟵ أ = ١