العمليات على المصفوفات (٢)

ضرب المصفوفات :

تعريف : إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل ، فإن حاصل الضرب أ . ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل وتكن مدخلات المصفوفة جـ على النحو الآتي :

$$جـ_{يه} = أ_{ي١} \times ب_{١ه} + أ_{ي٢} \times ب_{٢ه} + أ_{ي٣} \times ب_{٣ه} + \ldots\ldots + أ_{يﻥ} \times ب_{نه}$$

مثال (١) : لتكن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

فأي العمليات الآتية تكون معرفة (ممكنة):

١) أ.جـ ٢) أ.ب ٣) ب.جـ

الحل : ١) أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٢ لذلك أ.جـ غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة أ ≠ عدد صفوف المصفوفة جـ .

٢) أ.ب معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة أ يساوي عدد صفوف المصفوفة ب.

٣) ب.جـ معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة ب يساوي عدد صفوف المصفوفة جـ .

مثال (٢) : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ -٢ & ٩ & -٥ \end{bmatrix}$

جد (إن أمكن) : ١) أ.جـ ٢) جـ.أ

الحل : ١) بما أن رتبة المصفوفة أ هي ٢ × ٢ ، ورتبة المصفوفة جـ هي ٢ × ٣

يعني أن (عدد أعمدة أ = عدد صفوف جـ) ولذلك يمكننا ايجاد حاصل الضرب على النحو الآتي :

$$\text{أ.جـ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ -٢ & ٩ & -٥ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ.جـ} = \begin{bmatrix} -٢ \times ٥ + ٢ \times -٣ & ٩ \times ٥ + ١ \times -٣ & -٥ \times ٥ + ٤ \times -٣ \\ -٢ \times ٦ + ٢ \times ١ & ٩ \times ٦ + ١ \times ١ & -٥ \times ٦ + ٤ \times ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ.جـ} = \begin{bmatrix} -٣٧ & ٤٢ & -١٦ \\ -٢٦ & ٥٥ & -١٠ \end{bmatrix}$$

٢) بما أن عدد أعمدة جـ $\neq$ عدد صفوف أ ، لذلك لا يمكن ايجاد جـ.أ

ب.جـ

مثال (٣) : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$

جد (إن أمكن) : ١) أ.ب ٢) ب.أ

الحل : ١) بما أن رتبة المصفوفة أ هي ٢×٢ ، ورتبة المصفوفة ب هي ٢×٢

يعني أن (عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب) ولذلك يمكننا ايجاد حاصل الضرب على النحو الآتي :

$$\text{أ.ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \times ٥ + ٢ \times ٢ & ٧ \times ٥ + ٣ \times ٢ \\ ٥ \times ٠ + ٢ \times -٢ & ٧ \times ٠ + ٣ \times -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٩ & ٤١ \\ -٤ & -٦ \end{bmatrix}$$

٢) $$\text{ب.أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \times ٢ + ٥ \times ٣ & -٢ \times ٢ + ٢ \times ٣ \\ ٠ \times ٥ + ٥ \times ٧ & -٢ \times ٥ + ٢ \times ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٢ \\ ٣٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

مثال (٤) : لتكن أ مصفوفة من الرتبة $٢ \times$ ن ، ب مصفوفة من الرتبة $٥ \times$ ك ، فما قيم كل من

ن ، ك التي تجعل أ.ب ، ب.أ معرفتين ؟

الحل : حتى تكون أ.ب معرفة يجب ان تكون ن = ٥

حتى تكون ب.أ معرفة يجب ان تكون ك = ٢

مثال (٥) : جد ناتج $\left([٢ \quad ٣ \quad ١^{-}]\cdot\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

الحل : $[٢\times٤+٣\times١+٠\times١^{-} \quad ٢\times٥+٣\times٢+١^{-}\times٣]\cdot\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}=[١١ \quad ١٣]\cdot\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}=[١\times١٣+٣\times١١]=[٤٦]$

رتبة المصفوفة الناتجة من حاصل الضرب هي ١×١

خصائص عملية ضرب المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات حيث أن عملية الجمع الضرب معرفتان ، م المصفوفة المحايدة،

ك∈ ح **، فإن :**

١) $(أ.ب).جـ = أ.(ب.جـ)$ **الخاصية التجميعية**

٢) $أ.(ب+جـ) = (أ.ب)+(أ.جـ)$ **توزيع الضرب على الجمع من اليمين**

٣) $(أ+ب).جـ = (أ.جـ)+(ب.جـ)$ **توزيع الضرب على الجمع من اليسار**

٤) $أ.م = م.أ = أ$ **العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات**

٥) $ك(أ.ب) = (ك أ).ب = أ.(ك ب)$

مثال (٥) : إذا كانت $أ=\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب=\begin{bmatrix} ٢ & ٣^{-} \\ ١^{-} & ٥ \end{bmatrix}$ ، $جـ=\begin{bmatrix} ٢^{-} & ١^{-} \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

جد أ.ب ، أ.جـ

الحل : $أ.ب=\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٢ & ٣^{-} \\ ١^{-} & ٥ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١^{-}\times٤+٢\times٦ & ٥\times٤+٣^{-}\times٦ \\ ١^{-}\times٢+٢\times٣ & ٥\times٢+٣^{-}\times٣ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

$أ.جـ=\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٢^{-} & ١^{-} \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٥\times٤+٢^{-}\times٦ & ٢\times٤+١^{-}\times٦ \\ ٥\times٢+٢^{-}\times٣ & ٢\times٢+١^{-}\times٣ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

مثال (٦) : إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن $أ.ب = جـ$ فما رتبة ب في كل مما يلي :

١) $أ_{٥\times٢}$ ، $جـ_{٤\times٢}$ ٢) $أ_{٣\times٣}$ ، $جـ_{٥\times٣}$

الحل : ١) $أ_{٥\times٢}.ب = جـ_{٤\times٢}$ ⟵ **عدد صفوف ب = عدد أعمدة أ = ٥**

عدد أعمدة ب = عدد أعمدة جـ = ٤

رتبة المصفوفة ب هي : ٥×٤

٢) $أ_{٣\times٣}.ب = جـ_{٥\times٣}$ ⟵ **عدد صفوف ب = عدد أعمدة أ = ٣**

عدد أعمدة ب = عدد أعمدة جـ = ٥

رتبة المصفوفة ب هي : ٣×٥

مثال (٧) : جد قيم س ، ص بحيث

$$\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ص & ٤ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٥ & س & ٣ \\ ٢^- & ٤ & ١^- \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ ٣٤^- & ٥ \end{bmatrix}$$

الحل :

$$٣\times١+س\times٤+٥\times٥=٢٠$$

$$٣+٤س+٢٥=٢٠ \longleftarrow ٤س+٢٨=٢٠$$

$$٤س=٨^- \longleftarrow س=\frac{٨^-}{٤}=٢^-$$

$$١^-\times٦+٤\times ص+٨\times٢^-=٣٤^-$$

$$٦^-+٤ص+١٦^-=٣٤^- \longleftarrow ٤ص+٢٢^-=٣٤^-$$

$$٤ص=١٢^- \longleftarrow ص=\frac{١٢^-}{٤}=٣^-$$