تطبيقات هندسية على التفاضل :

مراجعة :

١) $ل_١ \perp ل_٢$ مستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا ميل ($ل_١$) = ميل ($ل_٢$)

٢) $ل_١ \perp ل_٢$ مستقيمان متعامدان إذا وفقط إذا ميل ($ل_١$) × ميل ($ل_٢$) = -١

٣) ميل المستقيم اذا عرف نقطتين عليه = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٤) معادلة المستقيم اذا عرف ميله (م) ونقطة واقعة عليه هي : $(ص - ص_١) = م(س - س_١)$

تعريف : اذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة $أ(س_١ ، ق(س_١))$ ، فان ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) ويساوي $ق'(س_١)$

ويُعرف أيضاً العمودي على منحنى الاقتران ، بأنه العمودي على المماس عند نقطة التماس.

مثال (١): جد ميل منحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ + ٥س$ عند س = ١

ثم جد معادلتي المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة

الحل : ميل المنحنى ق(س) عند س = ١ يساوي $ق'(١)$

$$ق'(س) = ٣س^٢ + ٥$$

$$ق'(١) = ٣ + ٥ = ٨$$ = ميل المماس عند نقطة التماس

نقطة التماس هي $(١ ، ق(١)) = (١ ، ٦)$

معادلة المماس : $(ص - ٦) = ٨(س - ١)$

$ص - ٦ = ٨س - ٨$ ⟵ $ص = ٨س - ٢$

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-١}{٨}$

معادلة العمودي على المماس عند نقطة التماس : $(ص - ٦) = \frac{-١}{٨}(س - ١)$

$٨ص - ٤٨ = -س + ١$ ⟵ $٨ص = -س + ٤٩$ ⟵ $ص = \frac{-س + ٤٩}{٨}$

مثال (٢) : اذا كان المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، $س > ٠$ يصنع زاوية قياسها ١٣٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

الحل : نفرض ان نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$

ميل المنحنى = ميل المماس = $ظا ١٣٥^\circ = -١$

$$ق'(س) = \frac{-٤}{س^٢}$$

ميل المنحنى = $ق'(س_١) = \frac{-٤}{س_١^٢}$

$$-١ = \frac{-٤}{س_١^٢} \longleftarrow -١س_١^٢ = -٤ \longleftarrow س_١^٢ = ٤$$

$$\longleftarrow س_١ = +٢ ، -٢$$

$س_١ = -٢$ مرفوضة لان من معطيات السؤال $س > ٠$

$\longleftarrow س_١ = ٢ \longleftarrow ق(٢) = \frac{٤}{٢} = ٢ \longleftarrow$ نقطة التماس هي (٢ ، ٢)

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = ١

النقطة (٢،٢)

معادلة العمودي : $(ص - ٢) = ١(س - ٢)$

ص – ٢ = س – ٢

ص = س

النقطة (٠ ، ٠) تحقق معادلة العمودي على المماس عند نقطة التماس وهذا يعني ان العمودي على المماس يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

مثال (٣) : اذا كان المستقيم ص = -٣س + جـ يمس منحنى $ق(س) = -٢س^{٢} + ٥س + ١$

جد نقطة / نقاط التماس.

الحل : ميل المماس من معادلته = -٣

نفرض أن نقطة التماس $(س_{١}، ص_{١})$

$$ق'(س) = -٤س + ٥$$

$$ق'(س_{١}) = -٤س_{١} + ٥ = -٣$$

$$-٤س_{١} = -٨ \longleftarrow \qquad س_{١} = ٢$$

$$ق(س_{١}) = -٢ \times ٤ + ٥ \times ٢ + ١ = -٨ + ١٠ + ١ = ٣$$

نقطة التماس (٢ ، ٣) $\longleftarrow$

مثال (٤) : اذا كان المستقيم ص = جـ س + ٥ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢}$

عند النقطة (-١ ، -٣) جد قيم أ ، ب ، جـ

الحل : نقطة التماس تحقق معادلة المماس $\longleftarrow$ **-٣ = -١ جـ + ٥**

$\longleftarrow$ **-٨ = - جـ** $\longleftarrow$ **جـ = ٨**

ميل المماس من معادلته = جـ = ٨

$$ق'(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس$$

ميل المماس = $ق'(-١) = ٣أ - ٢ب = ٨$

$\longleftarrow$ $٣أ - ٢ب = ٨$ **.....(١)**

وايضا النقطة نقطة التماس (- ١ ، ٣) تحقق معادلة الاقتران ق(س)

$\longleftarrow$ $ق(-١) = -أ + ب = -٣$ **٢/ .....(٢)**

$$٣أ - ٢ب = ٨ \qquad \text{.....(١)}$$

أ = ٢

$٣أ - ٢ب = ٨ \longleftarrow ٦ - ٢ب = ٨ \longleftarrow ٢ب = -٢ \longleftarrow ب = -١$

مثال(٥) : **جد نقاط تعامد منحنى الاقترانين :**

$ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ١$

الحل : $م_{١} = ق'(س) = ٢س$ $م_{٢} = هـ'(س) = ٢س + ٢$

$م_{١} \times م_{٢} = -١$

$٢س \times (٢س + ٢) = -١$

$٤س^{٢} + ٤س + ١ = ٠$ ⟵ $(٢س + ١)(٢س + ١) = ٠$

$س = -\frac{١}{٢}$ ، $ق(-\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤}$ ⟵ **نقطة التعامد هي** $(-\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤})$

مثال (٦) : **اذا كان المماس لمنحنى الاقتران** $ق(س) = س^{٢} + ٥س$ **عند** $س = س_{١}$

يصنع زاوية ٤٥ مع محور السينات الموجب ، جد احداثيي نقطة التماس .

الحل: نفرض نقطة التماس $(س_{١}، ص_{١})$

ميل المماس = ظا هـ = ظا ٤٥ = ١

$ق'(س) = ٢س + ٥$

وايضا ميل المماس = $ق'(س_{١}) = ٢س_{١} + ٥ = ١$ ⟵ $س_{١} = -٢$

$ق(-٢) = ٤ + -١٠ = -٦$ ⟵ **نقطة التماس (-٢ ، -٦)**

مثال(٧) : **جد قيمة الثابت جـ في الاقتران** $ق(س) = جـس^{٢}$ ، **اذا كانت قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ١ هو ٤٥ .**

الحل : ميل المماس = ظا ٤٥ = ١

$ق'(س) = ٢جـس$

ميل المماس = $ق'(١) = ٢جـ = ١$ ⟵ $جـ = \frac{١}{٢}$

مثال (٨) : جد معادلة المماس لمنحنى $ن(س) = س^{٢} - ٦س + ٧$ **عند نقطة تقاطعه**

مع المستقيم $ص - ٣س + ١ = ٠$

الحل: $ص - ٣س + ١ = ٠ \longrightarrow ص = ٣س - ١$

نقطة التقاطع تحقق معادلة كل من منحنى الاقتران والمستقيم

$$س^{٢} - ٦س + ٧ = ٣س - ١$$

$$س^{٢} - ٩س + ٨ = ٠ = (س - ٨)(س - ١) \longrightarrow$$ **س = ١ ، س = ٨**

اذا كانت س = ١ $\longrightarrow$ **ص = ٢** $\longrightarrow$ **نقطة التقاطع (١ ، ٢)**

اذا كانت س = ٨ $\longrightarrow$ **ص = ٢٣** $\longrightarrow$ **نقطة التقاطع (٨ ، ٢٣)**

عند نقطة التقاطع (٨ ، ٢٣)

$$ن'(س) = ٢س - ٦$$

ميل المماس = $ن'(٨) = ٢ \times ٨ - ٦ = ١٠$

معادلة المماس هي: $(ص - ٢٣) = ١٠(س - ٨)$

$$ص - ٢٣ = ١٠س - ٨٠$$

$$ص = ١٠س - ٥٧$$

عند نقطة التقاطع (١، ٢)

$$ن'(س) = ٢س - ٦$$

ميل المماس = $ن'(١) = ٢ \times ١ - ٦ = -٤$

معادلة المماس هي: $(ص - ٢) = -٤(س - ١)$

$$ص - ٢ = -٤س + ٤$$

$$ص = -٤س + ٦$$