<u>الضرب النقطي :</u>

<u>تعريف</u> : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين ، فإن الضرب القياسي (النقطي) لهذين المتجهين هو :

$\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب}$ حيث : $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}||\overleftarrow{ب}|$ جتاهـ ، بحيث هـ قياس الزاوية الصغرى

المحصورة بين المتجهين ، حيث هـ $\in [\cdot، \pi]$

<u>ملاحظة</u> : حاصل الضرب النقطي لمتجهين هو كمية قياسية وليس كمية متجهة .

<u>مثال (1)</u> : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (2 ، 2) ، $\overleftarrow{ب}$ = (0 ، 3) ، أجد $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب}$ باستخدام

تعريف الضرب النقطي للمتجهات.

<u>الحل</u> : لمعرفة الزاوية التي يميلها المتجه $\overleftarrow{أ}$ عن محور س $^{+}$:

$$\text{ظاهـ} = \frac{ص}{س} = \frac{٢}{٢} = ١ \longrightarrow \text{هـ} = ٤٥^\circ = \frac{\pi}{٤}$$

لمعرفة الزاوية التي يميلها المتجه $\overleftarrow{ب}$ عن محور س $^{+}$:

$$\text{ظاهـ} = \frac{ص}{س} = \frac{٣}{٠} \text{ كمية غير معرفة} \longrightarrow \text{هـ} = ٩٠^\circ = \frac{\pi}{٢}$$

الزاوية المحصورة بين المتجهين = 90 – 45 = 45

$$|\overleftarrow{أ}| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٤+٤} = \sqrt{٨}$$

$$|\overleftarrow{ب}| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٠+٩} = \sqrt{٩} = ٣$$

$$\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}||\overleftarrow{ب}| \text{جتاهـ} = \sqrt{٨} \times ٣ \times \text{جتا}٤٥^\circ = ٢\sqrt{٢} \times ٣ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٦$$

<u>مثال (2)</u> : جد قيمة ما يلي :

1) $\overleftarrow{\text{و}}_{١} . \overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ 2) $\overleftarrow{\text{و}}_{٢} . \overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ 3) $\overleftarrow{\text{و}}_{١} . {}^{-}٢\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$

<u>الحل</u> : $\overleftarrow{\text{و}}_{١} = (١ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{\text{و}}_{٢} = (٠ ، ١)$

الزاوية المحصورة بينهما $= ٩٠^{\circ}$

$|\overleftarrow{\text{و}}_{١}| = \sqrt{(١)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١} = ١$

$|\overleftarrow{\text{و}}_{٢}| = \sqrt{(٠)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{١} = ١$

1) $\overleftarrow{\text{و}}_{١} . \overleftarrow{\text{و}}_{٢} = |\overleftarrow{\text{و}}_{١}|\,|\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\ \text{جتاهـ} = |\overleftarrow{\text{و}}_{١}|\,|\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\ \text{جتا}٩٠ = ١ \times ١ \times ٠ = ٠$

2) $\overleftarrow{\text{و}}_{٢} . \overleftarrow{\text{و}}_{٢} = |\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\,|\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\ \text{جتاهـ} = |\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\,|\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\ \text{جتا}٠ = ١ \times ١ \times ١ = ١$

3) $\overleftarrow{\text{و}}_{١} . {}^{-}٢\overleftarrow{\text{و}}_{٢} = |\overleftarrow{\text{و}}_{١}|\,|{}^{-}٢\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\ \text{جتاهـ} = |\overleftarrow{\text{و}}_{١}|\,|{}^{-}٢|\,|\overleftarrow{\text{و}}_{٢}|\ \text{جتا}٩٠ = ١ \times ٢ \times ١ \times ٠ = ٠$

<u>خصائص الضرب النقطي</u> :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ **متجهات غير صفرية وكان** $\text{ك} \in \text{ح}^{*}$ **، فإن :**

1) $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{أ}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢}$

2) $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} . \overleftarrow{\text{أ}}$ **(الخاصية التبديلية)**

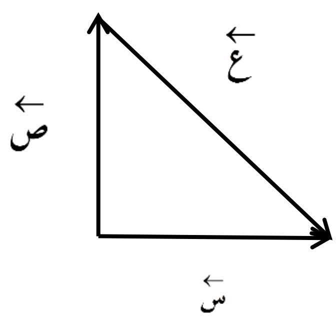
3) $\overleftarrow{\text{أ}}.(\overleftarrow{\text{ب}}+\overleftarrow{\text{جـ}}) = \overleftarrow{\text{أ}}.\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}}.\overleftarrow{\text{جـ}}$ **(التوزيع من اليمين)**

4) $(\overleftarrow{\text{ب}}+\overleftarrow{\text{جـ}}).\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ب}}.\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{جـ}}.\overleftarrow{\text{أ}}$ **(التوزيع من اليسار)**

5) $\text{ك}.(\overleftarrow{\text{أ}}.\overleftarrow{\text{ب}}) = (\text{ك}\,\overleftarrow{\text{أ}}).\overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}}.(\text{ك}\,\overleftarrow{\text{ب}})$ ، $\forall \text{ك} \in \text{ح}^*$

<u>مثال (3)</u> : استخدم الضرب النقطي لاثبات نظرية فيثاغورس .

<u>الحل</u> : ليكن $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجهين متعامدين كما في الشكل ، فإن :



$$\overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$$

$$\overleftarrow{\text{ع}}.\overleftarrow{\text{ع}} = (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})(\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$|\overleftarrow{\text{ع}}|^2 = \overleftarrow{\text{س}}.\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{س}}.\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ص}}.\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}.\overleftarrow{\text{ص}}$$

$|\overleftarrow{\text{ع}}|^2 = |\overleftarrow{\text{س}}|^2 + 0 + 0 + |\overleftarrow{\text{ص}}|^2$ **(نلاحظ أن** $\overleftarrow{\text{س}}.\overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ص}}.\overleftarrow{\text{س}} = 0$

لأن الزاوية المحصورة بين المتجهين = 90)

$$|\overleftarrow{\text{ع}}|^2 = |\overleftarrow{\text{س}}|^2 + |\overleftarrow{\text{ص}}|^2$$

<u>نظرية</u> : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_1 ، \text{أ}_2)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_1 ، \text{ب}_2)$ **فإن :**

$$\overleftarrow{\text{أ}}.\overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}_1\text{ب}_1 + \text{أ}_2\text{ب}_2$$

ويمكن تعميم النظرية من المستوى الى الفراغ كما يلي :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_1 ، \text{أ}_2 ، \text{أ}_3)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_1 ، \text{ب}_2 ، \text{ب}_3)$ **فإن :**

$$\overleftarrow{\text{أ}}.\overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}_1\text{ب}_1 + \text{أ}_2\text{ب}_2 + \text{أ}_3\text{ب}_3$$

مثال (4) : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٣،٥،{}^{-}١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٢،{}^{-}٢،٤)$ جد $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب}$

الحل : $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = أ_{١}ب_{١}+أ_{٢}ب_{٢}+أ_{٣}ب_{٣}$

$$\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = ٣\times٢+٥\times{}^{-}٢+{}^{-}١\times٤$$

نتيجة : ∵ $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = ٦+{}^{-}١٠+{}^{-}٤=$ $\overleftarrow{أ}$ $\overleftarrow{ب}$ **متعامدين إذا وفقط إذا كان** $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = ٠$

مثال (5) : أبين أن كل زوج من المتجهات الآتية متعامدة :

1) $\overleftarrow{أ} = (٢،٤،{}^{-}٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣،١،٥)$

2) $\overleftarrow{و_{١}}$ ، $\overleftarrow{و_{٢}}$ في الفراغ

الحل : 1) $\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب} = أ_{١}ب_{١} + أ_{٢}ب_{٢} + أ_{٣}ب_{٣}$

$$= ٢\times٣ + ٤\times١ + {}^{-}٢\times٥$$

$$= ٦ + ٤ + {}^{-}١٠ = ٠$$ ⟵ **المتجهان متعامدان**

2) $\overleftarrow{و_{١}}.\overleftarrow{و_{٢}} = (١،٠،٠).(٠،١،٠)$

$$= ١\times٠ + ٠\times١ + ٠\times٠ = ٠$$ ⟵ $\overleftarrow{و_{١}} \perp \overleftarrow{و_{٢}}$

سؤال : **إذا كان** $\overleftarrow{أ} = (٢جاس،جاس)$ ، $\overleftarrow{ب} = (جاس،١)$ **متعامدين**

ما قيمة قيمة / قيم س ، $س \in]\pi،٢\pi[$