النظير الضربي للمصفوفة المربعة :

تعريف : تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة

بحيث : $\text{أ}.\text{ب} = \text{ب}.\text{أ} = \text{م}_{\text{ن}}$ **، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ ، ونرمز**

لها بالرمز $\text{أ}^{-١}$ **وتكتب** $\text{ب} = \text{أ}^{-١}$ **ويكون** $\text{أ}.\text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١}.\text{أ} = \text{م}$

مثال (١) : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢^- \\ ١^- & ١ \end{bmatrix}$ **بين أن** $\text{ب} = \text{أ}^{-١}$

الحل :

$$\text{أ}.\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٢^- \\ ١^- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times٣+٢\times١^- & ١\times٢^-+٢\times١ \\ ١\times٣+٣\times١^- & ١\times٢^-+٣\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣+٢^- & ٢^-+٢ \\ ٣+٣^- & ٢^-+٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \text{م}_٢$$

$$\text{ب}.\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢^- \\ ١^- & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣\times١+٢^-\times١ & ٣\times٢+٢^-\times٣ \\ ١^-\times١+١\times١ & ١^-\times٢+١\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣+٢^- & ٦+٦^- \\ ١^-+١ & ٢^-+٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \text{م}_٢$$

$$\longleftarrow \quad \text{ب} = \text{أ}^{-١}$$

مثال (٢) : إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ **، تحقق فيما إذا كان للمصفوفة س نظيراً ضربياً أم لا**

الحل : نفرض أن للمصفوفة س نظيراً ضربياً هو $\text{ص} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ **، من التعريف** $\text{س}.\text{ص} = \text{ص}.\text{س} = \text{م}_٢$

$\longleftarrow$ $\text{س}.\text{ص} = \begin{bmatrix} ٣\text{أ}+٢\text{جـ} & ٣\text{ب}+٢\text{د} \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ $\longleftarrow$ **لا يوجد للمصفوفة س نظير ضربي**

تعريف : المصفوفة المنفردة هي المصفوفة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية : المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا $|\text{أ}| = ٠$

مثال (٣) : أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤^- \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & ١^- \end{bmatrix}$$

الحل : $|\text{أ}| = ٢\times٨ - ٤^-\times٤ = ١٦ - ١٦^- = ٣٢ \neq ٠$ $\longleftarrow$ **المصفوفة أ غير منفردة.**

$$|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & ١^- \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ١^- \end{vmatrix} = ٢ \times ٠ = ٠$$

(حسب خاصية : إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين في مصفوفة فإن محددة المصفوفة = ٠)

$\longleftarrow$ المصفوفة ب منفردة .

<u>مثال (٤)</u> : جد قيمة س التي تجعل المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & س+١ \end{bmatrix}$ **منفردة .**

<u>الحل</u> : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & س+١ \end{vmatrix} = ٢(س+١) - ٨ \times ٣ = ٢س + ٢ - ٢٤ = ٢س - ٢٢$

وبما أن المصفوفة أ منفردة $\longleftarrow |أ| = ٠$

$\longleftarrow ٢س - ٢٢ = ٠ \longleftarrow ٢س = ٢٢ \longleftarrow س = ١١$

<u>خصائص النظير الضربي</u> :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين، وغير منفردتين ومن نفس الرتبة، وكان ك عدداً حقيقياً $\neq ٠$ فإن:

١) $(أ^{-١})^{-١} = أ$ **٢)** $(كأ)^{-١} = \frac{١}{ك} أ^{-١}$

٣) $(أ.ب)^{-١} = ب^{-١}.أ^{-١}$ **٤)** $|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|}$

<u>تعميم</u> : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ **مصفوفة غير منفردة فإن :**

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$$

أي أ، $أ^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل مواقع القطر الرئيسي وتغيير اشارة مدخلات القطر الآخر للمصفوفة.

<u>مثال (٥)</u> : إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ١^- \end{bmatrix}$ **، جد** $\text{س}^{-١}$

<u>الحل</u> : $|\text{س}| = ٢ \times {}^-١ - ٢ \times ٣ = {}^-٢ - ٦ = {}^-٨ \neq ٠$ $\longleftarrow$ **المصفوفة س لها نظير ضربي**

$$\text{س}^{-١} = \frac{١}{٨^-}\begin{bmatrix} ١^- & ٢^- \\ ٣^- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٣}{٨} & \frac{١^-}{٤} \end{bmatrix}$$

<u>مثال (٦)</u> : ما قيم ك التي تجعل كلا من المصفوفات الآتية منفردة :

١) $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ ٤ & ٢\text{ك} \end{bmatrix}$ **٢)** $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ك} & ٤ \\ ١ & \text{ك} \end{bmatrix}$

<u>الحل</u> : ١) $|\text{أ}| = \text{ك} \times ٢\text{ك} - ٤\text{ك} = ٢\text{ك}^٢ - ٤\text{ك}$

حتى تكون المصفوفة أ منفردة $\longleftarrow$ $|\text{أ}| = ٠$

$\longleftarrow$ $٢\text{ك}^٢ - ٤\text{ك} = ٠$ $\longleftarrow$ $٢\text{ك}(\text{ك} - ٢) = ٠$

$\longleftarrow$ **إما ٢ ك = ٠** $\longleftarrow$ **ك = ٠ أو ك − ٢ = ٠** $\longleftarrow$ **ك = ٢**

٢) $|\text{ب}| = \text{ك} \times \text{ك} - ٤ = \text{ك}^٢ - ٤$

حتى تكون المصفوفة ب منفردة $\longleftarrow$ $|\text{ب}| = ٠$

$\longleftarrow$ $\text{ك}^٢ - ٤ = ٠$ $\longleftarrow$ $(\text{ك} - ٢)(\text{ك} + ٢) = ٠$

$\longleftarrow$ **إما ك − ٢ = ٠** $\longleftarrow$ **ك = ٢ أو ك + ٢ = ٠** $\longleftarrow$ **ك = −٢**

<u>سؤال (١)</u> : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ **، جد ١)** $\text{أ}^{-١}$ **(إن أمكن) ٢)** $(\text{أ}^{-١})^{-١}$

<u>سؤال (٢)</u> : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ **، وكان** $|\text{أ}^{-١}| = \frac{١}{٥}$ **، فما قيمة س ؟**