الوحدة الرابعة : تحويلات لابلاس

سوف نتناول في هذه الوحدة (٣) موضوعات :

١) تحويل لابلاس (للاقترانات البسيطة والمشتقة الأولى والثانية)

٢) معكوس لابلاس

٣) حل معادلات تفاضلية ذات معاملات ثابتة باستخدام تحويل لابلاس.

تحويلات لابلاس :

هي عملية من عمليات التحويلات مرتبطة بالتكامل ، حيث تحول الاقتران من مجال الى اخر (تحول الاقتران من مجال التردد الى مجال الزمن) ، وأهميتها تكمن في حل المعادلات التفاضلية عن طريق تحويلها الى معادلات جبرية.

إذا رمزنا لأي اقتران في مجال الزمن بـ ق (ز)

والاقتران في محال التردد بـ ق (ت)

فإنه يمكننا تعريف تحويل لابلاس كالآتي :

$$\text{ق}(\text{ز}) = \int_{0}^{\infty} \text{ق}(\text{ت})\left(\text{هـ}^{-\text{ت}\,\text{ز}}\right)\,\text{ء}\text{ز}$$

<u>مثال (١)</u> : لتحويل الاقتران الثابت ق(ت) = جـ باستخدام لابلاس إلى اقتران بمتغير الزمن

$$\text{ق}(\text{ز}) = \int_{0}^{\infty} \text{جـ}\left(\text{هـ}^{-\text{ت}\,\text{ز}}\right)\,\text{ء}\text{ز} = \text{جـ}\left(\frac{\text{هـ}^{-\text{ت}\,\text{ز}}}{-\text{ز}}\right)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \left(\text{جـ} \times \frac{\text{هـ}^{-\infty}}{-\text{ز}}\right) - \left(\text{جـ} \times \frac{\text{هـ}^{0}}{-\text{ز}}\right) = \text{جـ} \times ٠ - \text{جـ} \times \frac{١}{-\text{ز}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ز}}$$

مثال (٢) : جد تحويل لابلاس للاقتران $ق(ت) = هـ^{-أت}$

الحل : $ق(ز) = \int_{٠}^{\infty} (هـ^{-أت} \times هـ^{-ت ز}) ء ز = \int_{٠}^{\infty} (هـ^{-(ت+أ) ز}) ء ز$

$$ق(ز) = \left(\frac{هـ^{-(ز+أ)ت}}{-(ز+أ)}\right)\Bigg|_{٠}^{\infty} = ٠ - \frac{١}{-(ز+أ)} = \frac{١}{ز+أ}$$

ومع تكرار تطبيق تحويل لابلاس لبعض الاقترانات الأساسية البسيطة تم استنتاج القوانين الآتية التي يمكن اعتمادها مباشرة كقوانين بتحويلات لابلاس دون اللجوء لتعريف لابلاس باستخدام التكامل .

	ق (ت)	تحويل لابلاس	ق(ز)	
١)	جـ	$\longrightarrow$	$\frac{جـ}{ز}$	
٢)	$هـ^{\mp أت}$	$\longrightarrow$	$\frac{١}{ز \pm أ}$	
٣)	$جـ هـ^{\mp أت}$	$\longrightarrow$	$\frac{جـ}{ز \pm أ}$	
٤)	ت	$\longrightarrow$	$\frac{١}{ز^{٢}}$	
٥)	$ت^{٢}$	$\longrightarrow$	$\frac{٢}{ز^{٣}}$	
٦)	$ت^{ن}$	$\longrightarrow$	$\frac{ن!}{ز^{ن+١}}$	**(حيث ن عدد صحيح موجب)**

٧) $\text{جا}(\text{أت}) \longleftarrow \frac{\text{أ}}{\text{ز}^{٢}+\text{أ}^{٢}}$

٨) $\text{جتا}(\text{أت}) \longleftarrow \frac{\text{ز}}{\text{ز}^{٢}+\text{أ}^{٢}}$

وبناءً على ما تقدم يمكننا تحويل الاقتران في مجال التردد (ت) الى اقتران في مجال الزمن ق (ز) باستخدام تلك القوانين.

<u>مثال (٣)</u> : جد تحويل لابلاس للاقتران $\text{ق}(\text{ت}) = \text{ت}^{٢} + \text{جا}(٤\text{ت}) + ٣\text{هـ}^{٢\text{ت}}$

<u>الحل</u> : $\text{ق}(\text{ز}) = \frac{٢}{\text{ز}^{٣}} + \frac{٤}{\text{ز}^{٢}+١٦} + \frac{٣}{\text{ز}-٢}$

<u>مثال (٤)</u> : جد تحويل لابلاس للاقتران $\text{ق}(\text{ت}) = (\text{ت}+١)^{٢}$

<u>الحل</u> : $\text{ق}(\text{ت}) = (\text{ت}+١)^{٢} = \text{ت}^{٢} + ٢\text{ت} + ١$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{٢}{\text{ز}^{٣}} + ٢ \times \frac{١}{\text{ز}^{٢}} + \frac{١}{\text{ز}}$$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{٢}{\text{ز}^{٣}} + \frac{٢}{\text{ز}^{٢}} + \frac{١}{\text{ز}}$$

<u>مثال (٥)</u> : جد تحويل لابلاس للاقتران $\text{ق}(\text{ت}) = \text{جا}^{٢}(\text{ت})$

<u>الحل</u> : $\text{ق}(\text{ت}) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}(٢\text{ت})$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ز}} - \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ز}}{\text{ز}^{٢}+٤}\right)$$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{١}{٢\text{ز}} - \frac{\text{ز}}{٢(\text{ز}^{٢}+٤)}$$

مثال (٦) : جد تحويل لابلاس للاقتران $\text{ق}(\text{ت})=\text{جا}\left(\text{ت}+\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل :

$$\text{ق}(\text{ت}) = \text{جا ت جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{جتا ت جا}\frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ق}(\text{ت}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{جا ت} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{جتا ت}$$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}\left(\frac{١}{\text{ز}^{٢}+١}\right) + \frac{١}{\sqrt{٢}}\left(\frac{\text{ز}}{\text{ز}^{٢}+١}\right)$$

مثال (٧) : جد تحويل لابلاس للاقتران $\text{ق}(\text{ت})=\text{جا}(\text{ت})\text{جتا}(\text{ت})$

الحل :

$$\text{ق}(\text{ت}) = \frac{١}{٢}\text{جا}(٢\text{ت})$$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{\text{ز}^{٢}+٤}\right) = \frac{١}{\text{ز}^{٢}+٤}$$

مثال (٨) : جد تحويل لابلاس للاقتران $\text{ق}(\text{ت})=\text{جا}(٣\text{ت})\text{جتا}(\text{ت})$

الحل :

$$\text{ق}(\text{ت}) = \frac{١}{٢}\left(\text{جا}(٣\text{ت}+\text{ت})+\text{جا}(٣\text{ت}-\text{ت})\right)$$

$$\text{ق}(\text{ت}) = \frac{١}{٢}\left(\text{جا}(٤\text{ت})+\text{جا}(٢\text{ت})\right)$$

$$\text{ق}(\text{ز}) = \frac{١}{٢}\left(\frac{٤}{\text{ز}^{٢}+١٦}+\frac{٢}{\text{ز}^{٢}+٤}\right) = \frac{٢}{\text{ز}^{٢}+١٦}+\frac{١}{\text{ز}^{٢}+٤}$$

سؤال : جد تحويل لابلاس لكل من الاقترانات الآتية :

١) $\text{ق}(\text{ت})=\text{ت}^{٣} - ٢\text{هـ}^{٤\text{ت}}$

٢) $\text{ق}(\text{ت})=\text{جا}(٢\text{ت})\text{جتا}(٣\text{ت})$