متسلسلات فورير لنصف المدى :

إذا كان ق (س) معرف على الفترة [-هـ ، هـ] ، فإنه يمكن الحصول للاقتران على متسلسلات فورير الآتية:

١) متسلسلة جيب التمام لفورير للاقتران ق(س) على الفترة [-هـ ، هـ] ، وهنا نتعامل مع الاقتران على

أنه اقتران زوجي بغض النظر عن نوعه:

⟵ نحسب فقط $\text{أ}_{\cdot}$ ، $\text{أ}_{\text{ن}}$

ويكون

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}_{\cdot}}{٢} + \sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right)$$

بحيث

$$\text{أ}_{\cdot} = \frac{٢}{\text{هـ}}\int_{\cdot}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \quad ، \quad \text{أ}_{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{هـ}}\int_{\cdot}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right)\text{دس}$$

٢) متسلسلة الجيب لفورير للاقتران ق(س) على الفترة [-هـ ، هـ] ، وهنا نتعامل مع الاقتران على أنه اقتران فردي بغض النظر عن نوعه :

⟵ نحسب فقط $\text{ب}_{\text{ن}}$

ويكون

$$\text{ق}(\text{س}) = \sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right)$$

بحيث

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{هـ}}\int_{\cdot}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right)\text{دس}$$

<u>مثال (١)</u> : جد متسلسلة فورير الجيب لفورير ومتسلسلة جيب التمام لفورير للاقتران ق(س) = س

على الفترة $\left[-\pi ، \pi\right]$

الحل : ١) متسلسلة الجيب لفورير : نتعامل مع الاقتران على انه اقتران فردي

$\longleftarrow$ نحسب فقط $\text{ب}_{\text{ن}}$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{هـ}}\int_{٠}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right)\text{ءس}$$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{٢}{\pi}\int_{٠}^{\pi} \text{س}\,\text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\pi}\right)\text{ءس}$$

لإيجاد التكامل باستخدام طريق التكامل بالأجزاء :

نفرض ق = س ، $\text{ءهـ} = \text{جا}(\text{ن س})\,\text{ءس}$

$\text{ءق} = \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \frac{-١}{\text{ن}}\text{جتا}(\text{ن س})$

$$\int_{٠}^{\pi} \text{س}\,\text{جا}(\text{ن س})\,\text{ءس} = \text{س} \times \frac{-١}{\text{ن}}\text{جتا}(\text{ن س}) - \int_{٠}^{\pi} \frac{-١}{\text{ن}}\text{جتا}(\text{ن س})\,\text{ءس}$$

$$\int_{٠}^{\pi} \text{س}\,\text{جا}(\text{ن س})\,\text{ءس} = \left(\frac{-\text{س}}{\text{ن}}\text{جتا}(\text{ن س}) + \frac{١}{\text{ن}^{٢}}\text{جا}(\text{ن س})\right)\Big|_{٠}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{-\pi}{\text{ن}}\text{جتا}(\text{ن}\pi) + \frac{١}{\text{ن}^{٢}}\text{جا}(\text{ن}\pi)\right) - \left(\frac{٠}{\text{ن}}\text{جتا}(٠) + \frac{١}{\text{ن}^{٢}}\text{جا}(٠)\right)$$

$$= \left(\frac{-\pi}{\text{ن}} \times (-١)^{\text{ن}}\right) = \frac{-\pi(-١)^{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{٢}{\pi} \times \frac{-\pi(-١)^{\text{ن}}}{\text{ن}} = \frac{-٢(-١)^{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{-٢(-١)^{\text{ن}}}{\text{ن}}\,\text{جا}(\text{ن س})$$

٢) لايجاد متسلسلة جيب التمام لفورير للاقتران ق (س) = س على الفترة $[-\pi \text{،} \pi]$

نتعامل مع الاقتران على انه اقتران زوجي ⟵ نجد $\text{أ}_{\text{.}}$ ، $\text{أ}_{\text{ن}}$

$$\text{أ}_{\text{.}} = \frac{\text{٢}}{\pi}\int_{\text{.}}^{\pi} \text{س دس} = \left(\frac{\text{٢}}{\pi}\left(\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right)\right)\Big|_{\text{.}}^{\pi} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\pi}\Big|_{\text{.}}^{\pi}$$

$$\text{أ}_{\text{.}} = \left(\frac{\pi^{\text{٢}}}{\pi} - \text{٠}\right) = \pi$$

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{\text{٢}}{\text{هـ}}\int_{\text{.}}^{\text{هـ}} \text{ق(س)}\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right)\text{دس} = \frac{\text{٢}}{\pi}\int_{\text{.}}^{\pi} \text{س جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\pi}\right)\text{دس} = \frac{\text{٢}}{\pi}\int_{\text{.}}^{\pi} \text{س جتا(نس) دس}$$

لإيجاد التكامل باستخدام طريق التكامل بالأجزاء :

نفرض ق = س ، $\text{دهـ} = \text{جتا(نس) دس}$

$\text{دق} = \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{\text{١}}{\text{ن}}\text{جا(نس)}$

$$\int \text{س جتا(نس) دس} = \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{ن}}\text{جا(نس)} - \int \frac{\text{١}}{\text{ن}}\text{جا(نس) دس}$$

$$\int_{\text{.}}^{\pi} \text{س جتا(نس) دس} = \left(\frac{\text{س}}{\text{ن}}\text{جا(نس)} + \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}}\text{جتا(نس)}\right)\Big|_{\text{.}}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{\pi}{\text{ن}}\text{جا}(\text{ن}\pi) + \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}}\text{جتا}(\text{ن}\pi)\right) - \left(\frac{\text{٠}}{\text{ن}}\text{جا(٠)} + \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}}\text{جتا(٠)}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}} \times (\text{١}^{-})^{\text{ن}} - \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}}\right) = \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}}\left((\text{١}^{-})^{\text{ن}} - \text{١}\right)$$

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{\text{٢}}{\pi}\left(\frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}}\right)\left((\text{١}^{-})^{\text{ن}} - \text{١}\right) = \frac{\text{٢}}{\pi\text{ن}^{\text{٢}}}\left((\text{١}^{-})^{\text{ن}} - \text{١}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\pi}{٢} + \sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٢}{\pi \text{ن}^{٢}} \left(\left(^{-}١\right)^{\text{ن}} - ١ \right) \text{جتا}(\text{ن}\text{س})$$

<u>مثال (٢)</u> : **جد متسلسلة جيب التمام لفورير للاقتران ق(س) = س + ٢ على الفترة [-٥ ، ٥]**

<u>الحل</u>: **لايجاد متسلسلة جيب التمام لفورير للاقتران ق (س) = س على الفترة [-٥ ، ٥]**

نتعامل مع الاقتران على انه اقتران زوجي ⟵ **نجد** $\text{أ}_{.}$ ، $\text{أ}_{\text{ن}}$

$$\text{أ}_{.} = \frac{٢}{٥} \int_{.}^{٥} (\text{س} + ٢)\, \text{د}\text{س} = \left(\frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right)\Bigg|_{.}^{٥}$$

$$\text{أ}_{.} = \left(\frac{٢}{٥} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٥} \times ٢\text{س}\right)\Bigg|_{.}^{٥} = \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٥} + \frac{٤\text{س}}{٥}\right)\Bigg|_{.}^{٥} = \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س}}{٥}\Bigg|_{.}^{٥}$$

$$\text{أ}_{.} = \left(\frac{٢٥ + ٢٠}{٥} - ٠\right) = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{هـ}} \int_{.}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\, \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{هـ}}\right) \text{د}\text{س} = \frac{٢}{٥} \int_{.}^{٥} (\text{س} + ٢)\, \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{٥}\right) \text{د}\text{س}$$

لإيجاد التكامل باستخدام طريق التكامل بالأجزاء :

نفرض ق = س + ٢ ، $\text{د}\text{هـ} = \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{٥}\right) \text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{ق} = \text{د}\text{س}$ ، $\text{هـ} = \frac{٥}{\text{ن}\pi} \text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{٥}\right)$

$$\int_{.}^{٥} (\text{س} + ٢) \times \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{٥}\right) \text{د}\text{س} = (\text{س} + ٢) \times \frac{٥}{\text{ن}\pi} \text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{٥}\right) - \int_{.}^{٥} \frac{٥}{\text{ن}\pi} \text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{٥}\right) \text{د}\text{س}$$

$$\int_{\text{٠}}^{\text{٥}} (\text{س} + \text{٢}) \times \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{٥}}\right) \text{ءس} = \left[\frac{\text{٥س} + \text{١٠}}{\text{ن}\pi} \text{جا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{٥}}\right) - \frac{\text{٥}}{\text{ن}\pi} \times \frac{-\text{٥}}{\text{ن}\pi} \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{٥}}\right)\right]_{\text{٠}}^{\text{٥}}$$

$$= \frac{\text{٣٥}}{\text{ن}\pi} \text{جا}(\text{ن}\pi) + \frac{\text{٢٥}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} \text{جتا}(\text{ن}\pi) - \left(\text{٠} + \frac{\text{٢٥}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} \text{جتا}\ \text{٠}\right)$$

$$= \frac{\text{٢٥}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} (-\text{١})^{\text{ن}} - \frac{\text{٢٥}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢٥}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} \left((-\text{١})^{\text{ن}} - \text{١}\right)$$

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}} \times \frac{\text{٢٥}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} \left((-\text{١})^{\text{ن}} - \text{١}\right) = \frac{\text{١٠}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} \left((-\text{١})^{\text{ن}} - \text{١}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٩}}{\text{٢}} + \sum_{\text{ن}=\text{١}}^{\infty} \frac{\text{١٠}}{\text{ن}^{\text{٢}}\pi^{\text{٢}}} \left((-\text{١})^{\text{ن}} - \text{١}\right) \text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi\text{س}}{\text{٥}}\right)$$