مشتقة الاقترانات المثلثية:

تذكر:

$جا^٢س + جتا^٢س = ١$	$قاس = \frac{١}{جتاس}$
$جا٢س = ٢جاسجتاس$	$قتاس = \frac{١}{جاس}$
$ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$	$قا^٢س = ١ + ظا^٢س$
	$قتا^٢س = ١ + ظتا^٢س$

قاعدة (١): اذا كان $ق(س) = جاس$ (س بالتقدير الدائري) فإن $قَ(س) = جتاس$

مثال(١): اذا كان $ق(س) = جاس$ ، جد $قَ(\frac{\pi}{٦})$

الحل: $قَ(س) = جتاس \longrightarrow قَ(\frac{\pi}{٦}) = جتا\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال(٢): اذا كان $هـ(س) = س^٢ جاس$ ، جد $هـَ(س)$

الحل: $هـَ(س) = س^٢ \times جتاس + جاس \times ٢س = س^٢ جتاس + ٢س جاس$

مثال(٣): اذا كان $ص = جا(٥ - ٣س)$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = جتا(٥ - ٣س) \times {}^{-}٣ = {}^{-}٣ جتا(٥ - ٣س)$

مثال(٤): جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى $ص = جا(س ص)$ عند النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ١)

الحل: ميل المماس = $صَ_{(\frac{\pi}{٢}،١)} = جتا(س ص) \times (س \times صَ + ص \times ١)$

$صَ_{(\frac{\pi}{٢}،١)} = جتا(\frac{\pi}{٢}) \times (\frac{\pi}{٢} \times صَ + ١) = ٠ \times (\frac{\pi}{٢} \times صَ + ١) = ٠$

معادلة المماس : $(ص - ص_١) = م(س - س_١)$

$ص - ١ = ٠ \times (س - \frac{\pi}{٢}) = ٠ \longrightarrow ص = ١$

قاعدة (٢) : اذا كان $ق(س) = جتاس$ (س بالتقدير الدائري) فإن $ق^{\prime}(س) = ^{-}جاس$

مثال (٥) : اذا كان $هـ(س) = جتا^{٣}(١ - ٢س)$ ، أوجد $هـ^{\prime}(س)$

الحل : $هـ^{\prime}(س) = ٣جتا^{٢}(١ - ٢س) \times ^{-}جا(١ - ٢س) \times ^{-}٢$

$$هـ^{\prime}(س) = ٦جتا^{٢}(١ - ٢س)جا(١ - ٢س)$$

قاعدة (٣) : إذا كان $ق(س) = ظاس$ ، فإن $ق^{\prime}(س) = قا^{٢}س$

البرهان : $ق(س) = \frac{جاس}{جتاس}$ $\longleftarrow$ $ق^{\prime}(س) = \frac{جتاس \times جتاس - جاس \times ^{-}جاس}{(جتاس)^{٢}}$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{جتا^{٢}س + جا^{٢}س}{(جتاس)^{٢}} = \frac{١}{(جتاس)^{٢}} = قا^{٢}س$$

قاعدة (٤) : اذا كان : $ق(س) = ظتاس$ $\longleftarrow$ $ق^{\prime}(س) = ^{-}قتا^{٢}س$

$ق(س) = قاس$ $\longleftarrow$ $ق^{\prime}(س) = قاس ظاس$

$ق(س) = قتاس$ $\longleftarrow$ $ق^{\prime}(س) = ^{-}قتاس ظتاس$

مثال(٦) : إذا كان $ص = ٢ظاس - قتا^{٢}٥س$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس} = ٢قا^{٢}س - ٢قتا٥س \times ^{-}قتا٥س ظتا٥س \times ٥$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢قا^{٢}س + ١٠قتا^{٢}٥س ظتا٥س$$

مثال (٧) : إذا كان $ص = قا(جا٣س)$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس} = قا(جا٣س)ظا(جا٣س)جتا٣س \times ٣$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣قا(جا٣س)ظا(جا٣س)جتا٣س$$

مثال (٨) : إذا كان $\text{ص} = \text{قتاس ظتاس}$ أثبت ان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قتاس} - ٢\,\text{قتا}^{٣}\text{س}$

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قتاس} \times {}^{-}\text{قتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتاس} \times {}^{-}\text{قتاس ظتاس}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + {}^{-}\text{قتاس ظتا}^{٢}\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + {}^{-}\text{قتاس}(\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١) = {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + {}^{-}\text{قتا}^{٣}\text{س} + \text{قتاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = {}^{-}٢\,\text{قتا}^{٣}\text{س} + \text{قتاس} = \text{قتاس} - ٢\,\text{قتا}^{٣}\text{س}$$

مثال(٩) : إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{جتاس}$ ، $\text{س} \in [{}^{-}٢\pi ، ٢\pi]$

جد مجموعة قيم س التي تجعل $\text{ن}''(\text{س}) = ٠$

الحل : $\text{ن}'(\text{س}) = \text{س} + \text{جاس}$

$$\text{ن}''(\text{س}) = ١ + \text{جتاس}$$

$$\text{ن}''(\text{س}) = ٠ \longrightarrow \text{جتاس} = {}^{-}١$$

$$\longrightarrow \text{س} = {}^{-}\pi ، \pi$$

١	٠	١-	٠	١	٠	١-	٠	١
${}^{-}٢\pi$	$\frac{{}^{-}٣\pi}{٢}$	${}^{-}\pi$	$\frac{{}^{-}\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π

مثال (١٠) : إذا كانت $\text{ص} = \text{ظاس}$ ، س زاوية حادة ، أثبت أن :

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\text{ص}(١ + \text{ص}^{٢})$$

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\,\text{ظاس}(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\text{ص}(١ + \text{ص}^{٢})$$ وهو المطلوب

مثال (١١) : إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ، أثبت أن : $\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}' + \text{ص} = ٠$

الحل :

$$\text{ص}' = \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{\text{س}^{٢}\,(\text{س} \times {}^{-}\text{جاس} + \text{جتاس} - \text{جتاس}) - (\text{س جتاس} - \text{جاس}) \times ٢\text{س}}{\text{س}^{٤}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{{}^{-}\text{س}^{٣}\,\text{جاس} - ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س جاس}}{\text{س}^{٤}}$$

$$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}' + \text{ص} = \frac{{}^{-}\text{س}^{٣}\,\text{جاس} - ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س جاس}}{\text{س}^{٤}} + \frac{٢}{\text{س}}\left(\frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٢}}\right) + \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}' + \text{ص} = \frac{{}^{-}\text{س}^{٣}\,\text{جاس} - ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س جاس}}{\text{س}^{٤}} + \frac{٢\text{س جتاس} - ٢\,\text{جاس}}{\text{س}^{٣}} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}' + \text{ص} = \frac{{}^{-}\text{س}^{٣}\,\text{جاس} - ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س جاس}}{\text{س}^{٤}} + \frac{٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} - ٢\text{س جاس}}{\text{س}^{٤}} + \frac{\text{س}^{٣}\,\text{جاس}}{\text{س}^{٤}}$$

$$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}' + \text{ص} = \frac{{}^{-}\text{س}^{٣}\,\text{جاس} - ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س جاس} + ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} - ٢\text{س جاس} + \text{س}^{٣}\,\text{جاس}}{\text{س}^{٤}}$$

$$\text{ص}'' + \frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}' + \text{ص} = \frac{{}^{-}\text{س}^{٣}\,\text{جاس} - ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س جاس} + ٢\text{س}^{٢}\,\text{جتاس} - ٢\text{س جاس} + \text{س}^{٣}\,\text{جاس}}{\text{س}^{٤}} = \frac{٠}{\text{س}^{٤}} = ٠$$