ⓐ

Chp 7.3 | Indirect methods for solving linear systems

بعد المقدمة النظرية في الدرس السابق الآن سوف نتعرف على ثلاث طرق لتقريب حل نظام من المعادلات الخطية : (تقريب الحل).

① Jacobian method.

② Gauss-siedel method.

③ SOR method (successive over relaxation).

إذا فهمت الطريقة الأولى فإنك مباشرة تفهم الطريقتين التاليتين.

① Gacobian method ⟸ الصيغة العامة للحل

لدينا النظام التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

هذا هو نظام وحله تقريبيا نضع x موضع القانون

الطريقة ⟹

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right].$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right].$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} \cdots - a_{nn}x_n^{(k-1)}\right]$$

(b)

Ex: Use Jacobian method to solve the system $AX=b$.
where $A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$

Find $X^{(3)}$

Choose $X^{(0)} = (0,0,0,0)^T$ then find $\| X^{(3)} - X^{(1)} \|_\infty$.

التقريب الثالث

① تحول المصفوفة إلى معادلات

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$
$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$
$$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$
$$3x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

② نطبق الطريقة

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)}\right]$$
$$x_2^{(k)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(k-1)} + x_3^{(k-1)} - 3x_4^{(k-1)}\right]$$
$$x_3^{(k)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)} + x_4^{(k-1)}\right]$$
$$x_4^{(k)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_1^{(k-1)} - 3x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}\right]$$

③ نجد التقريب الأول $\boxed{k=1}$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right] = \frac{1}{10}\left[6 + 0 - 2(0)\right] = \boxed{0.6}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)}\right] = \boxed{25/11}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_4^{(0)}\right] = \boxed{-11/10}$$
$$x_4^{(1)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right] = \boxed{\frac{15}{8}}$$

ⓒ إذا التقريب الأول $X^{(1)} = \left(0.6, \frac{25}{11}, \frac{-11}{10}, \frac{15}{8}\right)$

الآن نستخدم التقريب الأول لايجاد التقريب الثاني

$\boxed{k=2}$ $x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right] = \frac{1}{10}\left[6 + \frac{25}{11} - 2\left(\frac{-11}{10}\right)\right] = \boxed{1.0473}$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)}\right] = \boxed{1.7159}$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(1)}\right] = \boxed{-0.8052}$

$x_4^{(2)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right] = \boxed{0.6662}$

إذا التقريب الثاني $X^{(2)} = (1.0473, 1.7159, -0.8052, 0.6662)$

الآن بنفس الطريقة نستخدم التقريب الثاني لايجاد الثالث

$\boxed{k=3}$ $x_1^{(3)} = 0.58945$, $x_2^{(3)} = 2.11468$

$x_3^{(3)} = -1.07185$, $x_4^{(3)} = 0.73815$

الآن نطرح $X^{(3)} - X^{(1)}$ ونأخذ القيمة المطلقة لأكبر قيمة

	$X^{(1)}$	$X^{(3)}$	$X^{(3)} - X^{(1)}$
x_1	0.6	0.58945	?
x_2	$\frac{25}{11}$	2.11468	?
x_3	$\frac{-11}{10}$	-1.07185	?
x_4	$\frac{15}{8}$	0.73815	?

$\Rightarrow \|X^{(3)} - X^{(1)}\|_\infty = 1.13685$

② الطريقة الثانية (Gauss-Siedel method) (d)

الفكرة: القيمة التي نجدها نستخدمها مباشرة في التقريب التالي.

Given: the system

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

الطريقة:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right]$$ ← (نفس الطريقة السابقة)

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right]$$ ← (في اختلاف)

في الطريقة السابقة كانت k-1 لكن هنا قد وجدنا $x_1^{(1)}$ في المعادلة السابقة لذلك نستخدمها

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n-1\,n}x_{n-1}^{(k)}\right]$$

كل القيم (k) لأننا وجدناها جميعها في المعادلات السابقة.

Ex: Solve the system by Gauss-Siedel method

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$
$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$
$$-2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$
$$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

choose $X^{(0)} = (0,0,0,0)$

Find $X^{(2)}$

and $\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_2$

e)

S/.

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(k-1)} - 2x_2^{(k-1)}\right]$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)} - 3x_4^{(k-1)}\right]$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{10}\left[-11 + 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k-1)}\right]$$

$$x_4^{(k)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right]$$

عليه
ان يكون
خطأ في اشارة
تأكد من ذلك -

$\boxed{k=1}$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right] = \boxed{0.6}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)}\right] = \frac{1}{11}\left[25 + 0.6 + 0 - 0\right] = \boxed{2.3273}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(0)}\right] = \boxed{0.9873}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right] = \boxed{0.8789}$$

التقريب الثاني

$\boxed{k=2}$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right] = \boxed{1.0302}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)}\right] = \boxed{2.0369}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_4^{(1)}\right] = \boxed{-1.0145}$$

$$x_4^{(2)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right] = \boxed{0.9843}$$

	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(2)} - X^{(1)}$
x_1	0.6	1.0302	0.4302
x_2	2.3273	2.0369	-0.2904
x_3	-0.9873	-1.0145	-0.0272
x_4	0.8789	0.9843	0.1054

$$\Rightarrow \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_2 = \sqrt{(0.4302)^2 + (-0.2904)^2 + (-0.0272)^2 + (0.1052)^2} = \boxed{0.5363}$$

SOR

③ الطريقة الثالثة

Successive over relaxation.

① اولا يجب ان تعطى قيمة ω وهي بينه

$$\boxed{1 < \omega < 2}$$

② وطريقة الحل (للمثال السابق).

$\omega = \boxed{1.03}$

$$x_1^{(k)} = (1-1.03)\,x_1^{(k-1)} + \frac{1.03}{10}\left[6 + x_2^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)}\right].$$

$$x_2^{(k)} = (1-1.03)\,x_2^{(k-1)} + \frac{1.03}{11}\left[25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)} - 3x_4^{(k-1)}\right]$$

$$x_3^{(k)} = (1-1.03)\,x_3^{(k-1)} + \frac{1.03}{10}\left[-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k-1)}\right]$$

$$x_4^{(k)} = (1-1.03)\,x_4^{(k-1)} + \frac{1.03}{8}\left[15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right].$$

$\boxed{k=1}$

$$x_1^{(1)} = (-0.03)\,x_1^{(0)} + \frac{1.03}{10}\left[6 + x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right] = \frac{(1.03)(6)}{10} = \boxed{0.618}$$

$$x_2^{(1)} = (-0.03)\,x_2^{(0)} + \frac{1.03}{11}\left[25 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)}\right] = \boxed{2.3988}$$

$$x_3^{(1)} = (-0.03)\,x_3^{(0)} + \frac{1.03}{10}\left[-11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(0)}\right] = \boxed{-1.0132}$$

$$x_4^{(1)} = (-0.03)\,x_4^{(0)} + \frac{1.03}{8}\left[15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right] = \boxed{0.8743}$$

$\boxed{k=2}$

$x_1^{(2)} = 1.0553$, $x_2^{(2)} = 2.0273$.

$x_3^{(2)} = -1.0211$, $x_4^{(2)} = 0.9905$