تطبيقات فيزيائية على التفاضل :

تعريف : السرعة اللحظية (ع) عند الزمن (ن) هي : $ع(ن) = \frac{ف}{ن} = ف'$

التسارع اللحظي (ت) عند الزمن (ن) هو: $ت(ن) = \frac{ع}{ن} = \frac{ف^{٢}}{ن^{٢}} = ف''$

مثال(١) : تحرك جسم على خط مستقيم ، بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة (م) يتحدد بالعلاقة

$ف = ن^{٣} - ٩ن^{٢} + ٧$ ، **حيث (ف) بعده بالأمتار ، (ن) الزمن بالثواني ، جد:**

١) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١ ، ٣]

٢) تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

الحل: ١) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(١)-ف(٣)}{١-٣} = \frac{(٧+٢^{٢}(١)٩-٣^{٣}١)-(٧+٢^{٢}(٣)٩-٣^{٣}٣)}{٢}$

$= \frac{-٤٧-(-١)}{٢} = \frac{-٤٦}{٢} = -٢٣$ م/ث

٢) $ف'(ن) = ع(ن) = ٣ن^{٢} - ١٨ن$

يعكس الجسم اتجاه حركته عندما ع(ن) = ٠

$ع(ن) = ٣ن^{٢} - ١٨ن = ٠ = ٣ن(ن-٦)$

⟵ ن = ٠ أو ن = ٦ (ن = ٠ مهملة لان ن = ٠ بداية الحركة)

⟵ يعكس الجسم اتجاه حركته عندما ن = ٦ ⟵ $ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ١٨$

⟵ $ت(ن) = ٦ \times ٦ - ١٨ = ١٨$ م/ث^{٢}

مثال(٢) : قذف جسم رأسيا الى اعلى من نقطة على سطح الارض بحيث يتحدد بعده عن سطح الارض

بالعلاقة : $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$ **بحيث ف : ارتفاع الجسم بالأمتار**

ن : الزمن بالثواني

جد : ١) اقصى ارتفاع يصله الجسم.

٢) المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الاربعة الاولى.

الحل : ١) عندما يصل الجسم اقصى ارتفاع ⟵ ع (ن) = ٠

$$ع(ن) = ف'(ن) = ٢٠ - ١٠ن = ٠$$

⟵ ١٠ ن = ٢٠ ⟵ ن = ٢ ⟵ عندما ن = ٢ يصل الجسم اقصى ارتفاع

اقصى ارتفاع = ف(٢) = $٢٠ \times ٢ - ٥ \times ٢^{٢} = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠$ م

٢) عندما ن = ٤ ⟵ $ف(٤) = ٢٠ \times ٤ - ٥ \times ٤^{٢} = ٨٠ - ٨٠ = ٠$

⟵ أي ان الجسم يكون قد وصل سطح الارض

⟵ المسافة المقطوعة = ٢ (اقصى ارتفاع) – ف(٤)

= ٢ (٢٠) – ٠ = ٤٠ م

مثال (٣) : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفق العلاقة : $ف(ن) = ن^{٣} + ٥ن^{٢} + ٩$

احسب سرعة الجسم وتسارعه بعد ٣ ثواني.

الحل: $ع = ف'(ن) = ٣ن^{٢} + ١٠ن$

$ع(٣) = ٣ \times ٣^{٢} + ١٠ \times ٣ = ٢٧ + ٣٠ = ٥٧$ م/ث

$ت = ع'(ن) = ٦ن + ١٠$

$ت(٣) = ٦ \times ٣ + ١٠ = ١٨ + ١٠ = ٢٨$ م/ث^{٢}

مثال (٤) : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفق العلاقة : $ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢$

احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

الحل : $ع = ف'(ن) = ٦ن^{٢} - ٦ن$

$ت = ع'(ن) = ١٢ن - ٦$

عندما ت = صفر ⟵ $١٢ن - ٦ = ٠$ ⟵ $١٢ن = ٦$ ⟵ $ن = \frac{١}{٢}$ ث

$$ع(\frac{1}{2}) = ٦ \times \frac{1}{4} - ٦ \times \frac{1}{2} = ٦(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = ٦ \times \frac{1}{4}^{-} = \frac{3}{2}^{-}$$

مثال(٥) : اذا كان $ف(ن) = \frac{1}{3} ن^{3} - ٣ن^{2} + ٥ن$ **هي المعادلة الزمنية لحركة جسيم على خط مستقيم حيث (ن) الزمن و (ف) المسافة .**

احسب التسارع في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة .

الحل :-

$$ع(ن) = ف'(ن) = ن^{2} - ٦ن + ٥$$

$$ت(ن) = ع'(ن) = ٢ن - ٦$$

تنعدم السرعة ⟵ **ع(ن) = ٠** ⟵ $ن^{2} - ٦ن + ٥ = ٠$

⟵ $(ن - ٥)(ن - ١) = ٠$

⟵ **ن = ١ ، ن = ٥**

عند ن = ١ ⟵ **ت (ن) = ٢ – ٦ = -٤** م/ث^{2}

عند ن = ٥ ⟵ **ت (ن) = ١٠ – ٦ = ٤** م/ث^{2}

مثال (٦) : يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث حسب العلاقة $ف(ن) = أن^{2} + بن$

حيث أ ، ب ثوابت

احسب المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثواني علما أن تسارعه يساوي ٨ م/ث^{2}

الحل :

$$ف(ن) = أن^{2} + بن$$

$$ع(ن) = ٢أن + ب$$

$$ت(ن) = ٢أ$$

سرعة ابتدائية = ٢ ⟵ **ع(٠) = ٢** ⟵ **ب = ٢**

التسارع = ٨ ⟵ **٢ أ = ٨** ⟵ **أ = ٤**

$$ف(٣) = ٤(٣)^{2} + ٢(٣) = ٣٦ + ٦ = ٤٢ \text{ م}$$

مثال (٧) : يتحرك جسيم بخط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد(ن) من الثواني يعطى بالعلاقة $ف(ن) = ن^{٣}$ فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، أ] يساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٢ ، جد قيمة أ .

الحل : السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(أ)-ف(٠)}{أ-٠} = \frac{أ^{٣}}{أ} = أ^{٢}$

السرعة اللحظية = $ف' = ٣ن^{٢}$

$ع(٢) = ٣ \times ٤ = ١٢$ م/ث

$أ^{٢} = ١٢ \longleftarrow أ = \pm\sqrt{١٢} \longleftarrow أ = \pm ٢\sqrt{٣}$

نهمل $-٢\sqrt{٣}$ لأن الزمن قيمة موجبة $\longleftarrow أ = +٢\sqrt{٣}$

مثال (٨) : يتحرك جسم بخط مستقيم بحيث أن سرعته = $ع = أ\sqrt{ف}$ ، $أ > ٠$ ، $ف > ٠$ اذا علمت أن تسارعه = ٨ ، جد قيمة الثابت أ

الحل : $ت = ع' = \frac{أ ف'}{٢\sqrt{ف}} = \frac{أ ع}{٢\sqrt{ف}} = \frac{أ \times أ\sqrt{ف}}{٢\sqrt{ف}} = \frac{أ^{٢}}{٢} = ٨$ م/ث^{٢}

$أ^{٢} = ١٦ \longleftarrow أ = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤ \longleftarrow أ = ٤$ (أ = -٤ تهمل)

مثال (٩) : اذا قذف جسم رأسيا الى اعلى عن سطح الارض وفق العلاقة : $ف(ن) = أن - ٥ن^{٢}$ جد قيمة (أ) علما ان اقصى ارتفاع وصل له الجسم ٨٠ م

الحل : $ع(ن) = ف'(ن) = أ - ١٠ن = ٠$

$أ = ١٠ن \longleftarrow ن = \frac{أ}{١٠}$

$ف(\frac{أ}{١٠}) = أ \times \frac{أ}{١٠} - ٥ \times \frac{أ^{٢}}{١٠٠} = ٨٠ \longleftarrow \frac{أ^{٢}}{٢٠} - \frac{أ^{٢}}{٢٠} = ٨٠$ م

$\frac{أ^{٢}}{٢٠} - \frac{أ^{٢}}{٢٠} = ٨٠ \longleftarrow أ^{٢} = ١٦٠٠ \longleftarrow أ = ٤٠$