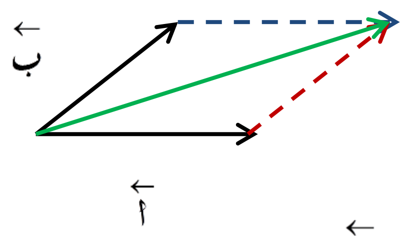
العمليات على المتجهات:

أولاً: جمع المتجهات هندسياً:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين، فإن حاصل جمعهما هو المتجه $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ ويمكن ايجاده بطريقتين :

أ) طريقة متوازي الأضلاع : حيث نسحب أحد المتجهين بحيث يكن لهما نفس البداية. ثم نرسم متوازي أضلاع فيكون حاصل جمع المتجهين كما هو موضح بالشكل الآتي :

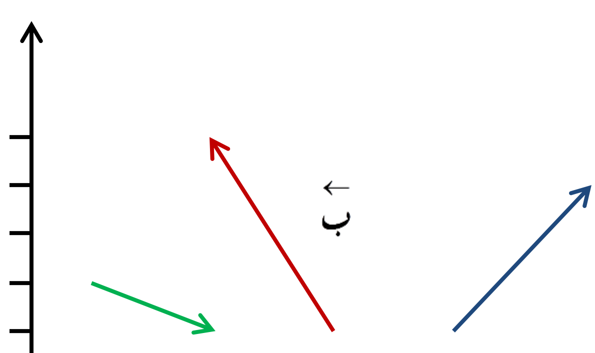


المتجه باللون الأخضر $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$

ب) طريقة المثلث : نقوم بإزاحة أحد المتجهين بحيث تكون نقطة نهاية الأول هي نقطة بداية الثاني ،

ثم نصل نقطة بداية الأول مع نقطة نهاية الثاني كما هو موضح بالشكل الآتي :

مثال (1) : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ ثلاثة متجهات ممثلة بالشكل الآتي :

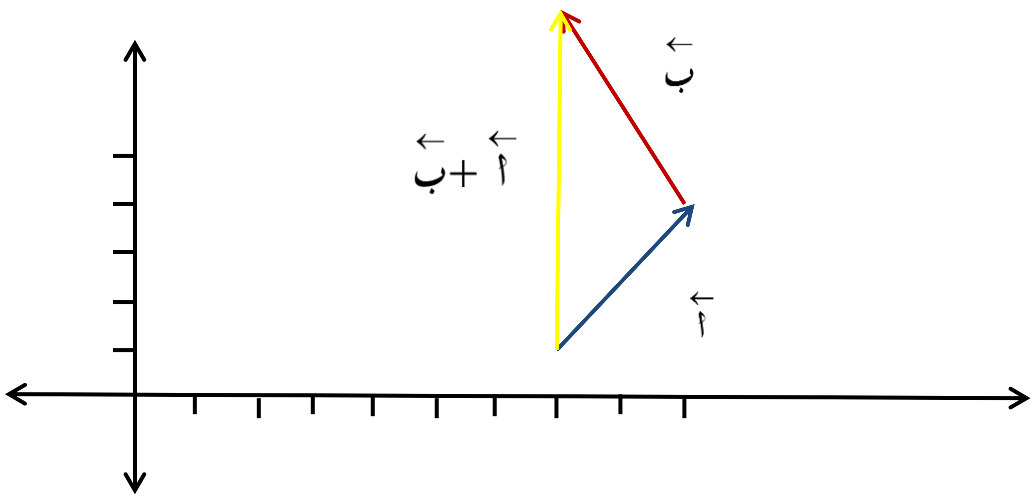


$\overleftarrow{\text{جـ}}$ $\overleftarrow{\text{أ}}$

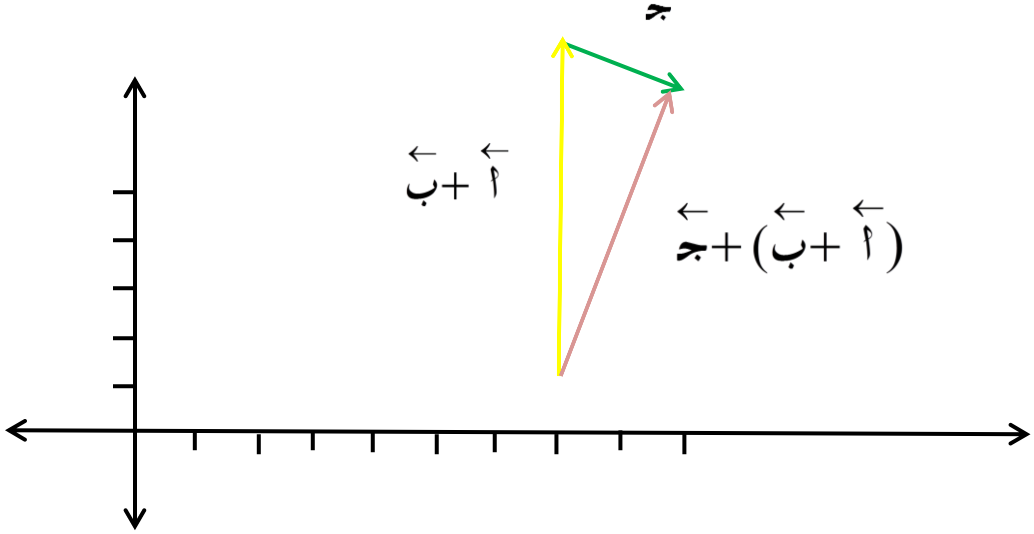
أمثل ما يلي هندسياً :

1) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$

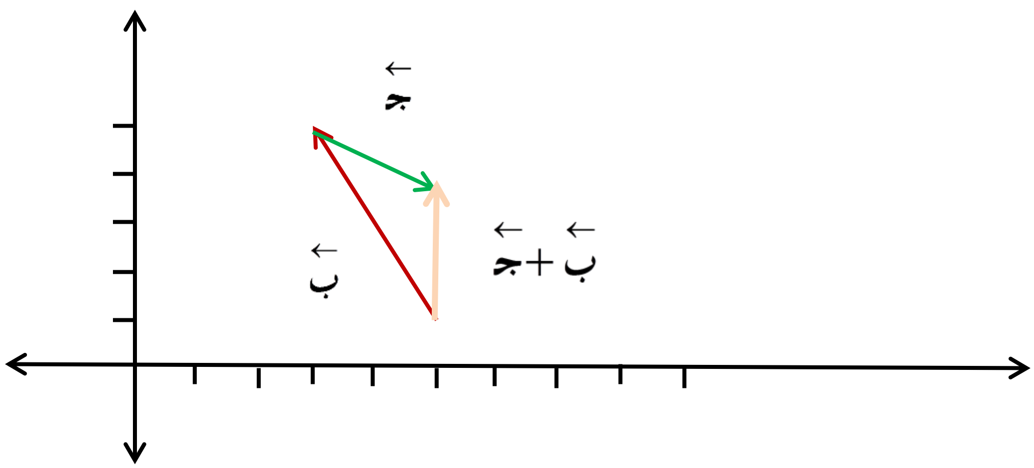
<u>الحل</u> :



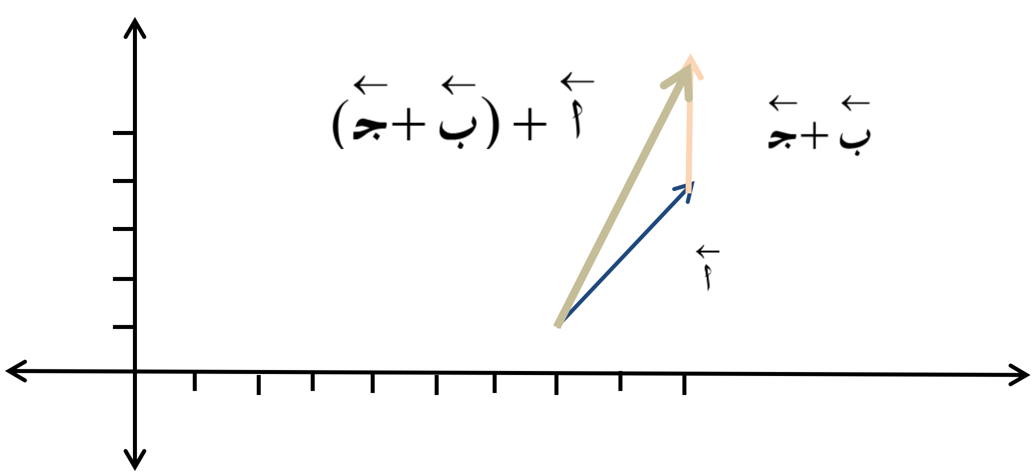
2) $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{جـ}}$



3) $\overleftarrow{\text{ب}}+\overleftarrow{\text{جـ}}$

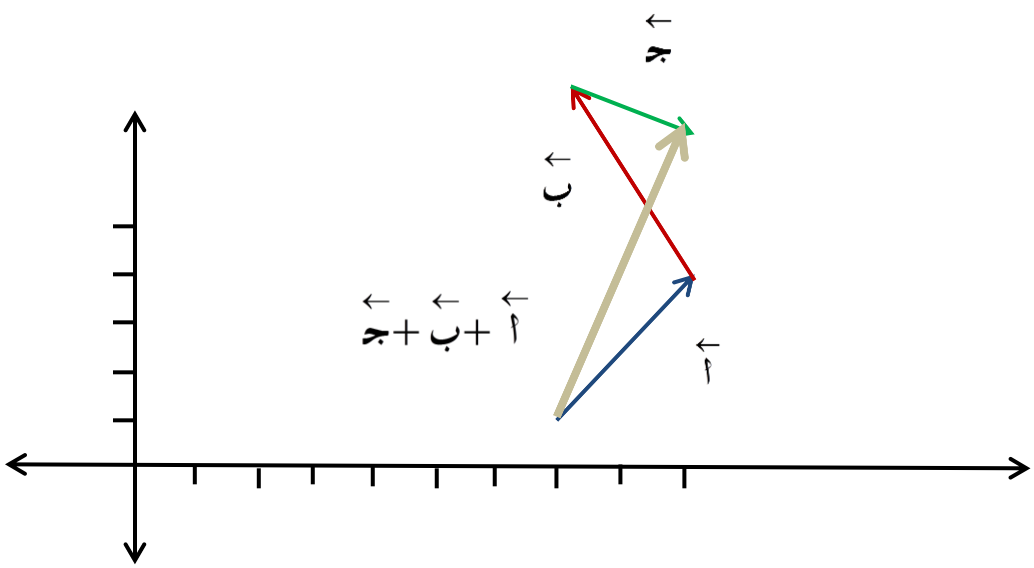


4) $\overleftarrow{\text{أ}}+(\overleftarrow{\text{ب}}+\overleftarrow{\text{جـ}})$



نلاحظ أن $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{أ}} + (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{ج}})$ [الخاصية التجميعية]

باستخدام الخاصية التجميعية يمكن جمع المتجهات الثلاثة بوضع المتجهات بشكل تتابعي وتوصيل نقطة البداية لأول متجه بنقطة النهاية لآخر متجه



<u>ثانياً</u> : جمع المتجهات جبرياً

جمع المتجهات هندسياً يحتاج الى دقة بالرسم ، لذلك نلجأ الى طريقة الجمع جبرياً.

حيث أنه إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_1، \text{أ}_2)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_1، \text{ب}_2)$ **متجهين في الوضع القياسي،**

فإن حاصل جمع المتجهين هو $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1 + \text{ب}_1 ، \text{أ}_2 + \text{ب}_2)$

<u>مثال (2)</u> : إذا كانت أ (1 ، 3) ، ب (−1 ، 2) ، جـ (2 ، −1) ، أجد بدلالة متجهات الوحدة

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بج}}$

الأساسية : 1)

2) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{جب}}$

<u>الحل</u> : **1)** $\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} = (^-١ ، ٢) - (١ ، ٣) = (^-٢ ، ^-١)$

$\overrightarrow{\text{بج}} = \text{ج} - \text{ب} = (٢ ، ^-١) - (^-١ ، ٢) = (٣ ، ^-٣)$

$\overrightarrow{\text{أب}} + \text{ب}$ $\overrightarrow{\text{جب}} = \text{ب} - \text{ج} = (^-١ ، ٢) - (٢ ، ^-١) = (^-٣ ، ٣)$ $+ \; ^-٤ \overrightarrow{\text{و}_٢}$

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{جب}} = (١ ، ٣) + (^-٣ ، ٣) = (^-٢ ، ٦) = \; ^-٢ \overrightarrow{\text{و}_١} + ٦ \overrightarrow{\text{و}_٢}$

<u>ثالثاً</u> : ضرب المتجه بعدد حقيقي

تعريف : إذا كان $\overrightarrow{\text{م}}$ متجهاً غير صفري، وكان $\text{أ} \in \text{ح}^*$ فإن $\text{أ}\overrightarrow{\text{م}}$ متجه يوازي $\overrightarrow{\text{م}}$ ، وطوله $= |\text{أ}\overrightarrow{\text{م}}| = |\text{أ}| \, ||\overrightarrow{\text{م}}||$ ويكون باتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$ إذا كانت أ موجبة وعكس اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$ إذا كانت أ سالبة.

<u>مثال (3)</u> : إذا كان $\overrightarrow{\text{م}}$ = (2 ، 4) أجد كلاً من الاتجاهات الآتية :

1) $٢\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\frac{^-١}{٢}\overrightarrow{\text{م}}$

2) $|٢\overrightarrow{\text{م}}|$ ، $|\frac{^-١}{٢}\overrightarrow{\text{م}}|$

<u>الحل</u> : **1)** $٢\overrightarrow{\text{م}} = ٢(٢ ، ٤) = (٤ ، ٨)$

$\frac{^-١}{٢}\overrightarrow{\text{م}} = \frac{^-١}{٢}(٢ ، ٤) = (^-١ ، ^-٢)$

2) $|٢\overrightarrow{\text{م}}| = \sqrt{(٤)^٢ + (٨)^٢} = \sqrt{١٦ + ٦٤} = \sqrt{٨٠}$ **وحدة**

$|\frac{^-١}{٢}\overrightarrow{\text{م}}| = \sqrt{(^-١)^٢ + (^-٢)^٢} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$ **وحدة**

<u>تعريف</u> : إذا كان $\overleftarrow{م}$ متجهاً غير صفري، فإن متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$ هو $\hat{م}$

حيث $\hat{م} = \frac{\overleftarrow{م}}{|\overleftarrow{م}|}$

<u>مثال (4)</u> : إذا كان $\overleftarrow{م} = {}^{-}٣ \overleftarrow{و}_{٢} + ٤ \overleftarrow{و}_{١}$ أجد متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$

<u>الحل</u> : $\overleftarrow{م} = (٤، {}^{-}٣)$

$$|\overleftarrow{م}| = \sqrt{(٤)^{٢} + ({}^{-}٣)^{٢}} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ وحدة}$$

متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م} = \hat{م} = \frac{\overleftarrow{م}}{|\overleftarrow{م}|} = (\frac{٤}{٥}، \frac{{}^{-}٣}{٥})$

<u>ملاحظة</u> : طول $\hat{م} = |\hat{م}| = \sqrt{(\frac{٤}{٥})^{٢} + (\frac{{}^{-}٣}{٥})^{٢}} = \sqrt{\frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = ١$ **وحدة**

<u>رابعاً</u> : طرح المتجهات

لطرح متجهين فإننا نستخدم الخاصية الآتية :

$$\overleftarrow{م}_{١} - \overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{١} + (-\overleftarrow{م}_{٢})$$

<u>مثال (6)</u> : إذا كان $\overleftarrow{م}_{١} = ({}^{-}٢، ٥)$ ، $\overleftarrow{م}_{٢} = (٣، ٤)$

جد $\overleftarrow{م}_{١} - ٢\overleftarrow{م}_{٢}$

<u>الحل</u> : $\overleftarrow{م}_{١} - ٢\overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{١} + {}^{-}٢ \overleftarrow{م}_{٢}$

$$\overleftarrow{م}_{١} - ٢\overleftarrow{م}_{٢} = ({}^{-}٢، ٥) + {}^{-}٢(٣، ٤)$$

$$\overleftarrow{\text{م}}_{١} - ٢\overleftarrow{\text{م}}_{٢} = (^{-}٢، ٥) + (^{-}٦، ^{-}٨) = (^{-}٨، ^{-}٣)$$

<u>الخواص الأساسية للعمليات على المتجهات</u> :

إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{م}}_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{م}}_{٣}$ **ثلاثة متجهات في المستوى، وكان** $\text{أ، ب} \in \text{ح}$ **، فإن :**

1) $\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{\text{م}}_{٢} = \overleftarrow{\text{م}}_{٢} + \overleftarrow{\text{م}}_{١}$ **(الخاصية التبديلية)**

2) $(\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{\text{م}}_{٢}) + \overleftarrow{\text{م}}_{٣} = \overleftarrow{\text{م}}_{١} + (\overleftarrow{\text{م}}_{٢} + \overleftarrow{\text{م}}_{٣})$ **(الخاصية التجميعية)**

3) $\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{\text{م}}_{١} = \overleftarrow{\text{م}}_{١}$ **(العنصر المحايد)**

4) $\overleftarrow{\text{م}}_{١} + -\overleftarrow{\text{م}}_{١} = -\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{\text{م}}_{١} = \overleftarrow{٠}$ **(النظير الجمعي)**

5) $\text{أ}(\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \overleftarrow{\text{م}}_{٢}) = \text{أ}\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \text{أ}\overleftarrow{\text{م}}_{٢}$

6) $(\text{أ} + \text{ب})(\overleftarrow{\text{م}}_{١}) = \text{أ}\overleftarrow{\text{م}}_{١} + \text{ب}\,\overleftarrow{\text{م}}_{١}$

7) $|\,\text{أ}\overleftarrow{\text{م}}_{١}\,| = |\,\text{أ}\,|\,|\,\overleftarrow{\text{م}}_{١}\,|$

<u>مثال (6)</u> : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (^{-}٢، ٤)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٦، ٢)$

أجد المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ **الذي يحقق المعادلة الآتية :** $٢\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{أ}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ب}}$

<u>الحل</u> : $٢\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{أ}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ب}}$

بإضافة $\overleftarrow{\text{أ}}$ **الى طرفي المعادلة ، تصبح :** $٢\,\overleftarrow{\text{س}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}}$

$\frac{١}{٢}$ $\qquad \overleftarrow{\text{س}} = \frac{١}{٢}(٣\,\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}})$

ثم نضرب طرفي المعادلة بـ تصبح المعادلة :

$$\overleftarrow{س} = \frac{٣}{٢}\overleftarrow{ب} + \frac{١}{٢}\overleftarrow{أ}$$

$$\overleftarrow{س} = \frac{٣}{٢}(٦،٢) + \frac{١}{٢}(^{-}٢،٤)$$

$$\overleftarrow{س} = (٩،٣) + (^{-}١،٢) = (٨،٥)$$

<u>سؤال(1)</u>: إذا كان $\overleftarrow{م}_{١} = ٣\overleftarrow{و}_{١} - ٤\overleftarrow{و}_{٢}$ **، وكان** $\overleftarrow{أ}$ **= (2 ، −1) ،** $\overleftarrow{ب}$ **=(6 ، 2)**

أجد ما يلي :

1) $\overleftarrow{أب}$ **في الوضع القياسي**

2) $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{أب}$

3) $\dfrac{\overleftarrow{م}_{١}}{|\overleftarrow{م}_{١}|}$

<u>سؤال (2)</u> : جد المتجه $\overleftarrow{س}$ **في المعادلة الآتية :** $٣\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{٠}$

علماً بأن $\overleftarrow{أ}$ **= (3 ، −6) ،** $\overleftarrow{ب}$ **= (9 ، 6)**