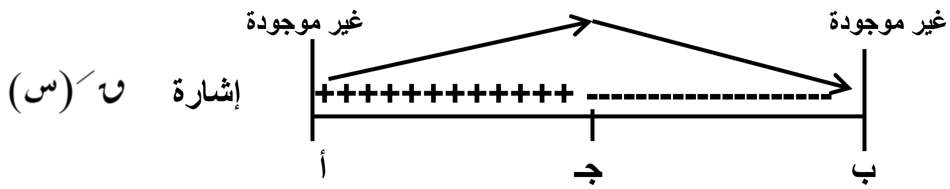
اختبار المشتقة الاولى لتعيين القيم القصوى :

إذا كان ق(س) اقترانا متصلا في الفترة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) ،

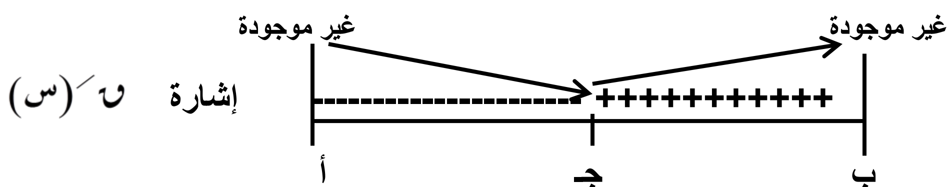
جـ ∈]أ،ب[فإنه:

١) إذا كان ق′(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ، وكان ق′(س) < ٠ عندما جـ < س < ب



فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

٢) إذا كان ق′(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ، وكان ق′(س) > ٠ عندما جـ < س < ب



فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

مثال(١) : جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س ، س ∈ [−٣،٣]

الحل : ق′(س) = ٣س^{٢} − ٣

ق′(س) = ٠ ⟵ ٣س^{٢} − ٣ = ٠ ⟵ ٣س^{٢} = ٣

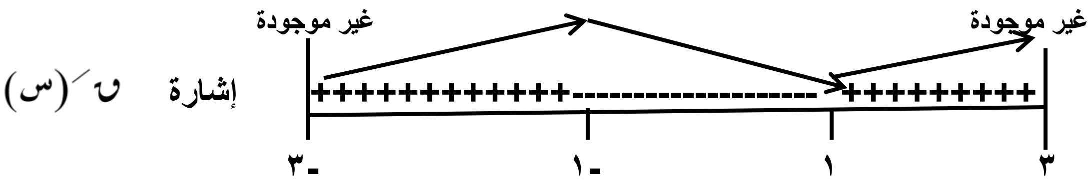
⟵ س^{٢} = ١ ⟵ س = ±١ ∈ المجال

ق′(س) غير موجودة عند الأطراف ⟵ عند س = ٣ ، -٣

ق(١) = ١-٣ = -٢ ق(٣) = ٢٧ -٩ = ١٨

ق(-١) = -١ + ٣ = ٢ ق(-٣) = -٢٧ + ٩ = -١٨

النقط الحرجة : (١ ، -٢) ، (-١ ، ٢) ، (٣ ، ١٨) ، (-٣ ، -١٨)



عند س = ٣ ، يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(٣) = ١٨ وهي قيمة عظمى محلية و مطلقة

عند س = -١ ، يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(-١) = ٢

عند س = -٣ ، يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(-٣) = -١٨ وهي قيمة صغرى محلية و مطلقة

عند س = ١ ، يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(١) = -٢

مثال(٢) : جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

الحل : المجال هو ح ⟵ لا يوجد أطراف

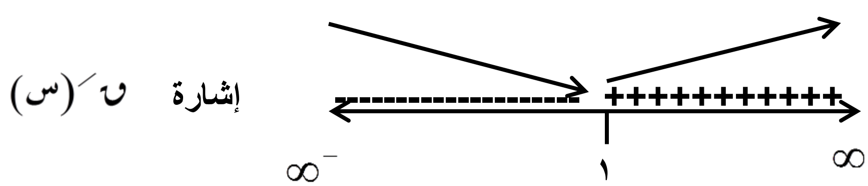
ق⁄(س) = ٢س − ٢

ق⁄(س) = ٠ ⟵ ٢س − ٢ = ٠ ⟵ ٢س = ٢

⟵ س = ١ ∈ ع

ق(١) = ١-٢-٣ = -٤

النقط الحرجة : (١ ، -٤)



عند س = ١ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(١) = -٤

ملاحظة : (إذا كان عند ∞، −∞ قيمة عظمى ، تلغي القيمة العظمى المطلقة عند أي نقطة اخرى)

(إذا كان عند ∞، −∞ قيمة صغرى ، تلغي القيمة الصغرى المطلقة عند أي نقطة اخرى)

<u>مثال(٣)</u> : جد القيم القصوى (ان وجدت) للاقتران ق(س) = جتاس − جاس ، س ∈ $[\text{٠}، \pi]$

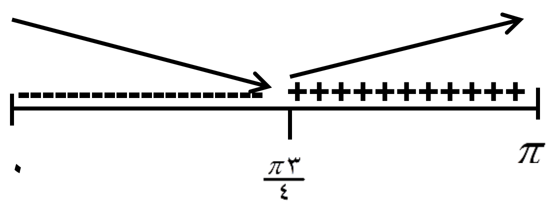
<u>الحل</u> : ق′(س) = −جاس − جتاس = ⁻(جاس + جتاس)

ق′(س) = ٠ ⟵ ⁻(جاس + جتاس) = ٠ ⟵ جاس = ⁻جتاس

⟵ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{⁻جتاس}}{\text{جتاس}}$ ⟵ ظاس = ⁻١ ⟵ س = ١٣٥° = $\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}$

ق′(س) **غير موجودة عند الأطراف** ⟵ س = ٠ ، س = π

ق(٠) = ١ ، ق(π) = ⁻١ ، ق($\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}$) = $\frac{\text{⁻١}}{\sqrt{\text{٢}}} - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{⁻٢}}{\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{⁻٢}\times\sqrt{\text{٢}}}{\sqrt{\text{٢}}\times\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{⁻٢}\times\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}} = \text{⁻}\sqrt{\text{٢}}$



إشارة ق′(س)

يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند س= ٠ ، وقيمتها ق(٠) = ١

يوجد قيمة عظمى محلية عند س = π **، وقيمتها** ق(π) = ⁻١

يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = $\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}$ **وقيمتها** ق($\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}$) = ⁻$\sqrt{\text{٢}}$

<u>مثال(٤)</u> : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س$^{\text{٢}}$ − ٦س + ٥ ، س ∈ [⁻٣، ١]

<u>الحل</u> : ق′(س) = ٢س − ٦

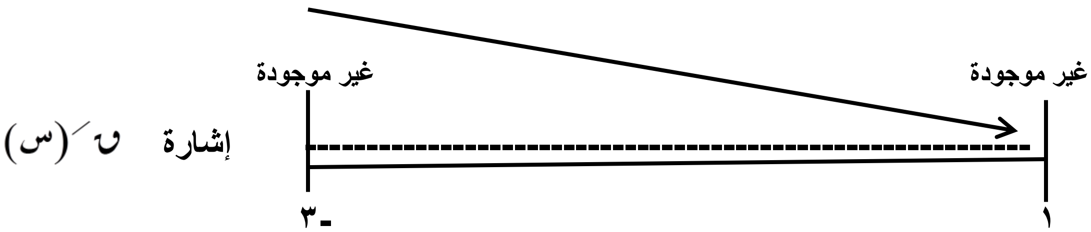
ق′(س) = ٠ ⟵ ٢س − ٦ = ٠ ⟵ ٢س = ٦

⟵ س = ٣ ∉ [⁻٣، ١] ⟵ ليست حرجة

ق′(س) **غير موجودة عند الأطراف ⟵ عند س = -٣ ، ١**

ق(١) = ١-٦+٥ = ٠ ق(-٣) = ٩ +١٨ + ٥ = ٣٢

النقط الحرجة : (١ ، ٠) ، (-٣ ، ٣٢)

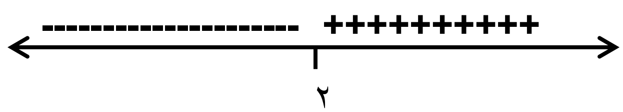


عند س = -٣ ، يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وقيمتها ق(-٣) = ٣٢

عند س = ١ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(١) = ٠

مثال(٥) : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = س^{٢}\,|س-٢|$ ، $س \in ح$

الحل : اعادة تعريف | س -٢ | ⟵ س – ٢ = ٠ ⟵ س = ٢



$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢}(س-٢) & ، س \geq ٢ \\ س^{٢}(٢-س) & ، س < ٢ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}-٢س^{٢} & ، س \geq ٢ \\ ٢س^{٢}-س^{٣} & ، س < ٢ \end{cases}$$

$$ق^{\prime}(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}-٤س & ، س > ٢ \\ ٤س-٣س^{٢} & ، س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ \end{cases}$$

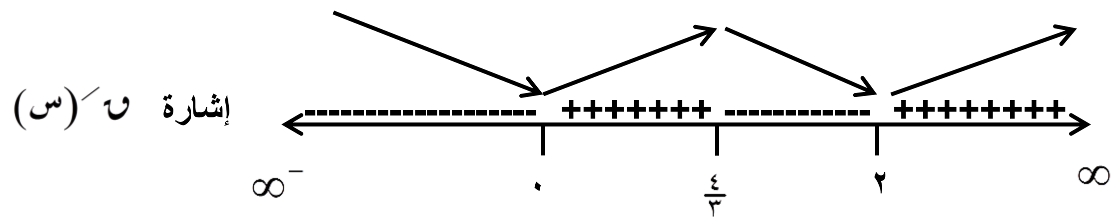
$$ق^{\prime}(٢)^{+} = ٤ \quad ، \quad ق^{\prime}(٢)^{-} = {}^{-}٤ \longrightarrow ق^{\prime}(٢) \ \text{غير موجودة}$$

$$ق^{\prime}(س) = ٠ \longrightarrow ٣س^{٢}-٤س = ٠ \longrightarrow س(٣س-٤) = ٠ \longrightarrow س = ٠ \notin]٢،\infty[$$

$$\longrightarrow س = \tfrac{٤}{٣} \notin]٢،\infty[$$

ق'(س) = ٠ ⟵ ٤س − ٣س^{٢} = ٠ ⟵ س(٤−٣س) = ٠ ⟵ س = ٠ ∈]$^{-}$∞،٢]

⟵ س = $\frac{٤}{٣}$ ∈]$^{-}$∞،٢]



عند س = ٠ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٠) = ٠

عند س = $\frac{٤}{٣}$ ، يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(س) = $\frac{١٦}{٩} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٣٢}{٢٧}$

عند س = ٢ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٢) = ٠

<u>مثال(٦)</u> : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٣} − $\frac{س^{٤}}{٤}$ ، س ∈ [$^{-}$١،٤]

<u>الحل</u> : ق'(س) **غير موجودة عند الأطراف** ⟵ **عند س = -١ ، س = ٤**

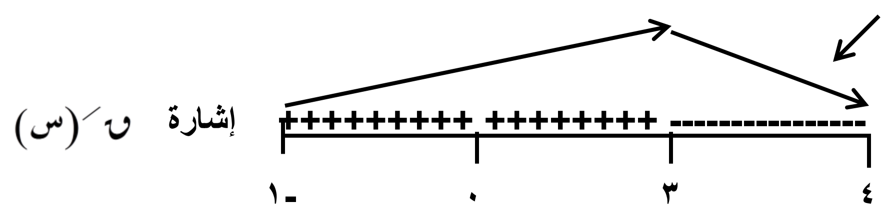
ق'(س) = ٣س^{٢} − س^{٣}

ق'(س) = ٠ ⟵ ٣س^{٢} − س^{٣} = ٠ ⟵ س^{٢}(٣ − س) = ٠

⟵ س = ٠ ∈ [$^{-}$١،٤]

⟵ س = ٣ ∈ [$^{-}$١،٤]

ق($\frac{٧}{٢}$) = $\frac{-٤٩}{٨}$



عند س = -١ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(-١) = $\frac{-٥}{٤}$

عند س = ٣ ، يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٣) = $\frac{٢٧}{٤}$

عند س = ٤ ، يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(٤) = ٠

مثال(٧) : جد القيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $ق(س) = \sqrt{\text{جاس}}$ ، $س \in [٠ ، \pi]$

الحل : $ق^{\prime}(س)$ غير موجودة عند الأطراف $\longleftarrow$ عند س = ٠ ، $س = \pi$

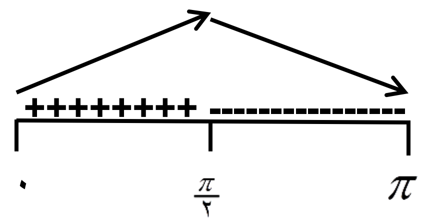
$ق^{\prime}(س) = \frac{\text{جتاس}}{٢\sqrt{\text{جاس}}}$

$ق^{\prime}(س) = ٠ \longleftarrow \text{جتاس} = ٠ \longleftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

$ق^{\prime}(س)$ غير موجودة عند أصفار المقام $\longleftarrow ٢\sqrt{\text{جاس}} = ٠$

$\longleftarrow \text{جاس} = ٠ \longleftarrow س = ٠ ، \pi$

إشارة $ق^{\prime}(س)$



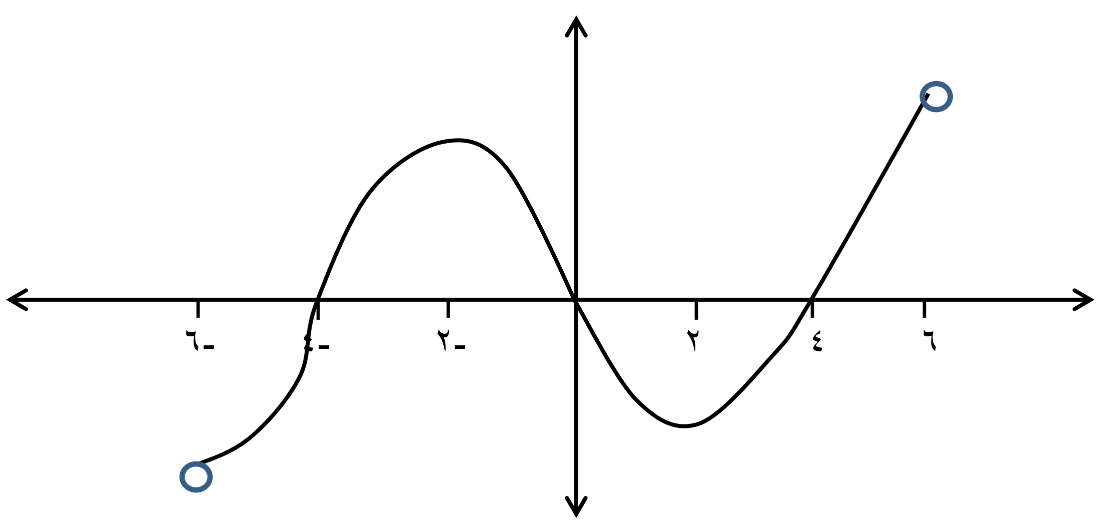
عند س = ٠ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها ق(٠) = ٠

عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ، يوجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وقيمتها $ق(\frac{\pi}{٢}) = ١$

عند $س = \pi$ ، يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وقيمتها $ق(\pi) = ٠$

مثال(٨) : اعتماداً على الشكل أدناه الذي يمثل منحنى $ق^{\prime}(س)$ ، جد قيم س التي يكون عندها نقط حرجة ، وفترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) والقيم القصوى المحلية .

$ق^{\prime}(س)$

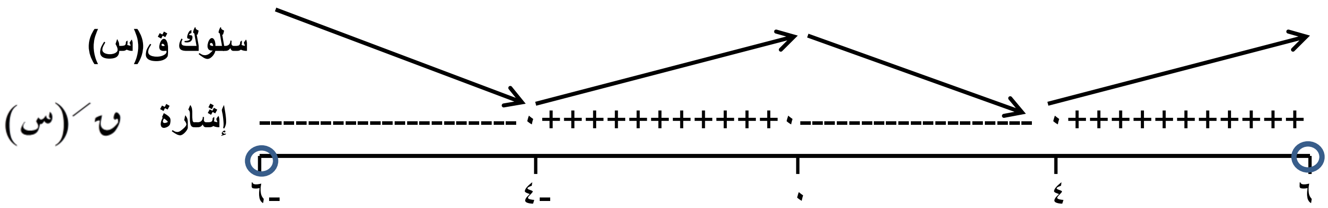


النقاط الحرجة : ق′(س) غير موجودة عند الأطراف : عند س = ـ٦ ، عند س = ٦

ق′(س) = ٠ عند نقاط التقاطع مع محور السينات : عند س = ٤ ، س=ـ٤ ، س = ٠

النقط الحرجة : (ـ٦ ، ق(ـ٦)) ، (٦ ، ق(٦)) ، (٤ ، ق(٤)) ، (ـ٤ ، ق(ـ٤)) ، (٠ ، ق(٠))

فترات التزايد الناقص للاقتران ق(س) : نبحث اشارة ق′(س)



ق(س) متزايداً في الفترات : [ـ٤ ، ٠] ، [٤ ، ٦]

ق(س) متناقصاً في الفترات : [ـ٦ ، ـ٤] ، [٠ ، ٤]

القيم القصوى المحلية :

عند س = ـ٦ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(ـ٦)

عند س = ـ٤ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(ـ٤)

عند س = ٠ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(٠)

عند س = ٤ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(٤)

عند س = ٦ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(٦)

اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى :

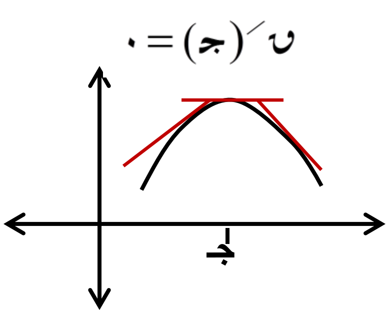
نظرية : إذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوي جـ ، وكان ق′(جـ) = ٠

فإنه :

١) إذا كان ق″(جـ) < ٠ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية

٢) إذا كان ق″(جـ) > ٠ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية.

يمثل الشكل التالي منحنى ق(س) حيث ، حيث ق′(جـ) = ٠ ، أي أن المماس عند جـ أفقياً ، ق″(جـ) < ٠ (لأن المماسات في جوار جـ تقع فوق المنحنى ، وهذا يعني أن ق(جـ) قيمة عظمى محلية.



مثال(٩) : **باستخدام اختبار المشتقة الثانية ، جد القيم العظمى والصغرى (ان وجدت) للاقتران**

ق(س) = ٢س^٣ − ٦س

الحل: ق′(س) = ٦س^٢ − ٦

ق′(س) = ٠ ⟵ ٦س^٢ − ٦ = ٠ ⟵ س^٢ − ١ = ٠ ⟵ **س = -١ ، ١**

ق″(س) = ١٢س

ق″(١) = ١٢ > ٠ ⟵ **يوجد عند س = ١ قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(١) = -٤**

ق″(-١) = -١٢ < ٠ ⟵ **يوجد عند س = -١ قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(-١) = ٤**

> **ملاحظة** : إذا كان ق″(جـ) = ٠ أو غير موجودة ، فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل وعندها نعود الى اختبار المشتقة الاولى

مثال(١٠) : إذا كان ق(س) = س^٤ ، س ∈ ح أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران.

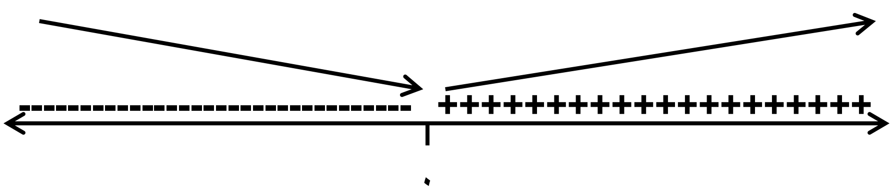
الحل : ق′(س) = ٤س^٣

ق′(س) = ٠ ⟵ ٤س^٣ = ٠ ⟵ **س = ٠**

ق″(س) = ١٢س^٢

ق″(٠) = ٠ ⟵ **اختبار المشتقة الثانية يفشل ⟵ نعود لاختبار المشتقة الأولى**

إشارة ق′(س)



يوجد عند س = ٠ قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(٠) = ٠