**<u>الضرب المتجهي للمتجهات:</u>**

**<u>تعريف</u> : الضرب المتجهي** $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|\,\text{جاهـ}\,\overleftarrow{\text{ن}}$ **حيث** $\overleftarrow{\text{ن}}$ **متجه وحدة عمودي**

**على كل من المتجهين** $\overleftarrow{\text{أ}}، \overleftarrow{\text{ب}}$ ، **هـ الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين** $\overleftarrow{\text{أ}}، \overleftarrow{\text{ب}}$

**ويكون <u>اتجاه حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين</u>** $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ **هو اتجاه** $\overleftarrow{\text{ن}}$ **:**

**1) عمودي على المستوى الى أعلى إذا كان المتجه** $\overleftarrow{\text{ب}}$ **يقع عكس اتجاه عقارب الساعة من المتجه** $\overleftarrow{\text{أ}}$

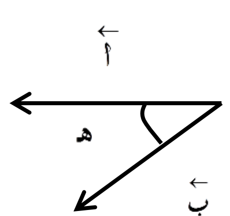
**2) عمودي على المستوى الى أسفل إذا كان المتجه** $\overleftarrow{\text{ب}}$ **يقع مع اتجاه عقارب الساعة من المتجه** $\overleftarrow{\text{أ}}$

**ويكون** $|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}| = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|\,\text{جاهـ}$

**<u>مثال (1)</u> : إذا كان الشكل المجاور يمثل المتجهين** $\overleftarrow{\text{أ}}، \overleftarrow{\text{ب}}$ **، بحيث** $|\overleftarrow{\text{أ}}| = ٨$ **وحدات**

$|\overleftarrow{\text{ب}}| = ٦$ **وحدات والزاوية بينهما** $\text{هـ} = ٣٠^\circ$ **، أجد ما يلي :**

**1)** $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ **2)** $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|^{٢}$




$$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|\,\text{جاهـ}\,\overleftarrow{\text{ن}}$$

**<u>الحل</u> : 1)**

$$= ٨ \times ٦ \,\text{جا}\, ٣٠^{\circ} \,\overleftarrow{\text{ن}}$$

$$= ٤٨ \times \tfrac{١}{٢} \overleftarrow{\text{ن}} = ٢٤ \overleftarrow{\text{ن}}$$

**وبما أن المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ يقع عكس عقارب الساعة من المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ن}}$ عمودي على المستوى الى أعلى.**

2) $$|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + ٢(\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}})$$

$$|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + ٢ |\overleftarrow{\text{أ}}| |\overleftarrow{\text{ب}}| \,\text{جتا}\, ٣٠$$

$$|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} + ٢(٨)(٦)(\tfrac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٦٤ + ٣٦ + ٩٦(\tfrac{\sqrt{٣}}{٢}) = ١٠٠ + ٤٨\sqrt{٣} \simeq ١٨٣$$

$$|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}| \simeq ١٣\text{و}٥$$

**<u>مثال ( 2 )</u> : جد** $\overleftarrow{\text{و}}_{١} \times \overleftarrow{\text{و}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}_{١} \times \overleftarrow{\text{و}}_{٢}$

**<u>الحل :</u> 1)** $\overleftarrow{\text{و}}_{١} \times \overleftarrow{\text{و}}_{١} = |\overleftarrow{\text{و}}_{١}| |\overleftarrow{\text{و}}_{١}| \,\text{جا}\, ٠^{\circ} \,\overleftarrow{\text{ن}} = ٠$

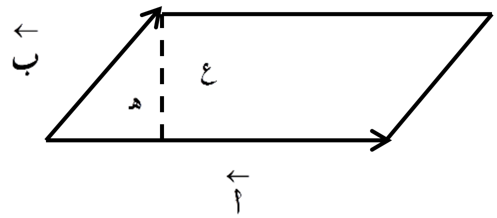
**2)** $\overleftarrow{\text{و}}_{١} \times \overleftarrow{\text{و}}_{٢} = |\overleftarrow{\text{و}}_{١}| |\overleftarrow{\text{و}}_{٢}| \,\text{جا}\, ٩٠^{\circ} \,\overleftarrow{\text{ن}} = ١ \times ١ \times ١ = ١\overleftarrow{\text{ن}}$

**وبما أن $\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ تقع عكس عقارب الساعة من المتجه $\overleftarrow{\text{و}}_{١}$ ، اتجاه $\overleftarrow{\text{ن}}$ يكون عمودي على المستوى الى أعلى .**

**<u>نتيجة</u> : إذا كان المتجهان متوازيان أو على استقامة واحدة فإن** $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = ٠$

**<u>مثال ( 3 )</u> : في الشكل المجاور جد مساحة متوازي الأضلاع باستخدام الضرب المتجهي للمتجهين $\overleftarrow{\text{أ}} ، \overleftarrow{\text{ب}}$ ، ثم جد مساحة المثلث المشترك معه بالقاعدة والارتفاع.**

الحل :




مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع

$= \overleftarrow{أ} \times ع$

جاهـ $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{ع}{|\overleftarrow{ب}|}$ لأضلاع $= |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ $= |\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$

$\longleftarrow$ مساحة المثلث المشترك مع متوازي الأضلاع بالقاعدة والارتفاع $= \frac{1}{2}\,|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$

<u>مثال (4)</u> : المتجهان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يمثلان ضلعان متجاوران في متوازي أضلاع بحيث :

$|\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}| = ١٤$ وحدة ، $|\overleftarrow{أ}| - |\overleftarrow{ب}| = ٢$ وحدة

وقياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يساوي $٣٠^\circ$ ، جد ما يلي :

1) $|\overleftarrow{أ}|$ 2) $|\overleftarrow{ب}|$ 3) مساحة متوازي الأضلاع

4) مساحة المثلث المشترك مع متوازي الأضلاع بالقاعدة والارتفاع.

<u>الحل</u> : 1) بجمع المعادلتين $|\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}| = ١٤$

$|\overleftarrow{أ}| - |\overleftarrow{ب}| = ٢$

$٢|\overleftarrow{أ}| = ١٦ \longrightarrow |\overleftarrow{أ}| = ٨$ وحدة

2) $|\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}| = ١٤ \longrightarrow ٨ + |\overleftarrow{ب}| = ١٤ \longrightarrow |\overleftarrow{ب}| = ١٤ - ٨ = ٦$ وحدة

3) مساحة متوازي الأضلاع $= |\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ

$= |\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جا$٣٠^\circ = ٨ \times ٦ \times \frac{1}{2} = ٢٤$ وحدة مربعة

$= \frac{1}{2}$

**4) مساحة المثلث                مساحة متوازي الأضلاع**

$= \frac{١}{٢} \times ٢٤ = ١٢$ **وحدة مربعة**

**<u>مثال (5)</u> : إذا كان** $|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}| = ٤٠\sqrt{٢}$ ، $|\overleftarrow{\text{أ}}| = ١٦$ ، $|\overleftarrow{\text{ب}}| = ٥$

**جد : 1 ) الزاوية بين المتجهين** $\overleftarrow{\text{أ}} ، \overleftarrow{\text{ب}}$ **2 )** $|٢\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\overleftarrow{\text{ب}}|$

**<u>الحل</u> : 1)** $|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}| = |\overleftarrow{\text{أ}}||\overleftarrow{\text{ب}}|\text{جاهـ}$

$٤٠\sqrt{٢} = ١٦ \times ٥ \times \text{جاهـ}$

$٤٠\sqrt{٢} = ٨٠\text{جاهـ} \longrightarrow \text{جاهـ} = \frac{٤٠\sqrt{٢}}{٨٠} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\longrightarrow \text{هـ} = ٤٥^\circ = \frac{\pi}{٤}$

2) $|٢\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} = |٢\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} + |٣\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + ٢(٢\overleftarrow{\text{أ}}.٣\overleftarrow{\text{ب}})$

$= |٢|^{٢}|\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} + |٣|^{٢}|\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + ٢|٢||\overleftarrow{\text{أ}}||٣\overleftarrow{\text{ب}}|\text{جتاهـ}$

$= ٤ \times ٢٥٦ + ٩ \times ٢٥ + ٩٦٠ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \approx ١٠٢٤ + ٢٢٥ + ٦٨٥و٧ \approx ١٩٣٤$

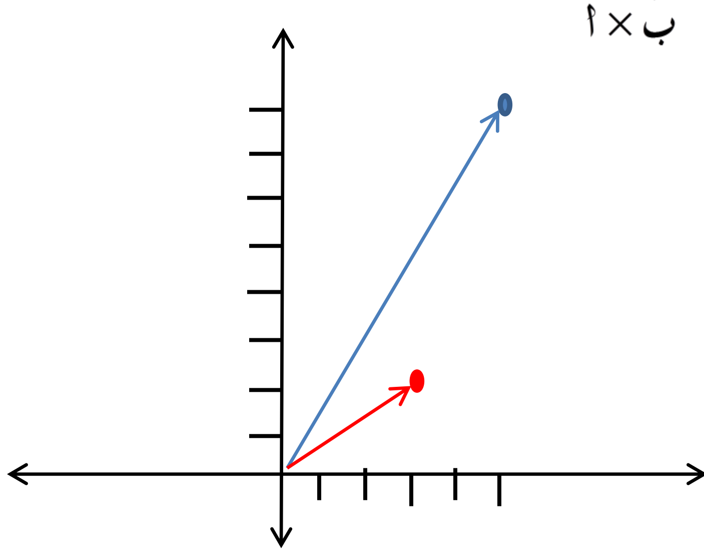
$\longrightarrow |٢\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\overleftarrow{\text{ب}}| \approx \sqrt{١٩٣٤} \approx ٤٤$

**<u>تعريف</u> : إذا كان المتجهان** $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{١}،\text{أ}_{٢})$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{١}،\text{ب}_{٢})$ **يقعان في المستوى ،**

**فإن حاصل ضربهما الاتجاهي** $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ب}_{١})\overleftarrow{\text{ك}}$

**<u>مثال (6)</u> : إذا كان المتجهان** $\overleftarrow{أ} = ٥\overleftarrow{و}_١ + ٨\overleftarrow{و}_٢$ $\overleftarrow{ب} = ٣\overleftarrow{و}_١ + ٢\overleftarrow{و}_٢$

**جد** $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$



**<u>الحل</u> :** $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (٥ \times ٢ - ٨ \times ٣)\overleftarrow{ن} = (١٠ - ٢٤)\overleftarrow{ن} = {}^{-}١٤\overleftarrow{ن}$

**وحسب موقع النقطتين أ ، ب في المستوى يتضح أن المتجه** $\overleftarrow{ب}$ **يقع مع عقارب الساعة من المتجه** $\overleftarrow{أ}$ **يعني أن اتجاه** $\overleftarrow{ن}$ **يكون عمودي على المستوى الى أسفل .**

$$\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ} = (٣ \times ٨ - ٢ \times ٥)\overleftarrow{ن} = (٢٤ - ١٠)\overleftarrow{ن} = ١٤\overleftarrow{ن}$$

**وحسب موقع النقطتين أ ، ب في المستوى يتضح أن المتجه** $\overleftarrow{أ}$ **يقع عكس عقارب الساعة من المتجه** $\overleftarrow{ب}$ **، يعني أن اتجاه** $\overleftarrow{ن}$ **يكون عمودي على المستوى الى أعلى**

**نتيجة** : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -(\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}})$