وحدة المصفوفات

المصفوفات وأنواعها

تعريف : المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد ، على هيئة صف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، جـ ، ..... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو م × ن ، حيث :

م يمثل عدد صفوفها ، ن تمثل عدد أعمدتها.

الصورة العامة للمصفوفة من الرتبة م × ن تكون على النحو :

$$أ_{م\times ن} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & \cdots & أ_{ن1} \\ أ_{12} & أ_{22} & \cdots & : \\ : & : & \cdots & : \\ أ_{1م} & أ_{2م} & \cdots & أ_{نم} \end{bmatrix}$$

وتتحدد أي مدخلة فيها حسب الصف والعمود الواقعة فيها .

مثال (١) : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥- & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$

جد : ١) رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب .

٢) $أ_{21}$ ، $ب_{12}$

الحل :١) المصفوفة أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة ٣ × ٢

المصفوفة ب تتكون من صفين و٣ أعمدة فهي من الرتبة ٢ × ٣

٢) قيمة المدخلة $أ_{21}$ **= -٢ ،** $ب_{12}$ **= ١**

أنواع خاصة من المصفوفات:

١) المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها = ن ، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

٢) مصفوفة الوحدة : ويرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$م_{يهـ} = \begin{cases} ١ \text{ ، } ي = هـ \\ ٠ \text{ ، } ي \neq هـ \end{cases}$$

مثلاً : $م_٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $م_٣ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٣) المصفوفة الصفرية (و) : هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار مثل :

$$و_{٣٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

٤) مصفوفة الصف : هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل : ص = [٢ -١ ٤]

٥) مصفوفة العمود : وهي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل : $ع = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٦) المصفوفة القطرية : هي المصفوفة المربعة س بحيث : $س_{يهـ} = ٠ \text{ ، } \forall ي \neq هـ$

مثل : $س = \begin{bmatrix} س_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & س_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$

ونسمي القطر الذي مدخلاته $س_{يهـ} \text{ ، } \forall ي = هـ$ **بالقطر الرئيسي للمصفوفة س .**

٧) المصفوفة المثلثية العلوية: هي المصفوفة المربعة التي يكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي أصفاراً ، مثل :

$$س = \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{١٢} & س_{١٣} \\ ٠ & س_{٢٢} & س_{٢٣} \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$$

مثال (٢) : لديك المصفوفات $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

١) ما نوع المصفوفة (جـ) ؟ ٢) هل المصفوفة (ب) مصفوفة وحدة ؟

٣) ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة (أ)

الحل : ١) المصفوفة جـ هي مصفوفة عمود .

٢) المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة ، لأنها تتعارض مع تعريف مصفوفة الوحدة .

٣) -٣ + ٥ = ٢

مثال (٣) : إذا كانت المصفوفة ك من الرتبة ٣×٣ حسب الشروط الآتية:

$$ك_{يهـ} = \begin{cases} ي + هـ & ، \ ي > هـ \\ ي - هـ & ، \ ي < هـ \\ \frac{ي}{ي+هـ} & ، \ ي = هـ \end{cases}$$

جد ما يلي : ١) قيمة المدخلة $ك_{١٢}$ ٢) قيمة المدخلة $ك_{٢١}$ ٣) $\sum_{ي=١}^{٣} ك_{ي٣}$

٤) مدخلات القطر الرئيسي.

الحل : ١) المدخلة $ك_{١٢}$ = ٢ – ١ = ١

٢) المدخلة $ك_{٢١}$ = ١ + ٢ = ٣

٣) $\sum_{ي=١}^{٣} ك_{ي٣}$ = $ك_{٣١} + ك_{٣٢} + ك_{٣٣} = (١+٣) + (٢+٣) + \frac{٣}{٣+٣} = ٤ + ٥ + \frac{١}{٢} = ٩و٥$

٤) مدخلات القطر الرئيسي هي : $ك_{١١}$ ، $ك_{٢٢}$ ، $ك_{٣٣}$ = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢+٢}$ ، $\frac{٣}{٣+٣} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$

تساوي مصفوفتين:

تعريف : تتساوى مصفوفتين أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية ،

وبالرموز نقول أ = ب إذا وفقط إذا كان $أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$ لجميع قيم ي ، هـ

مثال (٤) : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ \sqrt{ع} & ص^{٢} \end{bmatrix}$

١) هل $أ = ب$ ، ولماذا ؟

٢) جد قيم س ، ص ، ع التي تجعل $أ = جـ$

الحل : ١) $أ \neq ب$ لأن المدخلات المتناظرة لهما غير متساوية.

٢) بما أن $أ = جـ$ ، هذا يعني أن مدخلاتهما المتناظرة متساوية

$\longleftarrow$ س = ٢

$ص^{٢} = ٤ \longleftarrow ص = \pm ٢$

$\sqrt{ع} = ٥ \longleftarrow ع = ٢٥$

مثال (٥) : كون مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث تعطى مدخلاتها حسب العلاقة :

$أ_{يه} = ٢^{ي-هـ}$

الحل : $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$

$أ_{١١} = ٢^{١-١} = ٢^{٠} = ١$ $\qquad$ $أ_{٢١} = ٢^{٢-١} = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$

$أ_{١٢} = ٢^{١-٢} = ٢^{١} = ٢$ $\qquad$ $أ_{٢٢} = ٢^{٢-٢} = ٢^{٠} = ١$

$\longleftarrow$ $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

مثال (٦) : إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ١+س^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & ١-س \end{bmatrix}$ ، جد قيمة / قيم س.

الحل :

$س^{٢} + ١ = ١٠ \longleftarrow س^{٢} = ٩ \longleftarrow س = \pm ٣$

س ـ ١ = ٢ $\longleftarrow$ س = ٣ $\longleftarrow$ قيم س التي تحقق المعادلتين في آن واحد $س = ٣$

سؤال : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٢ & س \\ ١ & -س & ٧ \\ ٣ & ٢٠ & ٧ \end{bmatrix}$ **، جد :**

١) رتبة المصفوفة أ **٢) قيمة** $(أ_{٣١} + أ_{١٢})$ **٣) قيمة س بحيث** $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$