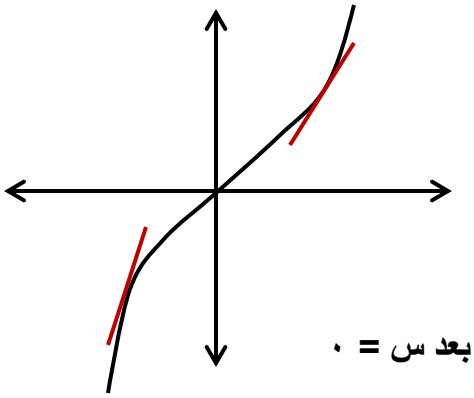


التقعر ونقطة الانعطاف:

بالرجوع للشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س) = س^{٣}$

* الاقتران متزايد على ح

* اتجاه تقوس المنحنى قبل س = ٠ ، يختلف عن اتجاه تقوس المنحنى بعد س = ٠

(عندما س < ٠ ، المنحنى يقع تحت جميع مماساته ، وعندما س > ٠ المنحنى يقع فوق جميع مماساته)

تعريف : يُقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعر للأعلى في فترة من مجاله، إذا كان دائماً فوق جميع مماساته في هذه الفترة .

وأنه مقعر للأسفل ، إذا كان دائماً تحت جميع مماساته في هذه الفترة .

نظرية: (اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية)

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] ، وكانت $ق'(س)$ ، $ق''(س)$ معرفين على $]أ،ب[$ ، فإنه :

١) إذا كانت $ق''(س) > ٠$ لجميع قيم $س \in]أ،ب[$ فان ق(س) يكون مقعراً للأعلى في الفترة [أ ، ب]

٢) إذا كانت $ق''(س) < ٠$ لجميع قيم $س \in]أ،ب[$ فان ق(س) يكون مقعراً للأسفل في الفترة [أ ، ب]

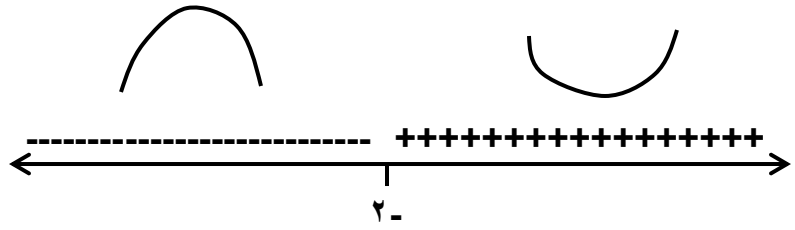
مثال(١) : إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} - ٢س - ٥$ ، عين الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) مقعراً للأعلى ، والفترات التي يكون فيها منحنى ق(س) مقعراً للأسفل

الحل : $ق'(س) = ٣س^{٢} + ١٢س - ٢$

$ق''(س) = ٦س + ١٢$

نبحث في اشارة $ق''(س)$ ⟵ ٦س + ١٢ = ٠ ⟵ ٦س = -١٢ ⟵ س = -٢

تقعر منحنى ق(س)



ن ″(س) > ٠ عندما س < -٢ ⟵ ق(س) مقعر للأسفل في الفترة $]-\infty ، -٢[$

ن ″(س) < ٠ عندما س > -٢ ⟵ ق(س) مقعر للأعلى في الفترة $]-٢ ، \infty[$

⟵ النقطة (-٢ ، ق(-٢)) = (-٢ ، ١٥) التي يغير عندها منحنى الاقتران اتجاه تقعره تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) .

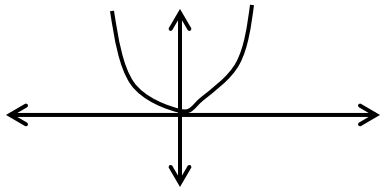
تعريف : (نقطة الانعطاف)

ليكن ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ ، تسمى النقطة (جـ ، ق(جـ)) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران إذا غير منحنى الاقتران ق(س) اتجاه تقعره عند النقطة جـ من أعلى الى أسفل أو بالعكس.

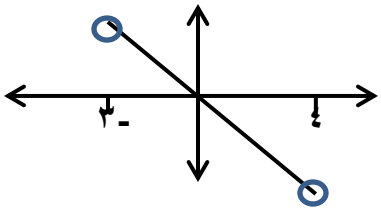
ملاحظة : عند نقطة الانعطاف (جـ ، ق(جـ)) تكون ن ″(جـ) = ٠ أو غير موجودة ، إلا أنه ليس شرطاً كافياً لوجود نقطة الانعطاف

مثال : ن(س) = س ^{٤} ⟵ ن ″(س) = ٢ ١ س ^{٢} ⟵ ٢ ١ س ^{٢} = ٠ ⟵ س = ٠

تحقق الشرط لكن النقطة (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) ليست نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) لأنه مقعر للأعلى دائما.



مثال(٢) : يمثل المنحنى التالي منحنى ن ″(س) للاقتران ق(س) المتصل على الفترة [-٣ ، ٤]



١) عين مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س)

٢) عين نقطة/ نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل : بما أن الشكل يوضح إشارة $ن''(س)$:

* $ن''(س) < ٠$ على الفترة $]-\infty ، ٠[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [-٣ ، ٠]

* $ن''(س) > ٠$ على الفترة $]٠ ، +\infty[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [٠ ، ٤]

* النقطة (٠ ، ق(٠)) هي نقطة الانعطاف لأن ق(س) متصل عند س = ٠ ويغير المنحنى اتجاه تقعره عندها .

مثال(٣) : إذا كان $ن(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، أوجد :

١) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق(س)

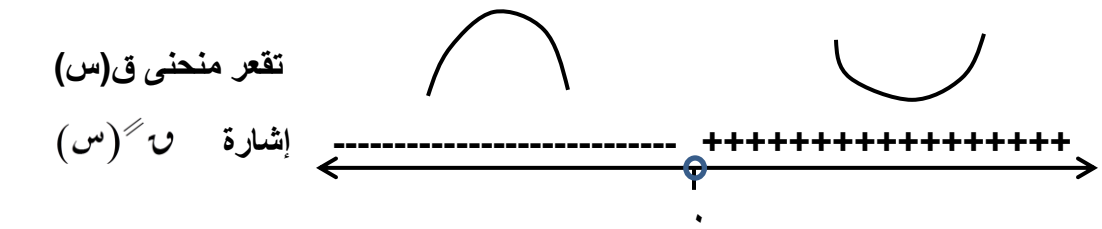
٢) نقطة / نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل : $ن'(س) = ١ + \frac{-١}{س^{٢}}$

$$ن''(س) = \frac{س^{٤} \times ٠ - (-١ \times ٢ س)}{س^{٤}} = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$$

$ن''(س) = ٠ \longleftarrow \frac{٢}{س^{٣}} = ٠$ ⟵ لا يوجد

$ن''(س)$ غير موجودة عندما المقام = ٠ ⟵ $س^{٣} = ٠$ ⟵ **س = ٠**



* $ن''(س) < ٠$ على الفترة $]-\infty ، ٠[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة $]-\infty ، ٠[$

* $ن''(س) > ٠$ على الفترة $]٠ ، +\infty[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة $]٠ ، +\infty[$

* الاقتران يغير تقعره عند س = ٠ ولكن ق(س) غير متصل عند س = ٠ لأنه ليس معرفا عندها

⟵ لا توجد نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال(٤) : إذا كان $ن(س) = س^{٣}(٤-س)$ ، $س \in ح$ ، **أوجد :**

١) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق(س) ٢) نقطة / نقط الانعطاف (إن وجدت)

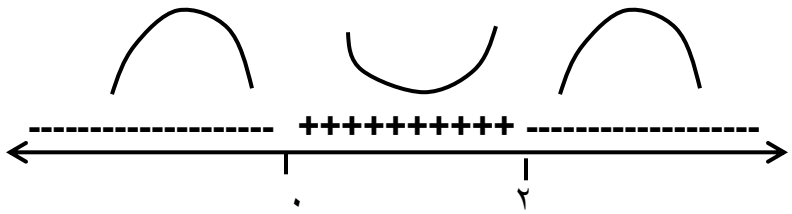
الحل: $ن(س) = ٤س^{٣} - س^{٤}$

$ن'(س) = ١٢ س^{٢} - ٤س^{٣}$

$ن''(س) = ٢٤س - ١٢ س^{٢}$

$ن''(س) = ٠$ ⟵ $٢٤س - ١٢ س^{٢} = ٠$ ⟵ $١٢ س(٢ - س) = ٠$

⟵ **س = ٠ ، س =٢**



* $ن''(س) > ٠$ **على الفترة** $]٢،٠[$ ⟵ **منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة** $[٢،٠]$
* $ن''(س) < ٠$ **على الفترة** $]-\infty،٠[$ ⟵ **منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة** $]-\infty،٠]$

وكذلك على الفترة $]٢،\infty[$ ⟵ **منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة** $[٢،\infty[$

* **النقطة (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)**

النقطة (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١٦) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال(٥) : إذا كان $ن(س) = س - جاس$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$ ، **أوجد :**

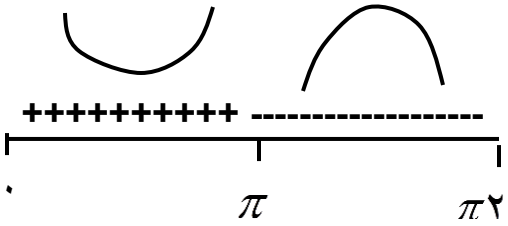
١) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق(س) ٢) نقطة / نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل: $ن'(س) = ١ - جتاس$

$ن''(س) = جاس$

$ن''(س) = ٠$ ⟵ $جاس = ٠$ ⟵ $س = ٠ ، \pi$

(اقتران الجيب موجب في الربع الاول والثاني وسالب في الربع الثالث والرابع)



* ن ״(س) < ٠ على الفترة]π،٠[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [π،٠]

* ن ״(س) > ٠ على الفترة]π٢،π[⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [π٢،π[

بما أن الاقتران متصل عند س = π ويغير اتجاه تقعره في جوارها ⟵

النقطة (π،π) = ((π)ن،π) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال (٦) : اذا كان ن(س) = $\frac{١}{٢}$س ٣ − $\frac{١}{٢}$س ٢ − ١٢س ، س ∈ [−٥،٥]

١) جد النقط الحرجة ٢) حدد فترات (مجالات) التزايد والتناقص

٣) حدد القيم القصوى (العظمى والصغرى) ٤) عين مجالات التقعر

٥) جد نقطة/ نقط الانعطاف (إن وجدت)

الحل : ن ״(س) = س ٢ − س − ١٢

ن ״(س) = ٠ ⟵ س ٢ − س − ١٢ = ٠ ⟵ (س − ٤)(س + ٣) = ٠

⟵ (س − ٤) = ٠ ⟵ س = ٤ ∈ [−٥،٥]

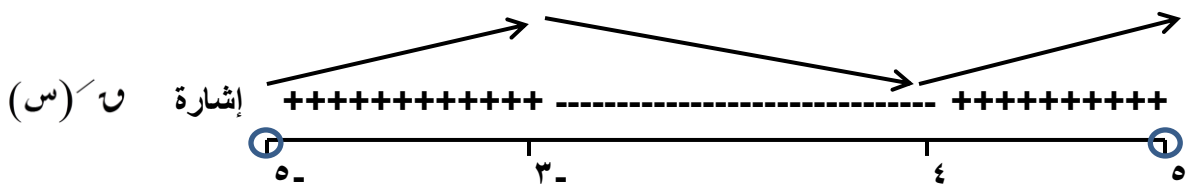
⟵ (س + ٣) = ٠ ⟵ س = −٣ ∈ [−٥،٥]

ن ״(س) غير موجودة عند الأطراف ⟵ س = -٥ ، ٥

١) النقط الحرجة : (-٥، ق(-٥)) ، (٥ ، ق(٥)) ، (٤ ، ق(٤)) ، (-٣ ، ق(-٣))

: $(-\frac{٣٥}{٦}،٥)$ ، $(\frac{١٨٥}{٦}-،٥)$ ، $(\frac{٢٠٤}{٦}-،٤)$ ، $(\frac{٤٥}{٢}-،٣)$

٢)



ق متزايد على الفترة [-٥ ، -٣] ، [٤ ، ٥]

ق متناقص على الفترة [-٣ ، ٤]

٣) يوجد للاقتران ق(س) قيم عظمى محلية ومطلقة عند س = -٣ وقيمتها ق(-٣) = $\frac{٤٥}{٢}$

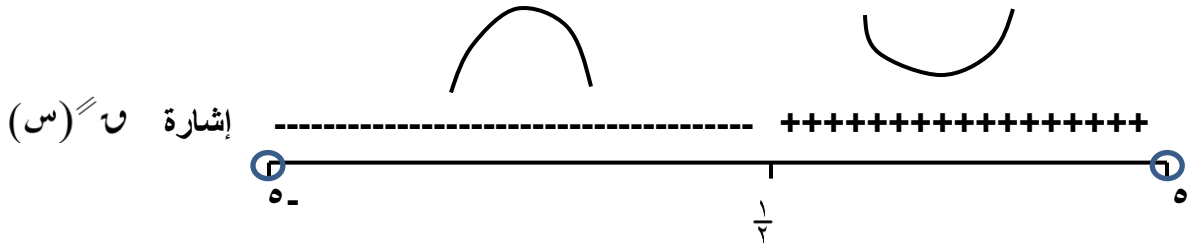
يوجد للاقتران ق(س) قيم عظمى محلية عند س = ٥ وقيمتها ق(٥) = $\frac{-١٨٥}{٦}$

يوجد للاقتران ق(س) قيم صغرى محلية ومطلقة عند س = ٤ وقيمتها ق(٤) = $\frac{-٢٠٨}{٦}$

يوجد للاقتران ق(س) قيم صغرى محلية عند س = -٥ وقيمتها ق(-٥) = $\frac{٣٥}{٦}$

٤) $ق''(س) = ٢س - ١$

$ق''(س) = ٠$ ⟵ $٢س - ١ = ٠$ ⟵ $٢س = ١$ ⟵ $س = \frac{١}{٢}$



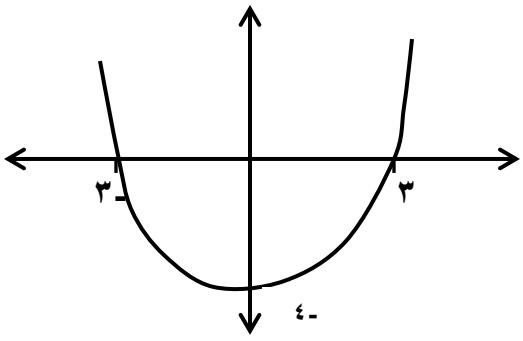
* $ق''(س) > ٠$ على الفترة $]\frac{١}{٢}، ٥[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة $[\frac{١}{٢}، ٥]$

* $ق''(س) < ٠$ على الفترة $]-٥، \frac{١}{٢}[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة $[-٥، \frac{١}{٢}]$

بما أن الاقتران متصل عند $س = \frac{١}{٢}$ ويغير اتجاه تقعره في جوارها ⟵

النقطة $(\frac{١}{٢}، ق(\frac{١}{٢})) = (\frac{١}{٢}، \frac{-١٤٦}{٢٤})$ نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

مثال (٧) : استخدم الشكل التالي الذي يمثل منحنى $ق''(س)$ لإيجاد ما يلي :



١) قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتران ق(س) .

٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

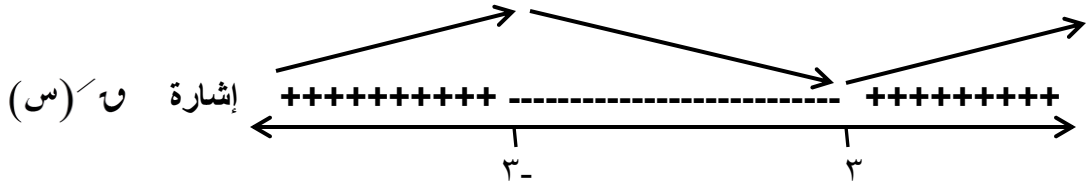
٣) نقط القيم القصوى للاقتران ق(س).

٤) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) .

٥) نقطة/ نقط الانعطاف للاقتران ق(س).

الحل : ١) $ن'(س) = ٠$ عند س = -٣ ، ٣ (نقط حرجة)

٢)



ق(س) متزايد على الفترة $]-\infty، -٣[$ ، $]٣، \infty[$

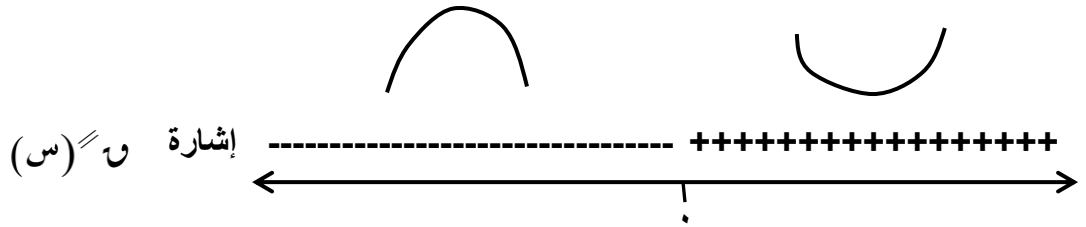
ق(س) متناقص على الفترة $[-٣، ٣]$

٣) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = -٣ وقيمتها ق(-٣) ، نقطة قيمة عظمى (-٣،ق(-٣))

للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٣ وقيمتها ق(٣) ، نقطة قيمة صغرى (٣،ق(٣))

٤) $ن'(س)$ متزايد على الفترة $]٠، \infty[$ ⟵ $ن''(س) > ٠$

$ن'(س)$ متناقص على الفترة $]-\infty، ٠[$ ⟵ $ن''(س) < ٠$



* $ن''(س) < ٠$ على الفترة $]-\infty، ٠[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة $]-\infty، ٠[$

* $ن''(س) > ٠$ على الفترة $]٠، \infty[$ ⟵ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة $]٠، \infty[$

بما أن الاقتران متصل عند س = ٠ ويغير اتجاه تقعره في جوارها ⟵

النقطة $(٠، ن(٠))$ نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)