الوحدة السادسة (التكامل) :

التكامل غير المحدود

تعريف معكوس المشتقة : إذا كان الاقتران ق(س) متصلا على الفترة [أ ، ب] فان م(س) يسمى معكوس المشتقة (أو الاقتران الاصلي أو الاقتران البدائي) للاقتران ق(س)

إذا كان : $م'(س) = ق(س)$ ، $\forall$ س $\in$]أ،ب[

مثال(١) : **تحقق من أن الاقتران م (س) = $\frac{١}{٤}$ س^٤ اقتران بدائي للاقتران ق(س) = س^٣**

الحل : $م'(س) = س^٣$ **= ق(س) ⟵ م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س)**

مثال(٢) : **جد اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) = ٢س**

الحل : **حسب التعريف يمكن أن يكون** $م(س) = س^٢$ **اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) لأن**

$م'(س) = ٢س$

ويمكن أن يكون أيضاً $م_١(س) = س^٢ + ١$ **اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) لأن**

$م'_١(س) = ٢س$

قاعدة : **إذا كان م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) فإن : م(س) + جـ هي الصورة العامة لأي اقتران بدائي للاقتران ق(س) حيث جـ ثابت.**

ملاحظة :**(الفرق بين أي اقترانين بدائيين لاقتران معين يساوي ثابتاً دائماً)**

مثال(٣) : **إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانيين بدائيين للاقتران المتصل ق(س) وكان**

ل(س) = م(س) – هـ (س) ، جد $ل'(٣)$

الحل : **بما أن م(س) ، هـ (س) اقترانيين بدائيين للاقتران ق(س) ⟵ م(س) – هـ(س) = جـ**

⟵ ل(س) = جـ (ثابت) ⟵ $ل'(س) = ٠$ ⟵ $ل'(٣) = ٠$

مثال(٤) :**بين فيما إذا كان الاقتران** $م(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢}$ **اقتراناً بدائياً للاقتران** $ق(س) = ١ + \frac{٢}{س^٣}$ ، $س \neq ٠$

الحل : $م'(س) = \frac{س^٢(٣س^٢) - (س^٣ - ١)(٢س)}{س^٤} = \frac{٣س^٤ - ٢س^٤ + ٢س}{س^٤} = \frac{س^٤ + ٢س}{س^٤} = ١ + \frac{٢}{س^٣}$

⟵ م(س) اقتران بدائي للاقتران ق٠س)

تعريف : ١) تُسمى مجموعة كل من الاقترانات البدائية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة لـ س ، ويُرمز له بالرمز : $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

٢) إذا كان $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \longrightarrow \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{م}(\text{س}) + \text{جـ}$ جـ ثابت (ثابت التكامل)

٣) إذا كان ق(س) اقترانا متصلا فان : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س})$

مثال(٥) : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان : $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ٥$

جد ق(٢) ، $\text{ق}'(٢)$

الحل : بما أن ق (س) اقتران متصل $\longrightarrow \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س})$

$\longrightarrow \text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٣ \longrightarrow \text{ق}(٢) = ١٢ - ٣ = ٩$

$\longrightarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س} \longrightarrow \text{ق}'(٢) = ١٢$

مثال (٦) : إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانيين بدائيين للاقتران ق(س) ، وكان $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦$

هـ (٣) = ٤ ، جد هـ (١)

الحل : الفق بين م(س) ، هـ (س) = ثابت = جـ

م(س) – هـ (س) = جـ $\longrightarrow \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦ - \text{هـ}(\text{س}) = \text{جـ}$

$\longrightarrow \text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦ - \text{جـ}$

$\longrightarrow \text{هـ}(٣) = ٩ - ١٢ + ٦ - \text{جـ} = ٤ \longrightarrow \text{جـ} = {}^{-}١$

$\longrightarrow \text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦ - {}^{-}١ \longrightarrow \text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧$

$\longrightarrow \text{هـ}(١) = ١ - ٤ + ٧ = ٤$

مثال (٧) : إذا كان م(س) ، هـ (س) اقترانيين بدائيين للاقتران المتصل ق(س) ، وكان ق(٤) ٧،

$\text{ق}'(٤) = ١٠$ ، فما قيمة $(٣\text{م} - \text{هـ})'(٤)$

الحل: $(٣\text{م} - \text{هـ})'(٤) = ٣\text{م}'(٤) - \text{هـ}'(٤) = ٣\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$

قواعد التكامل غير المحدود :

١) $\int \text{أ}\,\text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ} \quad ، \quad \text{أ، جـ} \in \text{ح}$

٢) $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ} \quad ، \quad \text{ن} \neq {}^{-}١$

٣) $\int \text{جاس}\,\text{ءس} = {}^{-}\text{جتاس} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{جتاس}\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

١) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = {}^{-}\text{ظتاس} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{قاس ظاس}\,\text{ءس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{قتاس ظتاس}\,\text{ءس} = {}^{-}\text{قتاس} + \text{جـ}$

خواص التكامل غير المحدود :

إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل ، فإن:

١) $\int \text{أق(س)}\,\text{ءس} = \text{أ}\int \text{ق(س)}\,\text{ءس} \quad ، \quad \text{أ} \neq ٠$

٢) $\int (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)})\,\text{ءس} = \int \text{ق(س)}\,\text{ءس} \pm \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس} \quad ، \quad \text{أ} \neq ٠$

ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين .

مثال (٨) : جد كلا من التكاملات الآتية :

١) $\int \text{قاس(قاس+ظاس)}\,\text{ءس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قاس ظاس})\,\text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} + \int \text{قاس ظاس}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$

٢) $\int (٢ - \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} = \int ٢\,\text{ءس} - \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ءس} = ٢\text{س} - \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} + \int ١\,\text{ءس} = ٢\text{س} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ} = \text{س} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int \left(\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}}\right)^{٢}\text{ءس} = \int \left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}\text{ءس} = \int (\text{س} + \text{س}^{-١})^{٢}\,\text{ءس}$

$\int (\text{س} + \text{س}^{-١})^{٢}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} + ٢ \times \text{س} \times \text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢})\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} + ٢ + \text{س}^{-٢})\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٢\text{س} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٢\text{س} + \frac{-١}{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\int \left(٧\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \frac{٣}{\text{س}^{٤}}\right) \text{ءس} = \int \left(٧\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣\text{س}^{-٤}\right) \text{ءس} = \frac{٧\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٤\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٣\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$

$= \frac{٧\text{س}^{٣}}{٣} - ٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$

٥) $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} \, \text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

٦) $\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \text{ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{١}{\text{جتاس}} \text{ءس} = \int \text{ظاس قاس} \, \text{ءس} = \text{قاس} + \text{جـ} = \frac{١}{\text{جتاس}} + \text{جـ}$

مثال (٩) : إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = ٥\text{س}^{٤} - ١$ **، وكان ق(١) = ٥ ، جد ق(٢)**

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) \text{ءس} = \int (٥\text{س}^{٤} - ١) \text{ءس} = \frac{٥\text{س}^{٥}}{٥} - \text{س} + \text{جـ} = \text{س}^{٥} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٥} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(١) = ١ - ١ + \text{جـ} = \text{جـ} = ٥ \longleftarrow \text{جـ} = ٥$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٥} - \text{س} + ٥ \longleftarrow \text{ق}(٢) = ٢^{٥} - ٢ + ٥ = ٣٢ + ٣ = ٣٥$

مثال(١٠) : إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠ ، وكان

$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س}$ **، جد قاعدة الاقتران ق(س) .**

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س}) \text{ءس} = \int ٦\text{س} \, \text{ءس} = \frac{٦\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}_{١} = ٣\text{س}^{٢} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ق}'(٠) = ١$ **(مشتقة الاقتران نقطة التماس عند نقطة التماس)**

$٣(٠)^{٢} + \text{جـ}_{١} = ١ \longleftarrow \text{جـ}_{١} = ١ \longleftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ١$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) \text{ءس} = \int (٣\text{س}^{٢} + ١) \text{ءس} = \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س} + \text{جـ}_{٢} = \text{س}^{٣} + \text{س} + \text{جـ}_{٢}$

نقطة التماس تحقق معادلة التماس ⟵ ص = ٠ + ٢ = ٢

(٠ ، ٢) أيضا تحقق معادلة قاعدة الاقتران ق(س) ⟵ ق(٠) = ٢ ⟵

٠ + ٠ + جـ٢ = ٢ ⟵ جـ٢ = ٢ ⟵ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٦\text{س} + ٢$

مثال (١١) : إذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = ١٢\text{س}$ ، جد معادلة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ١)

الحل :- $\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int ١٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{١٢\text{س}^٢}{٢} + \text{جـ}_١$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}^٢ + \text{جـ}_١$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (٦\text{س}^٢ + \text{جـ}_١)\,\text{دس} = \frac{٦\text{س}^٣}{٣} + \text{جـ}_١\text{س} + \text{جـ}_٢ = ٢\text{س}^٣ + \text{جـ}_١\text{س} + \text{جـ}_٢$

ق(١) = ٣ ← ٢ + $\text{جـ}_١$ + $\text{جـ}_٢$ = ٣ ← $\text{جـ}_١$ + $\text{جـ}_٢$ = ١

ق(-١) = ١ ← -٢ + $\text{جـ}_١$ + $\text{جـ}_٢$ = ١ ← - $\text{جـ}_١$ + $\text{جـ}_٢$ = ٣

٢ $\text{جـ}_٢$ = ٤ ← $\text{جـ}_٢$ = ٢

$\text{جـ}_١$ + $\text{جـ}_٢$ = ١ ← $\text{جـ}_١$ + ٢ = ١ ← $\text{جـ}_١$ = -١

← $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^٣ - \text{س} + ٢$

***** العلاقة بين البعد ف(ن) والسرعة ع(ن) والتسارع ت(ن) في التفاضل والتكامل :**

$$\text{ف(ن)} \underset{\text{بالاشتقاق}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\rightleftarrows}} \text{ع(ن)} \underset{\text{بالاشتقاق}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\rightleftarrows}} \text{ت(ن)}$$

مثال (١٢) : **بدأ جسم بالتحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تُعطى بالعلاقة $\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^٢ + ٢\text{ن}$ ، فما بُعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة.**

الحل : $\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\,\text{دن} = \int (٣\text{ن}^٢ + ٢\text{ن})\,\text{دن} = \frac{٣\text{ن}^٣}{٣} + \frac{٢\text{ن}^٢}{٢} + \text{جـ}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^٣ + \text{ن}^٢ + \text{جـ}$

وبما أن ف(٠) = ٠ ← جـ = ٠

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^٣ + \text{ن}^٢$

$\text{ف}(٢) = ٨ + ٤ = ١٢$ **متراً**

مثال (١٣) : تحرك جسم من السكون من نقطة الأصل في خط مستقيم وبتسارع ت = ٢ن + ١ سم /ث^{٢}

جد: ١) سرعة الجسم عند ن = ٣ ٢) إزاحة الجسم من نقطة الأصل عند ن = ٣ ث

الحل : ١) $ع = \int ت(ن)\,ءن = \int (٢ن+١)\,ءن = \frac{٢ن^{٢}}{٢} + ن + جـ$

$ع(ن) = ن^{٢} + ن + جـ_{١}$

بما أن الجسم تحرك من السكون ← ع (٠) = ٠ ← ٠ + ٠ + جـ$_{١}$ = ٠ ← جـ$_{١}$ = ٠

← $ع(ن) = ن^{٢} + ن$ ⟵ **ع(٣) = ٩ + ٣ = ١٢ سم / ث**

٢) الازاحة $ف(ن) = \int ع(ن)\,ءن = \int (ن^{٢} + ن)\,ءن = \frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢} + جـ_{٢}$

تحرك الجسم من نقطة الأصل ← ف(٠) = ٠ ← ٠ + ٠ + جـ$_{٢}$ = ٠ ← جـ$_{٢}$ = ٠

$ف(ن) = \frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢}$ $ف(٣) = \frac{٢٧}{٣} + \frac{٩}{٢} =$ **١٣.٥ سم**

التجزئة ومجموع ريمان :

تعريف : إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة ، وكانت $\sigma_{ن} = \{ أ = س_{٠} ، س_{١} ، س_{٢} ، .... ، س_{ن} = ب \}$

حيث $س_{٠} < س_{١} < س_{٢} < .... < س_{ن}$ ، فإننا نسمي $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

وتسمى الفترة $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$ الفترة الجزئية الرائية ، وطولها = $\Delta س_{ر} = س_{ر} - س_{ر-١}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

بالرموز $$\sum_{ر=١}^{ن} (س_{ر} - س_{ر-١}) = ب - أ$$

نلاحظ من التعريف ، أنه لأي تجزئة $\sigma_{ن}$ لفترة ما يجب أن يكون :

١) الفترة مغلقة . ٢) تبدأ التجزئة من بداية الفترة وتنتهي بنهايتها .

٣) عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

ملاحظة : عدد الفترات الجزئية الناتجة عن التجزئة $\sigma_{ن}$ يساوي ن ،

وعدد عناصر التجزئة = ن + ١

مثال(١) : أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة [-١ ، ٣]

١) $\sigma_{٤}$ = { -١ ، ١ ، ١.٥ ، ٢ ، ٣ } تعتبر تجزئة

٢) $\sigma_{٤}$ = { ٠ ، ١ ، ١.٥ ، ٢ ، ٣ } ليست تجزئة لأنها لا تبدأ ببداية الفترة -١

٣) $\sigma_{٤}$ = { -١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ليست تجزئة لأن ٤ لا تنتمي للفترة

٤) $\sigma_{٤}$ = { -١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ } ليست تجزئة لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال (٢) : أكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة [٢ ، ٧]

الحل : $\sigma_{٥}$ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

$\sigma_{٥}$ = { ٢ ، ٢.٥ ، ٤ ، ٤.٥ ، ٦ ، ٧ }

$\sigma_{٥}$ = { ٢ ، ٢.٥ ، ٣ ، ٤.٥ ، ٦ ، ٧ }

مثال(٣) : إذا كانت $\sigma_{٣}$ = { -١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } تجزئة ثلاثية للفترة [-١ ، ٦] . أكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ ثم احسب طول كل منها .

الحل : الفترات الجزئية : [-١ ، ٣] ، [٣ ، ٤] ، [٤ ، ٦]

أطوالها على الترتيب : ٤ ، ١ ، ٢

نلاحظ أن عدد عناصر التجزئة $\sigma_{٣}$ = ٤

عدد الفترات الجزئية = ٣

مجموع أطوال الفترات الجزئية = ٤ + ١ + ٢ = ٧ = طول الفترة الكلية

تعريف : تُسمى التجزئة $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب] ، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية ، ويكون طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}}$ = $\frac{ب-أ}{ن}$

مثال (٤) : أكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة [-٢ ، ١٣]

الحل : ن = ٥ ، أ = -٢ ، ب = ١٣

طول الفترة الجزئية = $\frac{ب-أ}{ن} = \frac{١٣-^{-}٢}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

$\longleftarrow$ $\sigma_{٥}$ = { -٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ }

مثال(٥) : إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئة منتظمة للفترة [٥ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٣}$

جد قيمة ب .

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب-٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ $\longleftarrow$ ٣(ب - ٥) = ٦ $\longleftarrow$ ب – ٥ = ٢

$\longleftarrow$ ب = ٧

لايجاد أى عنصر فى التجزئة المنتظمة ($\sigma_{ن}$) .

يكون العنصر الأول س. = أ

العنصر الثاني $س_{١}$ = أ + $\frac{ب-أ}{ن}$

العنصر الرائي $س_{ر-١} = أ + (ر-١)(\frac{ب-أ}{ن})$

وبشكل عام فإن $س_ر = أ + (\frac{ب - أ}{ن}) \times ر$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي $[س_{ر-١} ، س_ر]$

مثال (٦) : لتكن $\sigma_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [-١ ، ١٩] ، جد كل مما يلي :

١) $س_٢$ ، $س_٩$ ٢) العنصر الثامن ٣) الفترة الجزئية الخامسة

الحل : ن = ١٢ ، أ = -١ ، ب = ١٩

١) $س_ر = أ + (\frac{ب - أ}{ن}) \times ر$

$$س_٢ = {}^-١ + (\frac{١٩ - {}^-١}{١٢}) \times ٢ = {}^-١ + \frac{٢٠}{٦} = \frac{١٤}{٦} = \frac{٧}{٣}$$

$$س_٩ = {}^-١ + (\frac{١٩ - {}^-١}{١٢}) \times ٩ = {}^-١ + \frac{٢٠}{١٢} \times ٩ = {}^-١ + ١٥ = ١٤$$

٢) العنصر الثامن = $س_٧ = {}^-١ + (\frac{١٩ - {}^-١}{١٢}) \times ٧ = {}^-١ + \frac{٢٠}{١٢} \times ٧ = {}^-١ + \frac{٣٥}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$

٣) الفترة الجزئية الخامسة هي $[س_٤ ، س_٥] = [\frac{١٧}{٣} ، \frac{٢٢}{٣}]$

تعريف : إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ ، ب] ، وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب] ، فإن المقدار $\sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)(س_ر - س_{ر-١})$ ، $س_ر^* \in [س_{ر-١} ، س_ر]$

يسمى مجموع ريمان ، ويرمز له بالرمز $م(\sigma_ن ، ق)$

وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن : $م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$

مثال (٧) : أوجد مجموع ريمان للاقتران $ق(س) = س^٢ + ٢س + ٩$ بالنسبة للتجزئة المنتظمة $\sigma_٤$ للفترة [-٢ ، ٦] في الحالتين :

١) باتخاذ $س_ر^* = س_ر$ ٢) باتخاذ $س_ر^* = \frac{س_{ر-١} + س_ر}{٢}$

الحل : طول الفترة الجزئية $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٦-{}^{-}٢}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

$\sigma_{٤}$ = { -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ }

الفترات الجزئية : [-٢ ، ٠] ، [٠ ، ٢] ، [٢ ، ٤] ، [٤ ، ٦]

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}, \text{ق}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})$$

١) $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \text{س}_{\text{ر}} \longrightarrow \text{م}(\sigma_{٤}, \text{ق}) = ٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}})$

= ٢(ق(٠) + ق(٢) + ق(٤) + ق(٦))

= ٢ (٩ + ١٧ + ٣٣ + ٥٧)

= ٢ (١١٦) = ٢٣٢

٢) $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \frac{\text{س}_{\text{ر}-١} + \text{س}_{\text{ر}}}{٢}$: [-٢ ، ٠] $\longrightarrow \text{س}_{\text{ر}}^{*} = \frac{{}^{-}٢+٠}{٢} = {}^{-}١$

: [٠ ، ٢] $\longrightarrow \text{س}_{\text{ر}}^{*} = \frac{٠+٢}{٢} = ١$

: [٢ ، ٤] $\longrightarrow \text{س}_{\text{ر}}^{*} = \frac{٢+٤}{٢} = ٣$

: [٤ ، ٦] $\longrightarrow \text{س}_{\text{ر}}^{*} = \frac{٤+٦}{٢} = ٥$

$\text{م}(\sigma_{٤}, \text{ق}) = ٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}\left(\frac{\text{س}_{\text{ر}-١} + \text{س}_{\text{ر}}}{٢}\right) =$ ٢(ق(-١) + ق(١) + ق(٣) + ق(٥))

= ٢ (٨ + ١٢ + ٢٤ + ٤٤) = ٢ (٨٨) = ١٧٦

مثال(٨) : أكتب التجزئة المنتظمة الخماسية للفترة [-١ ، ٣]

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٣-{}^{-}١}{٥} = \frac{٤}{٥}$

$\sigma_{٥}$ = { ${}^{-}١ ، \frac{{}^{-}١}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٧}{٥} ، \frac{١١}{٥} ، ٣$ }

مثال (٩) : إذا كانت $\sigma_{٢٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [-٢ ، ٣] . فأوجد الفترة الجزئية السادسة عشر الناتجة عن هذه التجزئة .

الحل : طول الفترة الجزئية . $= \frac{٣-{}^{-}٢}{٢٠} = \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$

الفترة الجزئية السادسة عشر هي [$\text{س}_{١٥}$ ، $\text{س}_{١٦}$]

$\text{س}_{١٥} = {}^{-}٢ + \frac{١}{٤} \times ١٥ = \frac{٧}{٤}$ $\qquad$ $\text{س}_{١٦} = {}^{-}٢ + \frac{١}{٤} \times ١٦ = ٢$

$\longrightarrow [\frac{٧}{٤} ، ٢]$

التكامل المحدود

تعريف : إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدوداً في الفترة [أ ، ب] ، وكانت

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} م(\sigma_ن ، ق) = ل \quad \text{لجميع قيم} \quad س_ر^* \in [س_ر ، س_{ر-١}]$$

فإن الاقتران ق(س) قابلا للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، ويكون :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس = ل$$ **وتسمى أ ، ب حدود التكامل .**

ملاحظة : يكون الاقتران ق(س) محدوداً، إذا وجد عددان حقيقيان م ، ن حيث $م \le ق(س) \le ن$

$\forall س \in$ **مجال الاقتران.**

مثال (١) : استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{٠}^{٢} ٤ \, ءس$

الحل : لتكن $\sigma_ن$ **تجزئة نونية منتظمة على الفترة [٠ ، ٢]**

$$م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب-أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$$

$$= \frac{٢-٠}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٤ = \frac{٢}{ن} \times ٤ن = ٨$$

$$\int_{٠}^{٢} ٤ \, ءس = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} م(\sigma_ن ، ق) = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} ٨ = ٨$$

لاحظ أن $\int_{٠}^{٢} ٤ \, ءس = ٤(٢ - ٠) = ٨$ **= قيمة الثابت (الحد العلوي – الحد السفلي)**

قابلية الاقتران ق(س) للتكامل في الفترة [أ ، ب]:

نظرية (١) : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] فإنه يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] .

مثال(٢) : هل الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٥$ قابلاً للتكامل على الفترة [-١ ، ٤] ؟ ولماذا ؟

الحل : ق(س) كثير حدود ⟵ ق(س) متل على ح ⟵ ق (س) متصل على [-١ ، ٤]

⟵ قابلاً للتكامل على الفترة [-١ ، ٤] .

نظرية (٢) : إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان الاقتران

هـ (س) = ق(س) لجميع قيم $س \in [أ،ب]$ ما عدا عند مجموعة منتهية

من قيم س في الفترة ، فإن هـ (س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

ويكون

$$\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

مثال (٣) : ابحث في قابلية تكامل الاقتران $ق(س) = [\frac{١}{٢}س]$ في الفترة [٤ ، ٦]

الحل : نعيد تعريف $[\frac{١}{٢}س]$ =
$$\begin{cases} ٢ &، ٤ \le س < ٦ \\ ٣ &، س = ٦ \end{cases}$$

نفرض أن هـ (س) = ٢ ، في الفترة [٤ ، ٦] ⟵ قابلاً للتكامل لأنه متصل .

وبما أن هـ (س) = ق(س) لجميع قيم س في الفترة [٤ ، ٦] ما عدا س = ٦ ، فإن

الاقتران $ق(س) = [\frac{١}{٢}س]$ قابلاً للتكامل على الفترة [٤ ، ٦] .

قاعدة (١) :

$$\int_{أ}^{ب} جـ\,ءس = جـ(ب - أ)$$

قاعدة (٢) : إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{ن}$ معرفاً على الفترة [أ ، ب] ،

$ن \in ح$ ، $ن \ne {}^{-}١$ فإن :

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big|_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن+١}$$

مثال (٤) : جد قيمة كل من التكاملات الآتية :

أ) $\int_{-١}^{٢} ٦\,\text{ءس} = ٦(٢ - {}^{-}١) = ٦ \times ٣ = ١٨$

ب) $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٤}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٥}}{٥}\Big|_{١}^{٣} = \frac{٣^{٥} - ١^{٥}}{٥} = \frac{٢٤٣ - ١}{٥} = \frac{٢٤٢}{٥}$

ج) $\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\Big|_{١}^{٤} = \frac{٢\sqrt{\text{س}^{٣}}}{٣}\Big|_{١}^{٤}$

$$= \frac{٢\sqrt{٤^{٣}} - ٢\sqrt{١^{٣}}}{٣} = \frac{٢\sqrt{٦٤} - ٢}{٣} = \frac{٢ \times ٨ - ٢}{٣} = \frac{١٦ - ٢}{٣} = \frac{١٤}{٣}$$

د) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{٢}^{٨} \text{س}^{-٢}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{-١}}{-١}\Big|_{٢}^{٨} = \frac{٨^{-١} - ٢^{-١}}{-١} = -\left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{٢}\right) = -\left(\frac{١}{٨} - \frac{٤}{٨}\right) = \frac{٣}{٨}$

هـ) $\int_{٢}^{٢} \text{س}^{٣}\,\text{ءس} = ٠$

و) $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٢} + \text{س})\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big|_{-٢}^{٢} = \left(\frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢}\right) - \left(\frac{-٨}{٣} + \frac{٤}{٢}\right) =$

$$= \frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٢} + \frac{٨}{٣} - \frac{٤}{٢} = \frac{١٦}{٣}$$

مثال (٥) : جد قيمة الثابت (ب) إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ب}\,\text{ءس} = ٥$

الحل :

$\int_{١}^{٣} \text{ب}\,\text{ءس} = \text{ب}(٣ - ١) = ٥ \longrightarrow ٣\text{ب} - \text{ب} = ٥$

$\longrightarrow ٢\text{ب} = ٥ \longrightarrow \text{ب} = \frac{٥}{٢}$

خصائص التكامل المحدود :

إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، فإن :

١) $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

٢) $$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٠$$

٣) $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ك}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \quad ، \quad \text{ك} \in \text{ح}$$

٤) $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right)\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$$

مثال (٦) : جد $\int_{١}^{٤} ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

الحل : $$\int_{١}^{٤} ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس} = ٣\int_{١}^{٤} \text{س}^{٢}\,\text{دس} = ٣\,\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big|_{١}^{٤} = ٤^{٣} - ١^{٣} = ٦٣$$

خاصية الإضافة : إذا كان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد تنتمي لفترة معرف عليها الاقتران ق(س) ، فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$$

مثال (٧) : أوجد $\int_{٠}^{٥} |\text{س} - ٢|\,\text{دس}$

الحل : نعيد تعريف | س – ٢ |

-------------- ++++++++

٠ ٢ ٥

$$|س - ٥| = \begin{cases} ٢ - س \quad ، & ٠ \leq س \leq ٢ \\ س - ٢ \quad ، & ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{٥} |س - ٢|\, ءس = \int_{٠}^{٢} (٢ - س)\, ءس + \int_{٢}^{٥} (س - ٢)\, ءس$$

$$= \left(٢س - \frac{س^{٢}}{٢}\right)\Big|_{٠}^{٢} + \left(\frac{س^{٢}}{٢} - ٢س\right)\Big|_{٢}^{٥}$$

$$= \left(٢ \times ٢ - \frac{٤}{٢}\right) - (٠ - ٠) + \left(\frac{٢٥}{٢} - ٢ \times ٥\right) - \left(\frac{٤}{٢} - ٢ \times ٢\right)$$

$$= (٤ - ٢) + \left(\frac{٢٥}{٢} - ١٠\right) - (٢ - ٤) = ٢ + \frac{٥}{٢} + ٢ = \frac{١٣}{٢}$$

نظرية: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان $ق(س) \geq ٠ \quad ، \quad \forall س \in [أ،ب]$

فإن : $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \geq ٠$

مثال (٨) : بدون حساب التكامل أثبت أن : $\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢}+٤}\, ءس \geq ٠$

الحل : نبحث في إشارة $\frac{٣س}{س^{٢}+٤}$ في الفترة [٠ ، ٥]

البسط : ٣ س :

--------------- ++++++++++
(٠ ، ٥)

المقام : $س^{٢} + ٤$

++++++++++++++++++++
(٠ ، ٥)

$\frac{٣س}{س^{٢}+٤}$:

---------------- ++++++++++
(٠ ، ٥)

$\leftarrow \int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢}+٤}\, ءس \geq ٠$

خاصية المقارنة : إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان

$\text{ق}(\text{س}) \le \text{هـ}(\text{س})$ ، $\forall\, \text{س} \in [\text{أ}،\text{ب}]$ ، فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال (٩) : بدون إجراء عملية التكامل ، أثبت أن :

$$\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢} - ١)\,\text{دس} \le \int_{١}^{٢} (٢\text{س} + ٢)\,\text{دس}$$

الحل : نفرض أن $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ١) - (٢\text{س} + ٢)$

$$= \text{س}^{٢} - ١ - ٢\text{س} - ٢ = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣$$

نبحث في اشارة ق(س) $\longleftarrow$ (س – ٣) (س + ١) = ٠ $\longleftarrow$ س = ٣ ، -١

$$\begin{array}{ccccccc} +++++++ & & ----------------------- & & & & ++++++++ \\ & -١ & & ١ & ٢ & ٣ & \end{array}$$

$\longleftarrow$ $\text{ق}(\text{س}) \le ٠$ في الفترة [١ ، ٢]

$\longleftarrow$ $(\text{س}^{٢} - ١) - (٢\text{س} + ٢) \le ٠$ في الفترة [١ ، ٢]

$\longleftarrow$ $(\text{س}^{٢} - ١) \le (٢\text{س} + ٢)$ في الفترة [١ ، ٢]

$\longleftarrow$ $\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢} - ١)\,\text{دس} \le \int_{١}^{٢} (٢\text{س} + ٢)\,\text{دس}$

مثال (١٠) : إذا كان $\int_{٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٣$ ، وكان $\int_{٨}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = {}^{-}٥$

جد $\int_{٢}^{٨} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل : $\int_{٢}^{٨} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢\int_{٢}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢\left(\int_{٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٦}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right)$

$$= ٢\left(\int_{٢}^{٦} ق(س)\,ءس + -\int_{٨}^{٦} ق(س)\,ءس\right) = ٢(٣ + - {}^{-}٥) = ٢ \times ٨ = ١٦$$

مثال (١١) : إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٤ق(س) + ٧هـ(س)\right) ءس = ١٩$ **، وكان** $\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,ءس = ٩$

فما قيمة $\int_{١}^{٣} ٥هـ(س)\,ءس$

الحل :

$\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,ءس = ٣\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = ٩ \longrightarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = ٣$

$\int_{١}^{٣} \left(٤ق(س) + ٧هـ(س)\right) ءس = ١٩ \longrightarrow ٤\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = ١٩$

$٤ \times ٣ + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = ١٩ \longrightarrow ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = ١٩ - ١٢ = ٧$

$\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = ١ \longrightarrow \int_{١}^{٣} ٥هـ(س)\,ءس = ٥\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = ٥ \times ١ = ٥$