ⓐ

Chp 4.3 | Numerical Integration

أعزائي السلام عليكم، من يستطيع حل هذا التكامل
$\int e^{x^2}\,dx$. ؟ لا أحد يمكنه من البشر. حاولوا ذلك!

هناك تكاملات لا نستطيع حلها كما في calculus .

ولكن هذه التكاملات تصادف الخبراء والمهندسين في الشركات
فكيف يجيبون عنها. لذلك لجأ خبراء الرياضيات
إلى عملية التقريب، ولكنه تقريب دقيق أعزائي.

سوف ندرس في هذه المحاضرة نوعين أساسيين للتقريب

① Trapezoidal rule (شبه المنحرف) . ② Simpson's rule

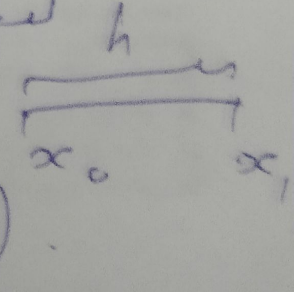
وهذان النوعان ينقسمان إلى نوعين أيضا، الأول سهل
بسيط والثاني مركب.

$\boxed{\text{البسيط}}$

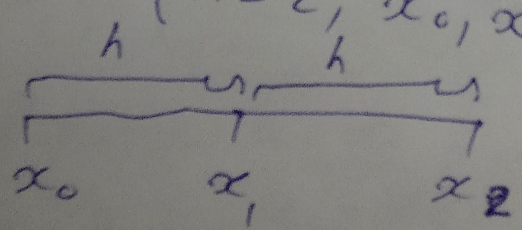
أولاً $\boxed{\text{البسيط}}$

$\boxed{1}$ Trapezoidal Rule $\boxed{(n=1,\ x_0, x_1)}$

$\boxed{n=1}$ لذلك $\boxed{x_0, x_1}$ لدينا نقطتان



$\boxed{2}$ Simpson's Rule $(n=2,\ x_0, x_1, x_2)$.

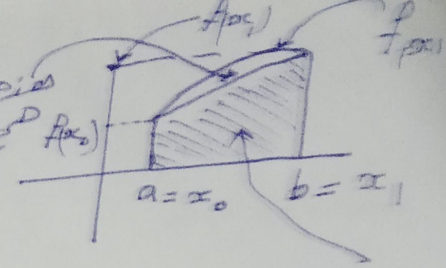


| ... علمه تقسم |

(b)

[I] Trapezoidal Rule

هذه المنطقة هي الايرور (الخطأ في التقريب)



لأن التكامل هو المساحة تحت المنحنى لذلك مساحة شبه المنحرف هي المساحة التقريبية والمنطقة اعلاه هي الخطأ (ايرور).

سنأخذ الآن فكرة عن اشتقاق الطريقة.

السؤال ما هي مساحة شبه المنحرف؟

$A_{\text{شبه المنحرف}} = \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$ ⇐ انظر الى الرسمة

$$= \boxed{\frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)}$$

الآن سوف نتعلم كيفية اشتقاق هذه العلاقة

Given x_0 and x_0 (نستخدم لاجرانج الذي تعلمناه)

we apply first Lagrange interpolation for $f(x)$.

القاعدة التي تعرفها

$$f(x) = P(x) + R(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \frac{f''(c(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1).$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + R(x)$$

~~b~~ c

نأخذ التكامل للطرفين

$$\Rightarrow \int_{0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{-h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)\,dx + \frac{f(x_1)}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} R(x)$$

هذا الإيرور

اسيرا التكامل السابق بدون الإيرور نستنتج

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right).$$

الإيرور يحتاج لبعض المعرفات لحسابه

العلاقة النهائية :

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)} - \frac{h^3}{12} f''(c)$$

Error

هذه القاعدة تسمى Trapezoidal Rule.

Ex: Let $f(x)=e^{x^2}$ on $[0,1]$ use Trapezoidal rule to approximate $\int_0^1 f(x)\,dx$ with its absolute error.

Sol: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{1} = \boxed{1}$. $b = x_0,\ a = x_1$. $n = 1$.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right].$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{(0)^2} - e^{(1)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[1+e\right].$$ #

الحل الأول

واحد عليه تقسيم

القسم الثاني

(a)

$f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2x e^{x^2}$

$f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2 e^{x}$

الآن نجد المشتقة الثالثة لأننا حسب الترجيحي نريد أن نعرف max للاقتران $f''(x)$ بعد التعويض ينتج

$|Error| = \left| \frac{-h^3}{12} f''(c) \right|$

$\Rightarrow c \in [0,1]$.

$\Rightarrow c = \boxed{1}$ max

$\Rightarrow |Error| =$

$= \frac{1}{12} \left| 4c^2 e^{c^2} + c e^{c^2} \right|$

$\leq \frac{1}{2} \left| 4(1)^2 e^{(1)^2} + 2 e^{(1)^2} \right|$

$= \boxed{\frac{1}{2} e}$

$f'''(x) = 4x e^{x^2} (2x^2 + 3)$

نعمل ذلك

$f'''(x)$

$- \; - \; - \; + \; + \; +$

$0 \qquad 1$

$f'''(x) = 0 \Rightarrow 4x e^{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\boxed{2}$ الطريقة الثانية

Simpson's Rule $(n = 2, x_0, x_1, x_2)$.

We apply Taylor Thm (التي تعرفونها) لاشتقاقها

حول x_1

$\Rightarrow f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + f''(x_1) \frac{(x - x_1)^2}{2!}$

$+ f'''(x_1) \frac{(x - x_1)^3}{3!} + f^{(4)}(c(x)) \frac{(x - x_1)^4}{4!}$

واجب عليه تقييم

e بأخذ التكامل للطرفين من $\int_{x_0}^{x_2}$

ينتج Error

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$$

احسب هذا

EX: Let $f(x) = x^2$, use Simpson's rule to approximate $\int_0^1 f(x)\,dx$ with its truncation error.

Sol: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$x_0 = 0$, $x_2 = 1$

$n = 2$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left[f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(0^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2\right) = \frac{1}{3}$$

$h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$

$$\text{Truncation error} = \frac{-h^5}{90} f^{(5)}(c) = 0.$$

$f' = 2x$

$f'' = 2$

$f''' = 0$

$f^{(4)} = f^{(5)} = 0.$

لماذا قيمة الايرور هنا = 0

وماذا يعني هذا؟؟

...ية تقسيم ١

f

Composite Numerical Integration

أحبائي هنا سنطبق الطريقتين السابقتين أكثر من مرة (composite) (مركب).

Thm: Composite Trapezoidal $(n>1)$ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

Let $f \in C^2[a,b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ and $x_j = a + jh$ for each $j = 0, 1, \ldots, n$. $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ for which the composite Trapezoidal rule can be written with its error as

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]} - \boxed{\frac{b-a}{12} h^2 f''(c)}$$

Error

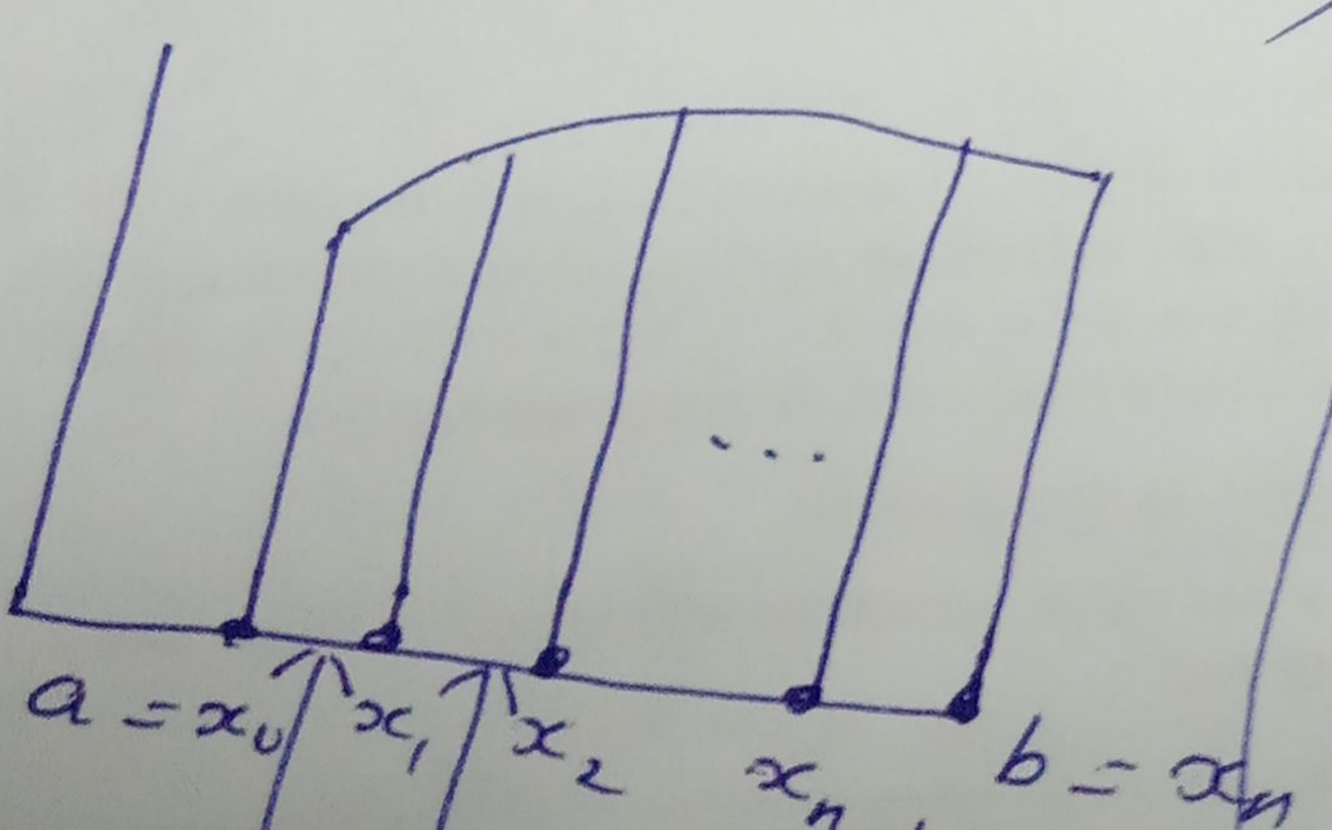
اشتقاقه سهل جدا

أطبق Trapezoidal البسيطة

على x_0, x_1 ثم مرة أخرى على

x_1, x_2 ماذا ينتج؟ ينتج هنا

القانون هكذا.



$$\boxed{\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]} + \boxed{\frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)]}$$

الآن (9)

المركبة (Composite Simpson's)

Thm (Composite Simpson's) $n > 3$, n: even, زوجي وفقط

Let $f \in C^4[a,b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ and $x_j = a + jh$ for each $j = 0, 1, \ldots, n$ (n: even) $\Rightarrow$

$\exists\, c \in (a,b)$ for with the composite Simpson's rule can be written with its error as:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c).$$

Imp.

Ex: Consider $f(x) = \sin x$

① Use Trapezoidal rule to approximate $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ $(n = 6)$.

② Use Simpson's Rule to find n to get an absolute error less than 0.00002.

Sl: ① $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{2\pi}{6},\ x_3 = \frac{\pi}{2}$

$x_4 = \frac{2\pi}{3},\ x_5 = \frac{5\pi}{6},\ x_6 = \pi.$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{\frac{\pi}{6}}{2}\left[f(0) + \sum_{j=1}^{5} f(x_j) + f(\pi)\right]$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[\sin 0 + \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 + \sin x_4 + \sin x_5 + \sin \pi\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[2 + \sqrt{3}\right]$$

2 $$|\text{Error}| = \left| \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(c) \right|$$

$$= \frac{\pi}{180} h^4 |f^{4}(c)|$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$= \frac{\pi}{180} h^4 (1) < 0.00002$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{180}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 (1) < 0.00002$$

$$\Rightarrow n^4 > \frac{1}{0.00002} \frac{\pi^5}{180}$$

$$n > 17.02$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 18}$$