الاقترانات المتزايدة والمتناقصة :

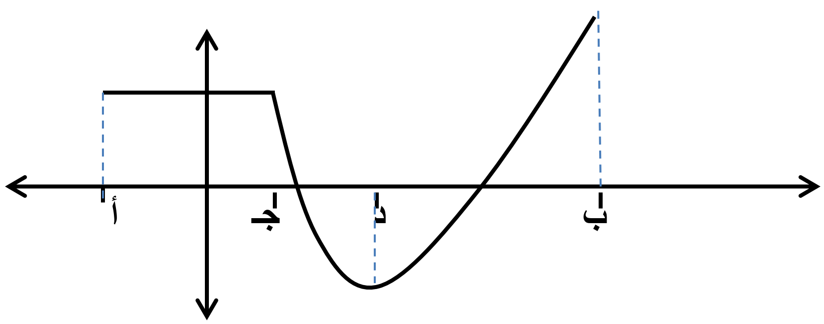
تعريف: يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [أ ، ب] ، $س_1 ، س_2 \in [أ، ب]$:

١) متزايداً في الفترة [أ ، ب] إذا تحقق الشرط : عندما $س_1 < س_2$ ، فإن $ق(س_1) < ق(س_2)$

٢) متناقصاً في الفترة [أ ، ب] إذا تحقق الشرط : عندما $س_1 < س_2$ ، فإن $ق(س_1) > ق(س_2)$

٣) ثابتاً في الفترة [أ ، ب] إذا تحقق الشرط : عندما $س_1 < س_2$ ، فإن $ق(س_1) = ق(س_2)$

مثال (١) : في الشكل المجاور ، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايدا، أو متناقصاً أو ثابتاً.



الحل : يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في الفترة [أ ، جـ]

يكون منحنى الاقتران ق(س) متناقصاً في الفترة [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س) .

يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترة [د ، ب] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تزيد قيمة ق(س).

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الاولى:

نظرية : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق في $]أ، ب[$ فإن منحنى :

١) الاقتران ق(س) يكون متزايداً في الفترة [أ ، ب] اذا كانت $ق'(س) > ٠ ، \forall س \in]أ، ب[$

٢) الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في الفترة [أ ، ب] اذا كانت $ق'(س) < ٠ ، \forall س \in]أ، ب[$

٣) الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في الفترة [أ ، ب] اذا كانت $ق'(س) = ٠$ ، $\forall س \in]أ،ب[$

<u>مثال (٢)</u> : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن :

$$ق'(س) = (س^{٢} - ١)(س + ٢) \quad ، \quad س \in ح$$

<u>الحل</u> : نبحث في اشارة $ق'(س)$

$$ق'(س) = (س^{٢} - ١)(س + ٢) = ٠$$

$\longleftarrow$ $(س - ١)(س + ١)(س + ٢) = ٠$ $\longleftarrow$ س = ١ ، -١ ، -٢

سلوك الاقتران

إشارة مشتقة الاقتران ---------------- ٠ ++++++ ٠ ------------------- ٠ ++++++++++

-٢   -١   ١

يكون منحنى الاقتران متناقصاً في $]-\infty ، -٢]$ ، $[-١ ، ١]$

يكون منحنى الاقتران متزايداً في $[-٢ ، -١]$ ، $[١ ، \infty[$

<u>مثال (٣)</u> : عين فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = س^{٤} + ٤س + ٥$

<u>الحل</u> : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود

$$ق'(س) = ٤س^{٣} + ٤$$

نجعل $ق'(س) = ٠$ $\longleftarrow$ $٤س^{٣} + ٤ = ٠$ $\longleftarrow$ $٤س^{٣} = -٤$

$\longleftarrow$ $س^{٣} = -١$ $\longleftarrow$ $س = -١$

سلوك الاقتران

إشارة مشتقة الاقتران ----------------------------- ٠ +++++++++++ +++++++++++

-١

يكون ق(س) متناقصاً في الفترة $]-\infty ، -١[$

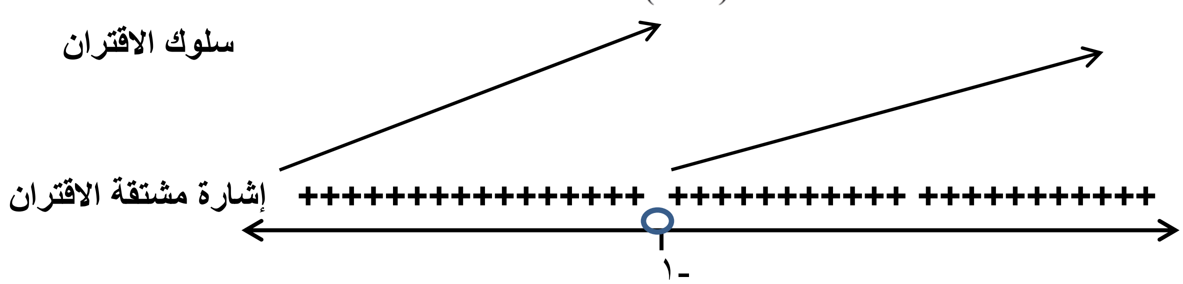
يكون ق(س) متزايداً في الفترة $[-١ ، \infty[$

مثال(٤) : عين فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}-١}{\text{س}+١}$ ، $\text{س} \neq -١$

الحل : ق(س) متصل على ح – { -١ } لأنه اقتران نسبي وكل من البسط والمقام كثيرا حدود ، واستثناء س= -١ لأنها صفر المقام

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}+١)\times١-(\text{س}-١)\times١}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{\text{س}+١-\text{س}+١}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{٢}{(\text{س}+١)^{٢}}$$

نجعل $\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \longrightarrow \frac{٢}{(\text{س}+١)^{٢}} = ٠ \longrightarrow$ لا يوجد س بحيث $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$

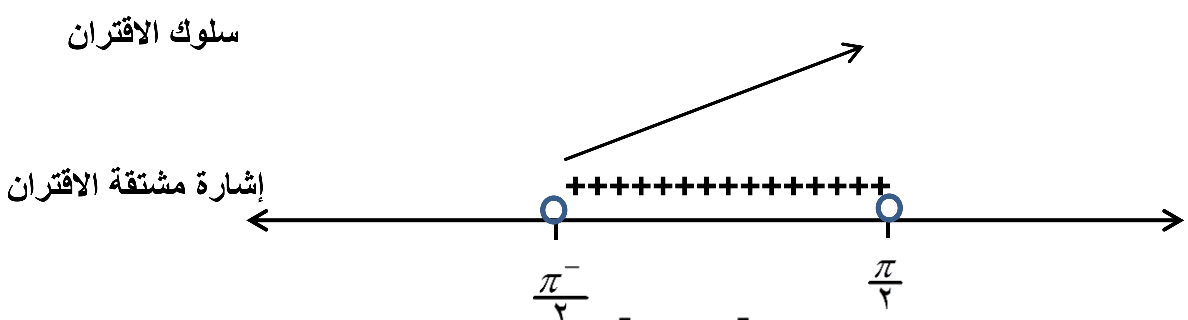


يكون منحنى ق(س) متزايدا في الفترتين $]-\infty ، -١[$ ، $]-١ ، \infty[$

مثال (٥) : أثبت أن منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + \text{ظا س}$ اقتران متزايداً في الفترة $]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

الحل : ق(س) متصل على الفترة $]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$ لأنه مجموع كثير حدود و ظا س

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢ + \text{قا}^{٢}\text{س} > ٠$$



يكون منحنى ق(س) متزايدا في الفترة $]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

مثال (٦) : عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) =

$$\begin{cases} \text{جاس} ، & ٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢} \\ \text{س+جتاس} ، & \frac{\pi}{٢} < \text{س} \le \pi \end{cases}$$

في الفترة $[٠، \pi]$

الحل : ق(س) متصل في $[٠، \pi]$ ما عدا عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتاس} ، & ٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢} \\ ١-\text{جاس} ، & \frac{\pi}{٢} < \text{س} < \pi \\ \text{غير موجودة} ، & \text{س} = \frac{\pi}{٢}، ٠، \pi \end{cases}$$

$\text{ق}'(\frac{\pi}{٢})$ غير موجودة لأن ق(س) غير متصل عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

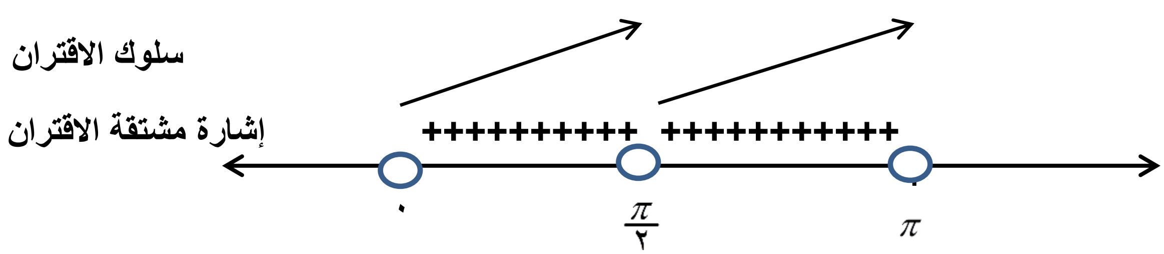
$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \longleftarrow \text{جتاس} = ٠ \longleftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢}$

لكن $\frac{\pi}{٢} \notin]٠، \frac{\pi}{٢}[$

$\longleftarrow ١-\text{جاس} = ٠ \longleftarrow \text{جاس} = ١ \longleftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢}$

لكن $\frac{\pi}{٢} \notin]\frac{\pi}{٢}، \pi[$

$\longleftarrow \text{ق}'(\text{س}) \ne ٠$ في الفترة $]٠، \pi[$



ويكون ق(س) متزايداً في الفترتين $[٠، \frac{\pi}{٢})$ ، $(\frac{\pi}{٢}، \pi]$

مثال (٧) : إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$، $\text{هـ}'(\text{س}) = -\text{ق}(\text{س})$

حدد فترات التزايد والتناقص الاقتران ك(س) ، علماً بأن $\text{ك}(\text{س}) = \text{ق}^٢(\text{س}) + \text{هـ}^٢(\text{س}) + \text{س}^٢$

الحل : ك(س) متصلا لأنه مجموع تربيع اقترانين متصلين وكثير حدود .

$$\text{ك}'(\text{س}) = ٢\text{ق}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{هـ}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س}) + ٢\text{س}$$

$$\text{ك}'(\text{س}) = ٢\text{ق}(\text{س})\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{هـ}(\text{س}) \times -\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}$$

$$\text{ك}'(\text{س}) = ٢\text{س}$$

نجعل ك/(س) = ٠ ⟵ ٢س = ٠ ⟵ س = ٠

سلوك الاقتران ↘ ↗

إشارة مشتقة الاقتران ---------------------------- ٠ +++++++++++ +++++++++++

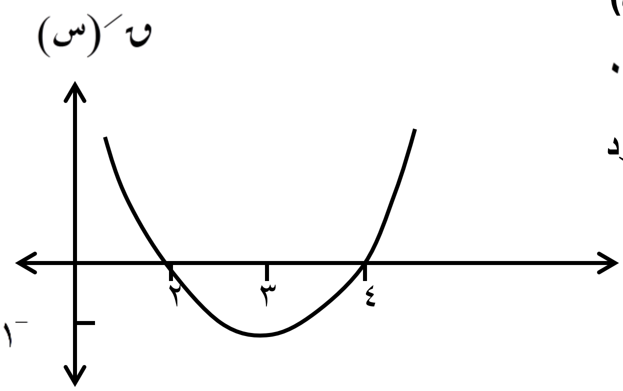
٠

يكون ك(س) متزايداً في الفترة [٠،∞) ومتناقصاً في الفترة (⁻∞،٠]

<u>مثال (٨)</u> : يمثل الشكل المجاور منحنى ق/(س) للاقتران ق(س) كثير حدود .

١) عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢) أوجد مجموعة حل المتباينة ق//(س) < ٠



<u>الحل</u> : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق على ح لأنه كثير حدود

سلوك الاقتران ↗ ↘ ↗

إشارة مشتقة الاقتران ++++++++++++ ٠ --------------------------- ٠ +++++++++++

٢ ٤

ق(س) متزايداً في الفترة]⁻∞،٢]،[٤،∞[

ق(س) متناقصاً في الفترة [٢،٤]

٢) ق//(س) < ٠ عندما ق/(س) متناقص أي على الفترة]⁻∞،٣]

ق//(س) > ٠ عندما ق/(س) متزايد أي على الفترة [٣،∞[

مجموعة حل المتباينة ق//(س) < ٠ هي]⁻∞،٣[

الفترة مفتوحة من جهة ٣ لأن المتباينة بدون مساواة